Primeira Lista

MAT0216 – Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Daniel Victor Tausk

23/02/2019

Exercício 1. Dada uma função $f : X \to Y$ e um subconjunto A de X, define-se a *imagem direta* de A por f como sendo o conjunto $f[A]$ formado por todos os elementos da forma $f(x)$ com $x \in A$, isto é:

$$f[A] = \big\{ f(x) : x \in A \big\}.$$

Dados $a, b > 0$, considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ representada pela matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Escreva uma fórmula para $T(x, y)$, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Se $C = \big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \big\}$ denota o círculo de raio unitário e centro na origem, descreva o conjunto $T[C]$.

Exercício 2. Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ vetores com $\vec{v} \neq 0$. Recorde que a *projeção ortogonal* de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$ é o único vetor da forma $\lambda\vec{v}$ (isto é, o único vetor paralelo a $\vec{v}$) tal que $\vec{w} - \lambda\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{v}$. A projeção ortogonal de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$ é denotada por $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$.

(a) Faça um desenho para entender quem é $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$.

(b) Encontre uma fórmula para $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$.

(c) Considere a função $\operatorname{proj}_{\vec{v}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que associa a cada $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ a sua projeção ortogonal sobre $\vec{v}$. Verifique que $\operatorname{proj}_{\vec{v}}$ é linear e escreva a matriz que representa $\operatorname{proj}_{\vec{v}}$ (note que as entradas dessa matriz vão depender das coordenadas $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\vec{v}$).

Exercício 3. Seja $r \subset \mathbb{R}^n$ uma reta passando por um ponto $A \in \mathbb{R}^n$ e com vetor diretor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq 0$, isto é:

$$r = \big\{ A + \lambda\vec{v} : \lambda \in \mathbb{R} \big\}.$$

Dado um ponto $P \in \mathbb{R}^n$, então a *projeção ortogonal* de P sobre r é o único ponto $Q \in r$ tal que $\overrightarrow{QP} = P - Q$ é ortogonal a $\vec{v}$. A projeção ortogonal de P sobre r é denotada por $\operatorname{proj}_r P$.

(a) Verifique que:

$$\operatorname{proj}_r P = A + \operatorname{proj}_{\vec{v}}(P - A).$$

(b) Considere a função $\operatorname{proj}_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que associa a cada $P \in \mathbb{R}^n$ a sua projeção ortogonal sobre r. Se r passa pela origem, note que $\operatorname{proj}_r = \operatorname{proj}_{\vec{v}}$ e conclua que proj_r é linear. Se r não passa pela origem, mostre que proj_r é afim, mas não é linear.

Exercício 4. Seja $r \subset \mathbb{R}^n$ uma reta e seja $P \in \mathbb{R}^n$ um ponto. A *reflexão* de P em relação a r é o ponto $P' \in \mathbb{R}^n$ tal que $\operatorname{proj}_r P$ é o ponto médio entre P e P'.

(a) Faça um desenho para entender quem é P'.

(b) Verifique que:
$$P' = 2(\operatorname{proj}_r P) - P.$$

(c) Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a função que associa a cada $P \in \mathbb{R}^n$ a sua reflexão P' em relação à r. Verifique que T é afim e que T é linear se, e somente se, r passa pela origem.

(d) Se $n = 2$ e r é a reta passando pela origem com vetor diretor $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ (isto é, r faz um ângulo θ com o eixo x), verifique que a matriz que representa T é:
$$\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \operatorname{sen}(2\theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

(e) Usando um produto matricial, verifique que se r e s são retas passando pela origem, então a composição da reflexão em r com a reflexão em s é uma rotação em torno da origem de ângulo 2α, em que α é o ângulo entre r e s.

Exercício 5. Vimos em aula que uma função $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é dita *afim* quando existem uma transformação linear $T_0 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e um vetor $w \in \mathbb{R}^n$ tais que
$$T(v) = T_0(v) + w,$$
para todo $v \in \mathbb{R}^m$. Como $T(0) = w$ e $T_0(v) = T(v) - T(0)$, segue que w e T_0 são unicamente determinados por T. Dizemos que T_0 é a *transformação linear subjacente* à transformação afim T.

(a) Verifique que uma translação é uma transformação afim cuja transformação linear subjacente é a transformação identidade.

(b) Verifique que uma rotação no plano $\mathbb{R}^2$ em torno de um ponto A é uma transformação afim cuja transformação linear subjacente é a rotação de mesmo ângulo em torno da origem.

(c) Verifique que a projeção ortogonal $\operatorname{proj}_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sobre uma reta $r \subset \mathbb{R}^n$ (recorde Exercício 3) é uma transformação afim cuja transformação linear subjacente é a projeção ortogonal sobre a reta r_0 que é paralela a r e passa pela origem.

(d) Verifique que se $r \subset \mathbb{R}^n$ é uma reta e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a reflexão em r (recorde Exercício 4) então T é afim e a transformação linear subjacente a T é a reflexão na reta r_0 que é paralela a r e passa pela origem.

(e) Se $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ são transformações afins com transformações lineares subjacentes $T_0 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $S_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, respectivamente, verifique que $S \circ T$ é uma transformação afim com transformação linear subjacente $S_0 \circ T_0$.

Exercício 6. Uma matriz quadrada M é dita *ortogonal* quando for inversível e sua inversa M^{-1} for igual à sua transposta M^{t} (equivalentemente, quando $M^{\mathrm{t}}M$ for igual à matriz identidade).

(a) Seja M uma matriz $n \times n$ e denote por $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ as suas colunas. Verifique que a entrada na linha i e coluna j da matriz $M^{\mathrm{t}}M$ é igual ao produto escalar $v_i \cdot v_j$. Conclua que M é ortogonal se, e somente se, suas colunas $v_1, \ldots, v_n$ satisfazem as condições:
- $\|v_i\| = 1$, para todo $i = 1, \ldots, n$;
- $v_i \cdot v_j = 0$, para todos $i, j = 1, \ldots, n$ com $i \neq j$.

(b) Mostre que as matrizes ortogonais 2×2 são precisamente as matrizes que podem ser escritas na forma

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

para algum $\theta \in \mathbb{R}$. A primeira dessas matrizes tem determinante igual a 1 e, como vimos em aula, ela representa a rotação de ângulo θ em torno da origem. A segunda tem determinante igual a -1 e, como vimos no item (d) do Exercício 4, ela representa a reflexão em relação a uma reta passando pela origem que faz um ângulo $\frac{\theta}{2}$ com o eixo x.

Sugestões

Exercício 2. (b) Ache $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(\vec{w} - \lambda\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$.

Exercício 3. (a) Note que se $Q = \mathrm{proj}_r\, P$, então $Q - A$ é paralelo a $\vec{v}$ e que $(P - A) - (Q - A)$ é ortogonal a $\vec{v}$.

Exercício 4. (b) O ponto médio entre P e P' é $\frac{1}{2}(P + P')$. (d) Você encontrou nos Exercícios 2 e 3 a matriz que representa a projeção proj_r. Note que T nada mais é que duas vezes proj_r menos a transformação identidade.

Respostas

Exercício 1. (a) $T(x, y) = (ax, by)$. (b) $T[C]$ é a elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

isto é, a elipse de centro na origem, eixos paralelos aos eixos coordenados e semi-eixos de comprimentos a e b.

Exercício 2. (b) A fórmula é:

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\, \vec{v} = \frac{w_1 v_1 + w_2 v_2 + \cdots + w_n v_n}{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}\, (v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

(c) A matriz é

$$\frac{1}{\|\vec{v}\|^2} \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 & \cdots & v_1 v_n \\ v_2 v_1 & v_2^2 & v_2 v_3 & \cdots & v_2 v_n \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & v_3^2 & \cdots & v_3 v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n v_1 & v_n v_2 & v_n v_3 & \cdots & v_n^2 \end{pmatrix},$$

isto é, a entrada da matriz na linha i e coluna j é $\frac{v_i v_j}{\|\vec{v}\|^2}$. Uma outra descrição interessante para essa matriz é $\frac{1}{\|\vec{v}\|^2}\, v v^{\mathrm{t}}$, em que v denota a matriz com uma única coluna contendo as coordenadas de $\vec{v}$.