Lista Zero

MAT0111 – Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Daniel Victor Tausk

09/03/2013

Recorde que a *derivada* de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no ponto $t \in \mathbb{R}$, denotada por $f'(t)$, é definida por:

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

desde que o limite exista. Resolva os exercícios abaixo usando a noção intuitiva de limite discutida em aula. A definição rigorosa de limite e os teoremas relevantes (que poderão ser usados para justificar corretamente as resoluções dos exercícios abaixo) serão dados a partir da aula do dia 11/03.

Exercício 1. Sejam $a, v_0, s_0 \in \mathbb{R}$ e considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(t) = \frac{1}{2}\,at^2 + v_0 t + s_0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Verifique que $f'(t) = v_0 + at$, para todo $t \in \mathbb{R}$. (Temos então que $s = f(t)$ é a equação horária de um movimento uniformemente acelerado, com aceleração constante igual a a, velocidade inicial v_0 e posição inicial s_0.)

Exercício 2. Dado um inteiro positivo n, considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine $f'(x)$. Você pode usar a *fórmula do binômio*:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n.$$

Exercício 3. Considere as funções $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right), \quad g(x) = x \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ com $x \neq 0$. Convença-se de que os esboços dos gráficos dessas funções são aquilo que foi apresentado na aula. (No caso da função g, concentre-se apenas no comportamento da função para x perto de zero. Ainda é cedo para você saber o que acontece para x grande.) Convença-se, usando esses esboços de gráfico, que $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe, enquanto que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.