Primeira Lista

MAT0121 – Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Daniel Victor Tausk

11/08/2018

Exercício 1. Considere as funções $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^4$, para todo $x \geq 0$. Determine a área da região limitada do semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ determinada pelos gráficos das funções f e g.

Exercício 2. Sejam a e b números reais positivos. Determine a área de uma elipse cujos semi-eixos são a e b.

Exercício 3. Para cada $t > 0$, considere o segmento de reta S_t em $\mathbb{R}^2$ cujas extremidades são $\left(0, \frac{1}{t}\right)$ e $\left(t, \frac{1}{t}\right)$. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ a região do plano dada pela união dos segmentos S_t, com $1 \leq t \leq 2$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno do eixo y.

Exercício 4. Considere o sólido $B \subset \mathbb{R}^3$ que fica entre os planos $z = 0$ e $z = 1$ e tal que, para todo $t \in [0, 1]$, a interseção de B com o plano $z = t$ é o triângulo de vértices $(1, 0, t)$, $(1, t, t)$ e $(1 + e^t, 1, t)$. Determine o volume de B.

Exercício 5. Seja $a > 0$ e considere uma função $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$. Suponha que a integral de Riemann $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ exista.

(a) Use uma substituição da variáveis para mostrar que:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Recorde que f é dita *par* se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in [-a, a]$ e que f é dita *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in [-a, a]$. Conclua que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

se f for par e que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

se f for ímpar.

Exercício 6 (coeficientes de Fourier)**.**

(a) Para quaisquer inteiros positivos k e l, verifique que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(lx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & \text{se } k = l, \\ 0, & \text{se } k \neq l. \end{cases}$$

(b) Para quaisquer inteiros k e l, verifique que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

(c) Para qualquer inteiro positivo k, verifique que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

(d) Seja $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função dada por

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)\big),$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$, em que a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ e b_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ são números reais fixados. Mostre que

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)\,\mathrm{d}x,$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Exercício 7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e suponha que $p \in \mathbb{R}$ seja um *período* para f, isto é, que $f(x + p) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Supondo que a integral de Riemann $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ exista para certos $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que

$$\int_{a+np}^{b+np} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

para todo inteiro n.

(b) Supondo que a integral de Riemann $\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x$ exista, mostre que

$$\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x,$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. (Sugestão: note que a integral $\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x$ é igual a $\int_a^p f(x)\,\mathrm{d}x + \int_p^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x$ e use o resultado do item (a).)

(c) Conclua que as fórmulas que aparecem no Exercício 6 continuam válidas se substituirmos o intervalo $[-\pi, \pi]$ por qualquer outro intervalo de comprimento 2π.

Respostas

Exercício 1. $\int_0^1 \left(x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{15}$.

Exercício 2. $2\int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, \mathrm{d}x = \pi ab$.

Exercício 3. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\pi}{y^2}\, \mathrm{d}y = \pi$.

Exercício 4. $\int_0^1 \frac{1}{2} t e^t\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.