LEMA SOBRE CLASSES COMPACTAS

DANIEL V. TAUSK

(demonstração sugerida por Vinicius O. Rodrigues)

Recorde que uma coleção de conjuntos $\mathcal{C}$ é dita uma *classe compacta* se, dada uma sequência $(C_n)_{n\ge1}$ em $\mathcal{C}$ com $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$, então existe $N \ge 1$ tal que $\bigcap_{n=1}^{N} C_n = \emptyset$.

1. **Lema.** *Se $\mathcal{C}$ é uma classe compacta, então a coleção $\tilde{\mathcal{C}}$ formada por todas as uniões finitas de elementos de $\mathcal{C}$ é uma classe compacta.*

Demonstração. Seja $(\tilde{C}_n)_{n\ge1}$ uma sequência em $\tilde{\mathcal{C}}$ com $\bigcap_{n=1}^{N} \tilde{C}_n \ne \emptyset$, para todo $N \ge 1$. Vamos mostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \ne \emptyset$. Para cada $n \ge 1$, escrevemos:

$$\tilde{C}_n = \bigcup_{i=1}^{p_n} C_n^i,$$

com cada C_n^i em $\mathcal{C}$ e $p_n \ge 1$. Dado $N \ge 1$, denote por Γ^N o conjunto das funções φ com domínio $\{1,\ldots,N\}$ tais que $\varphi(n) \in \{1,\ldots,p_n\}$ para todo $n = 1,\ldots,N$ e:

$$\bigcap_{n=1}^{N} C_n^{\varphi(n)} \ne \emptyset.$$

Do fato que $\bigcap_{n=1}^{N} \tilde{C}_n \ne \emptyset$ segue que Γ^N é não vazio e portanto o conjunto

$$\Gamma = \bigcup_{N=1}^{\infty} \Gamma^N$$

é infinito. Note também que para $1 \le M \le N$, a restrição a $\{1,\ldots,M\}$ de um elemento de Γ^N está em Γ^M. Dados $N \ge 1$ e uma função φ com domínio $\{1,\ldots,N\}$, escrevemos

$$\Gamma(\varphi) = \big\{\psi \in \Gamma : \psi \text{ estende } \varphi\big\}$$

e:

$$\overline{\Gamma} = \big\{\varphi \in \Gamma : \Gamma(\varphi) \text{ é infinito}\big\}.$$

Vamos construir por recursão uma sequência $(\varphi_N)_{N\ge1}$ em $\overline{\Gamma}$ de modo que φ_N tenha domínio $\{1,\ldots,N\}$ e φ_{N+1} estenda φ_N, para todo $N \ge 1$. Primeiramente, obtemos $\varphi_1 \in \overline{\Gamma}$ com domínio $\{1\}$. Considere a aplicação

$$\mathcal{E} : \Gamma \ni \varphi \longmapsto \varphi(1) \in \{1,\ldots,p_1\}.$$

Date: 03 de abril de 2018.

Como o domínio de $\mathcal{E}$ é infinito e seu contra-domínio é finito, existe m em $\{1, \ldots, p_1\}$ tal que $\mathcal{E}^{-1}(m)$ é infinito. Segue daí que a função φ_1 com domínio $\{1\}$ tal que $\varphi_1(1) = m$ está em $\overline{\Gamma}$. Suponha agora $\varphi_N \in \overline{\Gamma}$ com domínio $\{1, \ldots, N\}$ dada e vamos obter φ_{N+1} em $\overline{\Gamma}$ com domínio $\{1, \ldots, N+1\}$ que estende φ_N. Considere a aplicação

$$\mathcal{E} : \Gamma(\varphi_N) \setminus \{\varphi_N\} \ni \varphi \longmapsto \varphi(N+1) \in \{1, \ldots, p_{N+1}\}.$$

Novamente, como o domínio de $\mathcal{E}$ é infinito e seu contra-domínio é finito, existe $m \in \{1, \ldots, p_{N+1}\}$ tal que $\mathcal{E}^{-1}(m)$ é infinito. Tomando φ_{N+1} como sendo a extensão de φ_N com $\varphi_{N+1}(N+1) = m$, temos então que φ_{N+1} está em $\overline{\Gamma}$. Seja agora φ a função definida no conjunto dos inteiros positivos que é uma extensão comum de φ_N, para todo $N \geq 1$. Vale então que:

$$\bigcap_{n=1}^{N} C_n^{\varphi(n)} \neq \emptyset,$$

para todo $N \geq 1$ e, como $\mathcal{C}$ é uma classe compacta, segue que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n^{\varphi(n)} \neq \emptyset. \qquad \square$$