Primeira Lista

MAT0222 – Álgebra Linear II

Prof. Daniel Victor Tausk

08/03/2014

Definição 1. Sejam V, W e Z espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K. Dizemos que uma aplicação $B : V \times W \to Z$ é *bilinear* quando valem as seguintes condições:

(a) $B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w)$, para todos $v_1, v_2 \in V$, $w \in W$;
(b) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$, para todos $\lambda \in K$, $v \in V$, $w \in W$;
(c) $B(v, w_1 + w_2) = B(v, w_1) + B(v, w_2)$, para todos $v \in V$, $w_1, w_2 \in W$;
(d) $B(v, \lambda w) = \lambda B(v, w)$, para todos $\lambda \in K$, $v \in V$, $w \in W$.

As condições (a) e (b) dizem que, para todo $w \in W$, a aplicação

$$V \ni v \longmapsto B(v, w) \in Z$$

é linear, isto é, que B é *linear na primeira variável.* As condições (c) e (d) dizem que, para todo $v \in V$, a aplicação

$$W \ni w \longmapsto B(v, w) \in Z$$

é linear, isto é, que B é *linear na segunda variável.* Assim, aplicações bilineares são simplesmente aplicações que são lineares em cada variável. Denotamos por $\mathrm{L}(V, W; Z)$ o conjunto das aplicações bilineares $B : V \times W \to Z$. O conjunto $\mathrm{L}(V, W; Z)$ é um espaço vetorial, munido das operações:

$$(B_1 + B_2)(v, w) = B_1(v, w) + B_2(v, w), \quad (\lambda B)(v, w) = \lambda\big(B(v, w)\big),$$
$$B_1, B_2, B \in \mathrm{L}(V, W; Z),\ v \in V,\ w \in W,\ \lambda \in K.$$

Atenção: *não confunda* $\mathrm{L}(V, W; Z)$ com o espaço $\mathrm{L}(V \times W, Z)$ das aplicações lineares[1] definidas no espaço produto $V \times W$, tomando valores em Z.

Exercício 1. Sejam V e W espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K e seja $B : V \times W \to K$ uma aplicação bilinear. Mostre que a aplicação $T : V \to W^*$ definida por:

$$T(v)(w) = B(v, w), \quad v \in V,\ w \in W,$$

é (de fato bem definida e) linear.

[1] Se $B : V \times W \to Z$ é linear, então $B(v_1 + v_2, w_1 + w_2) = B(v_1, w_1) + B(v_2, w_2)$ e $B(\lambda v, \lambda w) = \lambda B(v, w)$. Por outro lado, se B é bilinear, temos $B(v_1 + v_2, w_1 + w_2) = B(v_1, w_1) + B(v_1, w_2) + B(v_2, w_1) + B(v_2, w_2)$ e $B(\lambda v, \lambda w) = \lambda^2 B(v, w)$.

Exercício 2. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre um mesmo corpo K. Sejam $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ uma base de V e $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ uma base de W. Dada uma aplicação bilinear $B : V \times W \to K$, então a *matriz que representa* B *nas bases* $\mathcal{E}$ *e* $\mathcal{F}$ é a matriz $[B]_{\mathcal{E}\mathcal{F}} \in M_{m\times n}(K)$ cuja entrada que está na linha $i = 1, \ldots, m$ e na coluna $j = 1, \ldots, n$ é $B(e_i, f_j)$. Se $T : V \to W^*$ é a aplicação linear definida no Exercício 1 e se $\mathcal{F}^*$ denota a base dual a $\mathcal{F}$, mostre que a matriz $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{F}^*}$ (que representa T nas bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}^*$) é igual à transposta da matriz $[B]_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$.

Exercício 3. Considere a aplicação

$$\varphi : \mathrm{L}(V, W; K) \longrightarrow \mathrm{L}(V, W^*)$$

definida por $\varphi(B) = T$, onde T é definida a partir de B como no Exercício 1. Mostre que φ é um isomorfismo (isto é, que φ é linear e bijetora).

Observação 1. Nas condições do Exercício 2, a aplicação:

$$\mathrm{L}(V, W; K) \ni B \longmapsto [B]_{\mathcal{E}\mathcal{F}} \in M_{m\times n}(K)$$

é um isomorfismo[2]. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n} \in M_{m\times n}(K)$, a única aplicação bilinear $B : V \times W \to K$ tal que $[B]_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = A$ é dada por:

$$B(v, w) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\pi_i(v)\rho_j(w), \quad v \in V,\ w \in W, \tag{1}$$

onde $\mathcal{E}^* = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$, $\mathcal{F}^* = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ denotam as bases duais a $\mathcal{E}$ e a $\mathcal{F}$, respectivamente. A igualdade (1) pode ser reescrita usando matrizes, da seguinte forma:

$$B(v, w) = \big([v]_{\mathcal{E}}\big)^{\mathrm{t}} A\,[w]_{\mathcal{F}},$$

onde identificamos $[v]_{\mathcal{E}}$ e $[w]_{\mathcal{F}}$ com matrizes coluna e $\big([v]_{\mathcal{E}}\big)^{\mathrm{t}}$ denota a transposta da matriz $[v]_{\mathcal{E}}$.

Exercício* 4. Demonstre as afirmações que aparecem na Observação 1. Para obter a fórmula (1) a partir de $[B]_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = A$, utilize a igualdade:

$$B(v, w) = B\Big(\sum_{i=1}^{m} \pi_i(v)e_i, \sum_{j=1}^{n} \rho_j(w)f_j\Big).$$

[2] Da mesma forma, a correspondência entre transformações lineares e as matrizes que as representam em bases fixadas é um isomorfismo.

Observação 2. O Exercício 1 pode ser generalizado trivialmente para o caso de uma aplicação bilinear $B : V \times W \to Z$ tomando valores num K-espaço vetorial Z qualquer; nesse caso, a aplicação linear T definida lá tomará valores em $\mathrm{L}(W, Z)$, em vez de $W^* = \mathrm{L}(W, K)$. O Exercício 3 pode ser generalizado de forma similar, nos dando um isomorfismo:

$$\varphi : \mathrm{L}(V, W; Z) \longrightarrow \mathrm{L}\big(V, \mathrm{L}(W, Z)\big).$$

A noção de matriz que representa uma aplicação bilinear tomando valores em K explicada no Exercício 2 pode ser generalizada também para aplicações bilineares tomando valores em Z, mas para isso precisamos de uma base em Z e a "matriz" que representa B será na verdade uma matriz tridimensional, i.e., uma matriz com três índices.