Lista Zero

MAT0311 – Cálculo Diferencial e Integral V

Prof. Daniel Victor Tausk

03/08/2013

Recordamos as seguintes definições vistas em aula.

Definição 1. Se V é um espaço vetorial real, então um *produto interno* em V é uma aplicação $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

(1) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$, para todos $x_1, x_2, y \in V$;
(2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, para todos $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in V$;
(3) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, para todos $x, y \in V$;
(4) $\langle x, x\rangle > 0$, para todo $x \in V$ não nulo.

Se V é um espaço vetorial complexo, então um *produto interno* em V é uma aplicação $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ satisfazendo as seguintes condições:

(1) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$, para todos $x_1, x_2, y \in V$;
(2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, para todos $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in V$;
(3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, para todos $x, y \in V$;
(4) $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$ e $\langle x, x\rangle > 0$, para todo $x \in V$ não nulo.

Definição 2. Se V é um espaço vetorial real ou complexo então uma *norma* em V é uma aplicação $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

(1) $\|x\| > 0$, para todo $x \in V$ não nulo;
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$, para todo $x \in V$ e todo escalar λ (real ou complexo);
(3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$, para todos $x, y \in V$.

Se a condição (1) é substituída por:

(1') $\|x\| \ge 0$, para todo $x \in V$,

dizemos que $\|\cdot\|$ é uma *semi-norma*.

Definição 3. Se M é um conjunto então uma *métrica* em M é uma aplicação $d : M \times M \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

(1) $d(x, y) > 0$, para todos $x, y \in M$ com $x \ne y$;
(2) $d(x, x) = 0$, para todo $x \in M$;
(3) $d(x, y) = d(y, x)$, para todos $x, y \in M$;
(4) $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$, para todos $x, y, z \in M$.

Se a condição (1) é substituída por:

(1') $d(x, y) \ge 0$, para todos $x, y \in M$,

dizemos que d é uma *pseudo-métrica*.

Exercício 1. Verifique que o *produto interno canônico* de $\mathbb{R}^n$, definido por:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

é de fato um produto interno em $\mathbb{R}^n$. Similarmente, verifique que o *produto interno canônico* de $\mathbb{C}^n$ (entendido como espaço vetorial complexo), definido por:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}, \quad x, y \in \mathbb{C}^n,$$

é de fato um produto interno em $\mathbb{C}^n$.

Exercício 2. Dado um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ num espaço vetorial real ou complexo V, mostre que a *norma em V associada* a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definida por:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad x \in V,$$

é de fato uma norma em V. (Você vai precisar usar a desigualdade de Cauchy–Schwarz!)

Exercício 3. Dada uma norma $\|\cdot\|$ num espaço vetorial real ou complexo V, mostre que a *métrica em V associada* a $\|\cdot\|$, definida por:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in V,$$

é de fato uma métrica em V. Note que se $\|\cdot\|$ é apenas uma semi-norma então d é apenas uma pseudo-métrica.