Primeira Lista

MAT0311 – Cálculo Diferencial e Integral V

Prof. Daniel Victor Tausk

10/08/2013

Exercício 1. Sejam V_1, V_2, ..., V_n espaços vetoriais (todos reais ou todos complexos), munidos de normas $\|\cdot\|_i : V_i \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Seja dada também uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^n$ que seja *monotônica*, isto é:

$$|x_i| \le |y_i|,\ i = 1, 2, \ldots, n \Longrightarrow \|x\| \le \|y\|, \quad \text{para quaisquer } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Mostre que a igualdade:

$$|||(v_1, \ldots, v_n)||| = \big\|\big(\|v_1\|_1, \|v_2\|_2, \ldots, \|v_n\|_n\big)\big\|, \quad v_i \in V_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

define uma norma $|||\cdot|||$ no espaço produto $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$.

Exercício 2. Uma *forma bilinear* num espaço vetorial real V é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que é linear em cada variável, i.e., tal que:

$$\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle, \quad \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle,$$
$$\langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle,$$

para todos $x, y, x', y' \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n} \in M_n(\mathbb{R})$, mostre que a igualdade:

$$\langle x, y \rangle = x^{\mathrm{t}} A y, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

define uma forma bilinear em $\mathbb{R}^n$, onde em (1) vetores de $\mathbb{R}^n$ estão sendo identificados com matrizes coluna $n \times 1$ e x^{t} denota a transposta da matriz x. Verifique também que:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e que $a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, para todos $i, j = 1, \ldots, n$, onde e_i denota o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

(b) Dada uma forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbb{R}^n$, tomando $a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é dada por (1) se a matriz A é definida por $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

(c) Uma forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$ num espaço vetorial V é dita *simétrica* se $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, para todos $x, y \in V$. Mostre que a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbb{R}^n$ definida em (1) é simétrica se e somente se a matriz A é simétrica.

(d) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. Sabemos então que existe uma base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$, ortonormal com respeito ao produto interno canônico, de modo que cada $v_i \in \mathbb{R}^n$ é um autovetor de A associado a um autovalor $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é definida como em (1), mostre que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ e que $\langle v_i, v_i \rangle = \lambda_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Conclua que:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x'_i y'_i,$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$, onde $(x'_1, \ldots, x'_n)$, $(y'_1, \ldots, y'_n)$ são, respectivamente, as coordenadas de x e de y na base $\mathcal{B}$.

(e) Uma forma bilinear simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ num espaço vetorial V é dita *definida positiva* se $\langle x, x \rangle > 0$, para todo $x \in V$ não nulo. Recorde que um produto interno é precisamente uma forma bilinear simétrica definida positiva. Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, mostre que a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida em (1) é um produto interno em $\mathbb{R}^n$ se e somente se A é simétrica e possui todos os autovalores positivos.

Exercício 3. Seja $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ uma semi-norma num espaço vetorial (real ou complexo) V.

(a) Mostre que:

$$N = \big\{ x \in V : \|x\| = 0 \big\}$$

é um subespaço de V.

(b*) Considere o espaço vetorial quociente V/N; para $x \in V$, denote por $x + N \in V/N$ a classe de equivalência de x. Mostre que a igualdade:

$$|\!|\!| x + N |\!|\!| = \|x\|, \quad x \in V,$$

define uma norma em V/N.

Exercício 4. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica num espaço vetorial real V. Assuma que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ seja *semi-definida positiva*, i.e., que:

$$\langle x, x \rangle \geq 0,$$

para todo $x \in V$.

(a) Mostre que vale a desigualdade de Cauchy–Schwarz:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \tag{2}$$

para todos $x, y \in V$, onde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Conclua que, dado $x \in V$, temos $\|x\| = 0$ se e somente se $\langle x, y \rangle = 0$, para todo $y \in V$.

(b) Mostre que $\| \cdot \|$ é uma semi-norma em V.

(c*) Defina N como no Exercício 3. Mostre que a igualdade:

$$\langle\!\langle x+N, y+N\rangle\!\rangle = \langle x, y\rangle, \quad x, y \in V,$$

define um produto interno no espaço quociente V/N. Recorde que, na desigualdade de Cauchy–Schwarz para produtos internos, a igualdade vale se e somente se os vetores são linearmente dependentes. Conclua que vale a igualdade em (2) se e somente se $x+N$ e $y+N$ são linearmente dependentes (i.e., se e somente se existem $a, b \in \mathbb{R}$, não ambos nulos, com $\|ax+by\| = 0$).

Exercício 5. Dado $p \in \,]0, +\infty[$, defina:

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

No Exercício 6 apresentaremos um roteiro para você mostrar o fato (não trivial) de que a desigualdade triangular vale para $\|\cdot\|_p$ se $p \geq 1$. Para $n \geq 2$, $p \in \,]0, 1[$, dê exemplo de vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que:

$$\|x+y\|_p > \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Assim $\|\cdot\|_p$ *não é* uma norma, para $0 < p < 1$ (exceto se $n = 1$, em que $\|\cdot\|_p$ coincide com o valor absoluto de números reais, para todo p).

Exercício* 6. O objetivo deste exercício é mostrar que a desigualdade triangular vale para $\|\cdot\|_p$ se $p \geq 1$ (assim, $\|\cdot\|_p$ é de fato uma norma em $\mathbb{R}^n$ — levando em conta que é muito fácil verificar que valem as outras propriedades que aparecem na definição de norma).

(a) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Suponha que a derivada f' seja crescente (i.e., que $f'(x) \leq f'(y)$, para $x, y \in I$ com $x \leq y$). Mostre que a função f é *convexa*, isto é, que:

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

para todos $x, y \in I$, $t \in [0, 1]$. (Sugestão: fixe $x, y \in I$ e defina $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fazendo:

$$g(t) = f\big((1-t)x + ty\big) - \big((1-t)f(x) + tf(y)\big).$$

Mostre que existe $c \in \,]0, 1[$ com $g'(c) = 0$ e que g' é crescente.)

(b) Usando o resultado do item (a), obtemos que a função exponencial $f(x) = e^x$ é convexa. Usando esse fato, mostre que vale a *desigualdade entre as médias (ponderadas) aritmética e geométrica*, isto é, mostre que dados $a, b \geq 0$ e dados "pesos" $\alpha, \beta > 0$ com $\alpha + \beta = 1$ então:

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b.$$

(c) Dado $p \in]1, +\infty[$, defina $q \in]1, +\infty[$ de modo que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

O número q é chamado o *expoente conjugado* de p. Usando o resultado do item (b), mostre que vale a *desigualdade de Young*:

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

para quaisquer $a, b \ge 0$.

(d) Mostre que vale a *desigualdade de Hölder*:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \le \|x\|_p \, \|y\|_q,$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$, onde $p, q \in]1, +\infty[$ são expoentes conjugados. (Sugestão: comece reduzindo o caso geral ao caso que $\|x\|_p = 1$ e $\|y\|_q = 1$. Use a desigualdade de Young.)

(e) Mostre que vale a *desigualdade de Minkowski*:

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p,$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty[$. (Sugestão: para $p > 1$, comece notando que:

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i||x_i+y_i|^{p-1} \le \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i+y_i|^{p-1},$$

e depois use a desigualdade de Hölder em ambos os somatórios.)

Exercício* 7. Considere uma aplicação $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (isto é, uma *curva* em $\mathbb{R}^n$). Dada uma partição $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ do intervalo $[a, b]$, definimos:

$$L(\gamma; P) = \sum_{i=0}^{k-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|,$$

onde $\| \cdot \| = \| \cdot \|_2$ denota a norma Euclideana de $\mathbb{R}^n$. O *comprimento* (ou *variação total*) de γ é definido por:

$$L(\gamma) = \sup_P L(\gamma; P) \in [0, +\infty],$$

onde o supremo é tomado com respeito a todas as partições P do intervalo $[a, b]$. A curva γ é dita *retificável* (ou *de variação limitada*) se $L(\gamma) < +\infty$.

(a) Dada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, verifique que:

$$\|\gamma(a) - \gamma(b)\| \le L(\gamma).$$

(Sugestão: tome $P = \{a, b\}$.)

(b) Seja $\sigma : [a', b'] \to [a, b]$ uma função monótona (isto é, crescente ou decrescente) e bijetora[1]. Mostre que, para $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, vale que:

$$L(\gamma) = L(\gamma \circ \sigma).$$

(c) Dada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e dado $c \in \,]a, b[$, mostre que:

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]}).$$

(Sugestão: note que $L(\gamma; P \cup \{c\}) \geq L(\gamma; P)$, para toda partição P de $[a, b]$. Conclua que, na definição de $L(\gamma)$, é suficiente considerar partições P com $c \in P$.)

(d) Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto e, para $x, y \in M$, denote por $\Omega_{xy}(M)$ o conjunto de todas as curvas contínuas e retificáveis $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ tais que $\gamma\big([0, 1]\big) \subset M$, $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Assuma que M seja *conexo por arcos retificáveis*, isto é, que para todos $x, y \in M$ vale que $\Omega_{xy}(M)$ não é vazio. Definimos a *distância geodésica* $d : M \times M \to \mathbb{R}$ fazendo:

$$d(x, y) = \inf \big\{ L(\gamma) : \gamma \in \Omega_{xy}(M) \big\},$$

para todos $x, y \in M$. Mostre que d é uma métrica em M.

Observação: é possível mostrar que, se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 por partes (isto é, se existe uma partição $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ de $[a, b]$ tal que $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ é de classe C^1, para $i = 0, 1, \ldots, k - 1$) então γ é retificável e seu comprimento é dado por:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Veja, por exemplo, Capítulo II do curso de Análise vol. 2, de Elon Lages Lima (Teorema 6, §4, pg. 100, na segunda edição).

[1] Na verdade, o resultado também vale se σ for apenas monótona e sobrejetora, mas a demonstração é um pouco mais chata.