Primeira Lista

MAT0206 – Análise Real
MAP0216 – Introdução à Análise Real

Prof. Daniel Victor Tausk
05/03/2012

Exercício 1. Se R é um anel, mostre que:

(a) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$, para todos $x, y \in R$;
(b) $(-x)(-y) = xy$, para todos $x, y \in R$.

Exercício 2. Seja K um corpo ordenado. Mostre que:

$$x \le y \text{ e } z \le w \Longrightarrow x + z \le y + w,$$

para todos $x, y, z, w \in K$. Mostre também que:

$$x \le y,\ z \le w,\ y \ge 0 \text{ e } z \ge 0 \Longrightarrow xz \le yw,$$

para todos $x, y, z, w \in K$.

O objetivo dos Exercícios 3 a 6 é o de estabelecer a equivalência entre duas abordagens diferentes para se falar de relação de ordem: a primeira (adotada como oficial no curso) em que $\le$ é primitivo e $<$ é definido a partir de $\le$ e a outra em que $<$ é primitivo e $\le$ é definido a partir de $<$.

Exercício 3. Se $\le$ é uma relação de ordem num conjunto X e se a relação binária $<$ em X é definida por:

$$x < y \Longleftrightarrow x \le y \text{ e } x \ne y, \quad x, y \in X,$$

mostre que as duas seguintes condições são satisfeitas:

(1) para todo $x \in X$, não é o caso que $x < x$ (anti-reflexividade);
(2) dados $x, y, z \in X$ se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$ (transitividade).

Verifique também que, dados $x, y \in X$, então:

$$x \le y \Longleftrightarrow x < y \text{ ou } x = y.$$

Exercício 4. Seja $<$ uma relação binária num conjunto X satisfazendo as condições (1) e (2) do enunciado do Exercício 3. Defina uma relação binária $\le$ em X fazendo:

$$x \le y \Longleftrightarrow x < y \text{ ou } x = y, \quad x, y \in X.$$

Mostre que $\le$ é uma relação de ordem em X. Verifique também que, dados $x, y \in X$, então:

$$x < y \Longleftrightarrow x \le y \text{ e } x \ne y.$$

Exercício 5. Seja $\leq$ uma relação de ordem num conjunto X e seja $<$ definida como no Exercício 3. Mostre que a relação de ordem $\leq$ é total se e somente se vale a seguinte condição:

- dados $x, y \in X$ então ou $x < y$, ou $y < x$ ou $x = y$.

Exercício 6. Seja $\leq$ uma relação de ordem num anel R e considere a relação $<$ definida como no Exercício 3. Mostre que as duas seguintes condições são equivalentes:

(1a) dados $x, y, z \in R$, se $x \leq y$ então $x + z \leq y + z$;
(1b) dados $x, y, z \in R$, se $x < y$ então $x + z < y + z$.

Suponha agora que R seja um corpo[1]. Mostre que as duas seguintes condições são equivalentes:

(2a) dados $x, y, z \in R$, se $x \leq y$ e $z \geq 0$ então $xz \leq yz$;
(2b) dados $x, y, z \in R$, se $x < y$ e $z > 0$ então $xz < yz$.

[1]Se supusermos apenas que R seja um anel, então a condição (2b) implica a condição (2a), mas não vale a recíproca. Você consegue pensar num contra-exemplo?

Lembrete das definições

Definição 1. Um *anel* é um conjunto R munido de duas operações binárias

$$R \times R \ni (x, y) \longmapsto x + y \in R, \quad R \times R \ni (x, y) \longmapsto xy \in R$$

satisfazendo as seguintes condições:

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$, para todos $x, y, z \in R$ (associatividade da soma);

(2) $x + y = y + x$, para todos $x, y \in R$ (comutatividade da soma);

(3) existe um elemento[2] $0 \in R$ tal que $x + 0 = 0 + x = x$, para todo $x \in R$ (propriedade do elemento neutro para soma);

(4) para todo $x \in R$ existe um elemento[3] $-x \in R$ tal que:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

(propriedade do elemento inverso para soma);

(5) $(xy)z = x(yz)$, para todos $x, y, z \in R$ (associatividade da multiplicação);

(6) $z(x + y) = zx + zy$ e $(x + y)z = xz + yz$, para todos $x, y, z \in R$ (distributividade).

Dizemos que o anel R é um *anel com unidade* se vale a condição:

(7) existe um elemento[4] $1 \in R$, $1 \neq 0$, tal que $x1 = 1x = x$, para todo $x \in R$ (propriedade do elemento neutro para multiplicação).

Dizemos que o anel R é um *anel comutativo* se vale a condição:

(8) $xy = yx$, para todos $x, y \in R$ (comutatividade da multiplicação).

Dizemos que o anel R é um *anel com divisão* se for um anel com unidade e se vale a condição:

(9) para todo $x \in R$ com $x \neq 0$, existe um elemento[5] $x^{-1} \in R$ tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ (propriedade do elemento inverso para multiplicação).

Definição 2. Um *corpo* é um anel com divisão comutativo, i.e., um conjunto munido de duas operações binárias satisfazendo todas as 9 propriedades que aparecem na Definição 1.

Dados elementos x, y de um anel, escrevemos $x - y$ para $x + (-y)$ e dados elementos x, y de um corpo, com $y \neq 0$, escrevemos $\frac{x}{y}$ ou x/y para xy^{-1}.

[2] Automaticamente único, como vimos em aula.

[3] Automaticamente único em vista da associatividade da soma, como vimos em aula.

[4] Automaticamente único, como vimos em aula.

[5] Automaticamente único em vista da associatividade da multiplicação, como vimos em aula.

Definição 3. Uma *relação de ordem* (ou *relação de ordem parcial*) num conjunto X é uma relação binária $\leq$ em X satisfazendo as seguintes condições:

(1) $x \leq x$, para todo $x \in X$ (reflexividade);
(2) dados $x, y \in X$, se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$ (anti-simetria);
(3) dados $x, y, z \in X$, se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$ (transitividade).

A relação de ordem $\leq$ é dita *total* se satisfaz a seguinte condição:

(4) para todos $x, y \in X$, $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Dada uma relação de ordem $\leq$ num conjunto X, escrevemos $x \geq y$ se $y \leq x$, $x < y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$; escrevemos também $x > y$ se $y < x$.

Definição 4. Um *corpo ordenado* é um corpo K munido de uma relação de ordem total $\leq$ satisfazendo as seguintes condições:

(1) dados $x, y, z \in K$, se $x \leq y$ então $x + z \leq y + z$ (compatibilidade da ordem com a soma);
(2) dados $x, y, z \in K$, se $x \leq y$ e $z \geq 0$ então $xz \leq yz$ (compatibilidade da ordem com a multiplicação).

Observação. É também importante (embora não será considerado nesse curso) o conceito de *anel comutativo ordenado*: trata-se de um anel comutativo, munido de uma relação de ordem total, compatível com a soma e com a multiplicação. Quando remove-se a hipótese de que a ordem seja total, obtêm-se o conceito de anel comutativo *parcialmente* ordenado.