Primeira Lista

MAT0112 – Vetores e Geometria

Prof. Daniel Victor Tausk
24/03/2018

Exercício 1. Seja $\mathcal{B}$ uma base de V^3. Determine os valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para os quais o par de vetores

$$\vec{v} = (2,3,1)_{\mathcal{B}}, \quad \vec{w} = (6,a,b)_{\mathcal{B}}$$

seja linearmente dependente.

Exercício 2. Seja $\mathcal{B}$ uma base de V^3. Determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais a tripla de vetores

$$\vec{v} = (1,1,0)_{\mathcal{B}}, \quad \vec{w} = (a,1,1)_{\mathcal{B}}, \quad \vec{z} = (2,a,1)_{\mathcal{B}}$$

seja linearmente independente.

Exercício 3. Seja $\mathcal{B}$ uma base de V^3. Verifique que

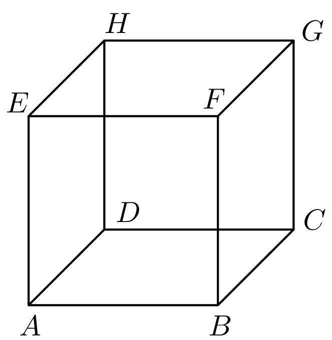
$$\mathcal{C} = \big\{(1,1,1)_{\mathcal{B}}, (-1,2,1)_{\mathcal{B}}, (1,0,1)_{\mathcal{B}}\big\}$$

é uma base de V^3 e encontre as coordenadas na base $\mathcal{C}$ do vetor $\vec{v} = (2,4,4)_{\mathcal{B}}$.

Exercício 4. Descreva o conjunto de todas as soluções $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ do sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x + y - z = 2, \\ 4x + 3y + z = 8. \end{cases}$$

Exercício 5. Considere no espaço E^3 um cubo cujos vértices são A, B, C, D, E, F, G, H, em que $ABCD$, $ADHE$ e $ABFE$ são faces desse cubo, como ilustrado na figura abaixo:



Considere a base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{FD}\}$ de V^3. Encontre as coordenadas na base $\mathcal{B}$ do vetor $\overrightarrow{BM}$, em que M denota o ponto médio do segmento GH.

Exercício 6. [não serão cobradas demonstrações na prova!] Considere uma sequência de vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V^3$. Mostre que:

(a) se $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ for linearmente dependente para algum $k \leq n$, então $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ será linearmente dependente;

(b) se $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ for linearmente independente, então $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ será linearmente independente, para todo $k \leq n$;

(c) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ será linearmente dependente se, e somente se, algum $\vec{v}_i$ for combinação linear dos outros $\vec{v}_j$, $j \neq i$;

(d) se $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$ for linearmente independente, então $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ será linearmente dependente se, e somente se, $\vec{v}_n$ for combinação linear de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$.

Exercício 7. Seja $\mathcal{B}$ uma base de V^3 e sejam:

$$\vec{v}_1 = (3, 1, 2)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = (-1, 0, 2)_{\mathcal{B}}.$$

Encontre $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(x, y, z)_{\mathcal{B}} \text{ é combinação linear de } \vec{v}_1 \text{ e } \vec{v}_2 \iff ax + by + cz = 0,$$

para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Exercício 8. Sejam dados pontos $O, A, B \in E^3$ e seja M o ponto médio do segmento AB. Escreva o vetor $\overrightarrow{OM}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Exercício 9. Sejam $A, B, C \in E^3$ os vértices de um triângulo (isto é, A, B e C são pontos não colineares). Sejam N e P os pontos médios dos segmentos BC e AC, respectivamente.

(a) Escreva $\overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{BP}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

(b) Se X denota o ponto de encontro dos segmentos AN e BP (X é portanto o *baricentro* do triângulo ABC), encontre $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AN} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{BX} = \mu \overrightarrow{BP}.$$

(Sugestão para o item (b): use o resultado do item (a) e a igualdade $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BX} = \overrightarrow{AX}$.)

Exercício 10. Sejam $A, B, C \in E^3$ os vértices de um triângulo e seja X o baricentro desse triângulo (veja Exercício 9). Se $O \in E^3$ é um ponto qualquer, escreva $\overrightarrow{OX}$ como combinação linear de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

Exercício 11. Sejam $A, B, C \in E^3$ os vértices de um triângulo, N o ponto do segmento BC tal que $d(B, N) = \frac{1}{4} d(B, C)$ e P o ponto do segmento AC tal que $d(P, C) = \frac{1}{3} d(A, C)$. Se X denota o ponto de encontro dos segmentos AN e BP, encontre $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AN} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{BX} = \mu \overrightarrow{BP}.$$

Exercício 12. Dados pontos $P_1, P_2, \dots, P_n \in E^3$ e números reais positivos $m_1, m_2, \dots, m_n > 0$, define-se o *centro de massa* $C \in E^3$ dos pontos dados $P_1, \dots, P_n$ com respectivas massas $m_1, \dots, m_n$ assim: escolhe-se um ponto qualquer $O \in E^3$ e define-se:

$$C = O + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i(P_i - O), \tag{1}$$

em que $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ é a *massa total*. Verifique que a expressão do lado direito da igualdade em (1) é independente da escolha do ponto O (isso significa que a noção de centro de massa está bem definida).

Respostas

Exercício 1. $a = 9$ e $b = 3$.

Exercício 2. $a \neq \frac{3}{2}$.

Exercício 3. $[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = (2, 1, 1)$.

Exercício 4. $\big\{(2z - 1, 4 - 3z, z) : z \in \mathbb{R}\big\}$.

Exercício 5. $\big(-\frac{7}{2}, 2, -1\big)$.

Exercício 7. $a = 2$, $b = -8$ e $c = 1$.

Exercício 8. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

Exercício 9. (a) $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
(b) $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$.

Exercício 10. $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

Exercício 11. $\lambda = \frac{8}{9}$ e $\mu = \frac{1}{3}$.