ÁLGEBRAS DE HEYTING

DANIEL V. TAUSK

Recorde que um *conjunto parcialmente ordenado* é um conjunto P munido de uma relação binária $\leq$ que é reflexiva (i.e., $x \leq x$, para todo $x \in P$), anti-simétrica (i.e., $x, y \in P$, $x \leq y$ e $y \leq x$ implicam $x = y$) e transitiva (i.e., $x, y, z \in P$, $x \leq y$ e $y \leq z$ implicam $x \leq z$). Dado um subconjunto A de P, então o seu *supremo* $\sup A$ é, se existir, a menor cota superior de A (i.e., $a \leq \sup A$ para todo $a \in A$ e, para todo $x \in P$, se $a \leq x$ para todo $a \in A$ então $\sup A \leq x$). Similarmente, o seu *ínfimo* $\inf A$ é, se existir, a maior cota inferior de A (i.e., $\inf A \leq a$ para todo $a \in A$ e, para todo $x \in P$, se $x \leq a$ para todo $a \in A$ então $x \leq \inf A$).

1. **Definição.** Dizemos que um conjunto parcialmente ordenado P é um *reticulado* se para todos $x, y \in P$ o conjunto $\{x, y\}$ possui supremo e ínfimo; escrevemos:

$$x \wedge y = \inf\{x, y\}, \quad x \vee y = \sup\{x, y\},$$

para todos $x, y \in P$.

Obviamente, $\wedge$ e $\vee$ são operações binárias comutativas em P. É fácil ver também que essas operações são associativas e que:

$$(x \wedge y) \wedge z = \inf\{x, y, z\} = x \wedge (y \wedge z), \quad (x \vee y) \vee z = \sup\{x, y, z\} = x \vee (y \vee z),$$

para todos $x, y, z \in P$. Note também que:

$$x \leq y \Longleftrightarrow x = x \wedge y \Longleftrightarrow y = x \vee y,$$

para todos $x, y \in P$.

2. **Lema.** *Seja P um reticulado. Se $x_1, y_1, x_2, y_2 \in P$ são tais que $x_1 \leq y_1$ e $x_2 \leq y_2$ então $x_1 \wedge x_2 \leq y_1 \wedge y_2$ e $x_1 \vee x_2 \leq y_1 \vee y_2$.*

Demonstração. Temos $x_1 \wedge x_2 \leq x_1 \leq y_1$ e $x_1 \wedge x_2 \leq x_2 \leq y_2$, donde $x_1 \wedge x_2 \leq y_1 \wedge y_2$. A prova de $x_1 \vee x_2 \leq y_1 \vee y_2$ é análoga. □

3. **Lema.** *Seja P um reticulado. As seguintes condições são equivalentes:*
   (a) *$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, para todos $x, y, z \in P$;*
   (b) *$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, para todos $x, y, z \in P$.*

Demonstração. Provaremos que (a) implica (b). A recíproca é provada de modo análogo, trocando $\wedge$ por $\vee$ ao longo da demonstração e fazendo as

Date: 20 de abril de 2011.

adaptações óbvias[1]. Segue de (a) que:

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z].$$

Como $x \leq x \vee y$, temos $(x \vee y) \wedge x = x$. Usando novamente (a) para obter $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$, concluímos que:

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)].$$

Usando a associatividade de $\vee$ e o fato que $x \vee (x \wedge z) = x$ obtemos (b). $\square$

4. **Definição.** Um reticulado P é dito *distributivo* se satisfaz as condições equivalentes (a), (b) do enunciado do Lema 3.

5. **Definição.** Um reticulado P é dito *limitado* se possui um menor elemento $0 \in P$ (i.e., $0 \leq x$, para todo $x \in P$) e um maior elemento $1 \in P$ (i.e., $x \leq 1$, para todo $x \in P$). Se P é um reticulado limitado, então um *complemento* para um elemento $x \in P$ é um elemento $y \in P$ tal que $x \wedge y = 0$ e $x \vee y = 1$. O reticulado é dito *complementado* se todo elemento possui um complemento.

6. **Lema.** *Se P é um reticulado distributivo e limitado então cada elemento possui no máximo um complemento.*

Demonstração. Seja $x \in P$ e sejam $y_1, y_2 \in P$ complementos para x. Daí:

$$(x \vee y_1) \wedge y_2 = 1 \wedge y_2 = y_2,$$

e, usando a distributividade, obtemos:

$$(x \vee y_1) \wedge y_2 = (x \wedge y_2) \vee (y_1 \wedge y_2) = 0 \vee (y_1 \wedge y_2) = y_1 \wedge y_2.$$

Daí $y_1 \wedge y_2 = y_2$, donde $y_2 \leq y_1$. Similarmente, $y_1 \leq y_2$, donde $y_1 = y_2$. $\square$

7. **Definição.** Um reticulado limitado, distributivo e complementado é dito uma *álgebra de Boole*. O único complemento de um elemento x é denotado por x'.

8. **Definição.** Seja P um reticulado limitado. Dizemos que P é uma *álgebra de Heyting* se para todos $x, y \in P$ o conjunto:

$$\big\{z \in P : z \wedge x \leq y\big\} \tag{1}$$

possui um maior elemento, i.e., se existe $z \in P$ tal que $z \wedge x \leq y$ e tal que, para todo $t \in P$, se $t \wedge x \leq y$ então $t \leq z$.

O maior elemento do conjunto (1) é obviamente único se existir e é denotado por $x \to y$. Se P é uma álgebra de Heyting, observe que:

$$z \wedge x \leq y \Longleftrightarrow z \leq x \to y,$$

[1] Alternativamente, note que se trocamos a ordem $\leq$ de P pela *ordem oposta* $\leq^{\text{op}}$ definida por $x \leq^{\text{op}} y \Leftrightarrow y \leq x$ então obtemos um novo reticulado em que os papéis de $\wedge$ e $\vee$ são trocados. Podemos então obter que (b) implica (a) usando o fato que (a) implica (b) para o reticulado $(P, \leq^{\text{op}})$.

para todos $x, y, z \in P$. De fato, se $z \wedge x \leq y$ então z pertence a (1) e é portanto menor ou igual a $x \to y$. Por outro lado, se $z \leq x \to y$ então:

$$z \wedge x \leq (x \to y) \wedge x \leq y.$$

Note também que:

$$x \to y = 1 \Longleftrightarrow x \leq y,$$

para todos $x, y \in P$.

9. **Lema.** *Uma álgebra de Heyting é um reticulado distributivo.*

Demonstração. Vamos provar a condição (a) no enunciado do Lema 3. Para todo $t \in P$, temos:

$$\begin{aligned} x \wedge (y \vee z) \leq t \Longleftrightarrow y \vee z \leq x \to t \Longleftrightarrow y \leq x \to t \text{ e } z \leq x \to t \\ \Longleftrightarrow x \wedge y \leq t \text{ e } x \wedge z \leq t \Longleftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq t. \end{aligned}$$

A conclusão é obtida tomando $t = x \wedge (y \vee z)$ e $t = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. □

10. **Definição.** Dada uma álgebra de Heyting P, então o *pseudo-complemento* de um elemento $x \in P$ é definido por:

$$x' = x \to 0.$$

Como $z \wedge x \leq 0$ é o mesmo que $z \wedge x = 0$, temos que o pseudo-complemento x' de x é o maior $z \in P$ tal que $z \wedge x = 0$. Notamos que:

$$z \wedge x = 0 \Longleftrightarrow z \leq x',$$

para todos $z, x \in P$. De fato, se $z \wedge x = 0$ então $z \leq x'$, já que x' é o maior elemento do conjunto $\big\{z \in P : z \wedge x = 0\big\}$. Por outro lado, se $z \leq x'$ então:

$$z \wedge x \leq x' \wedge x = 0,$$

donde $z \wedge x = 0$. Obviamente, temos:

$$0' = 1, \quad 1' = 0.$$

Note que o pseudo-complemento x' de x *pode não ser um complemento de* x: de fato, temos $x' \wedge x = 0$, mas não necessariamente $x' \vee x = 1$, como mostra o seguinte exemplo.

11. **Exemplo.** Seja X um espaço topológico e seja P o conjunto de todos os abertos de X (i.e., a topologia de X) parcialmente ordenado por inclusão. É fácil ver que P é um reticulado, sendo que a operação $\vee$ é a união e a operação $\wedge$ é a interseção. Além do mais, P é um reticulado limitado, sendo $0 = \emptyset$ e $1 = X$. Afirmamos que P é uma álgebra de Heyting: de fato, dados $U, V \in P$, então para todo $W \in P$ temos $W \cap U \subset V$ se e somente se $W \subset U^{\mathrm{c}} \cup V$, onde $U^{\mathrm{c}} = X \setminus U$. Daí o maior elemento $W \in P$ tal que $W \cap U \subset V$ é precisamente o interior de $U^{\mathrm{c}} \cup V$, i.e.:

$$U \to V = \mathrm{int}(U^{\mathrm{c}} \cup V),$$

onde $\mathrm{int}(\cdot)$ denota o interior de um conjunto. O pseudo-complemento U' de um aberto U é:

$$U' = \mathrm{int}(U^{\mathrm{c}}) = \overline{U}^{\,\mathrm{c}},$$

onde $\overline{U}$ denota o fecho de U. Note que $U \cup U'$ é precisamente o complementar da fronteira de U e portanto $U \cup U' = X$ (i.e., U' é um complemento de U) se e somente se o aberto U é também fechado.

12. **Lema.** *Se P é uma álgebra de Heyting e um certo $x \in P$ admite um complemento então esse complemento é igual ao pseudo-complemento x'.*

Demonstração. Se y é um complemento de x então $y \wedge x = 0$, donde $y \leq x'$. Além do mais, temos:

$$(x \vee y) \wedge x' = 1 \wedge x' = x',$$

e usando a distributividade obtemos:

$$(x \vee y) \wedge x' = (x \wedge x') \vee (y \wedge x') = 0 \vee (y \wedge x') = y \wedge x',$$

donde $y \wedge x' = x'$ e $x' \leq y$. □

13. **Lema.** *Toda álgebra de Boole é uma álgebra de Heyting e $x \to y = x' \vee y$, onde x' denota o (único) complemento de x na álgebra de Boole.*

Demonstração. Seja P uma álgebra de Boole e sejam $x, y \in P$. Devemos mostrar que $x' \vee y$ é o maior $z \in P$ tal que $z \wedge x \leq y$. Se $z \wedge x \leq y$, temos:

$$z = z \wedge 1 = z \wedge (x \vee x') = (z \wedge x) \vee (z \wedge x') \leq y \vee x'.$$

Além do mais, temos:

$$(x' \vee y) \wedge x = (x' \wedge x) \vee (y \wedge x) = y \wedge x \leq y.$$

Isso completa a demonstração. □

Segue do Lema 13 (e também do Lema 12) que numa álgebra de Boole o pseudo-complemento de um elemento x (definido por $x \to 0$) coincide com o seu complemento.

14. **Lema.** *Seja P uma álgebra de Heyting. Dados $x, y \in P$, se $x \leq y$ então $y' \leq x'$.*

Demonstração. Temos $y' \wedge x \leq y' \wedge y = 0$. Como x' é o maior $z \in P$ tal que $z \wedge x = 0$, temos $y' \leq x'$. □

15. **Lema.** *Seja P uma álgebra de Heyting. Dados $x, y \in P$, então:*

$$(x \vee y)' = x' \wedge y'.$$

Demonstração. Para todo $z \in P$, temos:

$$\begin{aligned} z \wedge (x \vee y) = 0 &\iff (z \wedge x) \vee (z \wedge y) = 0 \iff z \wedge x = 0 \text{ e } z \wedge y = 0 \\ &\iff z \leq x' \text{ e } z \leq y' \iff z \leq x' \wedge y'. \end{aligned}$$

Daí $x' \wedge y'$ é o maior $z \in P$ tal que $z \wedge (x \vee y) = 0$. □

16. **Lema.** *Seja P uma álgebra de Heyting. Dados $x, y \in P$, então:*

$$x' \vee y' \leq (x \wedge y)'. \tag{2}$$

Demonstração. Temos:

$(x' \vee y') \wedge (x \wedge y) = [x' \wedge (x \wedge y)] \vee [y' \wedge (x \wedge y)] = [(x' \wedge x) \wedge y] \vee [(y' \wedge y) \wedge x] = 0.$

Como $(x \wedge y)'$ é o maior $z \in P$ tal que $z \wedge (x \wedge y) = 0$, a conclusão segue. □

17. **Exemplo.** Se P é a álgebra de Heyting de abertos de um espaço topológico (Exemplo 11) então, dados $U, V \in P$, a igualdade:

$$U' \cup V' = (U \cap V)'$$

é equivalente a:

$$\overline{U} \cap \overline{V} = \overline{U \cap V}.$$

Mas essa igualdade não vale em geral (por exemplo, considere os abertos $U =]-\infty, 0[$, $V =]0, +\infty[$ na reta real). Assim, a igualdade em (2) não vale em geral.

18. **Lema.** *Se P é uma álgebra de Heyting então $x \leq x''$, para todo $x \in P$. Além do mais, P é uma álgebra de Boole se e somente se $x'' = x$, para todo $x \in P$.*

Demonstração. Se P é uma álgebra de Heyting então, como $x \wedge x' = 0$ e x'' é o maior $z \in P$ tal que $z \wedge x' = 0$, temos que $x \leq x''$. Se P é uma álgebra de Boole então, como x é um complemento de x', temos que x deve ser igual a x'' (que é o único complemento de x'). Reciprocamente, suponha que P é uma álgebra de Heyting e que $x'' = x$, para todo $x \in P$. Como P é um reticulado limitado e distributivo, para mostrar que P é uma álgebra de Boole é suficiente mostrar que P é complementado. Vamos mostrar que o pseudo-complemento x' é o complemento de um elemento $x \in P$. Como $x \wedge x' = 0$, basta mostrar que $x \vee x' = 1$. Em vista do Lema 15, temos:

$$(x \vee x')' = x' \wedge x'' = 0.$$

Logo $x \vee x' = (x \vee x')'' = 0' = 1$. □

19. **Lema.** *Se P é uma álgebra de Heyting então $x''' = x'$, para todo $x \in P$.*

Demonstração. Em vista do Lema 18, $y \leq y''$ para $y = x'$, ou seja, $x' \leq x'''$. Além do mais, usando $x \leq x''$ e o Lema 14, obtemos $x''' \leq x'$. □

20. **Lema.** *Seja P uma álgebra de Heyting. Dados $x, y \in P$ então:*

$$x' \leq x \to y, \quad y \leq x \to y.$$

Demonstração. Como $x' \wedge x = 0 \leq y$ e $x \to y$ é o maior $z \in P$ tal que $z \wedge x \leq y$, segue que $x' \leq x \to y$. Similarmente, como $y \wedge x \leq y$, segue que $y \leq x \to y$. □

21. **Lema.** *Seja P uma álgebra de Heyting. Dados $x, y \in P$ então:*

$$x \to y \leq y' \to x'.$$

Demonstração. Como $y' \to x'$ é o maior $z \in P$ tal que $z \wedge y' \leq x'$, é suficiente mostrar que $z = x \to y$ satisfaz essa condição. Temos:

$$[(x \to y) \wedge y'] \wedge x = [(x \to y) \wedge x] \wedge y' \leq y \wedge y' = 0,$$

donde segue que $(x \to y) \wedge y' \leq x'$. □

22. **Lema.** *Seja P uma álgebra de Heyting. Dados $x, y \in P$, então:*

(a) $(x \wedge y)' = x \to y'$;
(b) $(x \to y)' = x'' \wedge y'$;
(c) $(x \wedge y)'' = x'' \wedge y''$;
(d) $(x \to y)'' = x'' \to y''$.

Demonstração. Começamos provando (a). Dado $z \in P$, temos:

$$z \wedge (x \wedge y) = 0 \iff (z \wedge x) \wedge y = 0 \iff z \wedge x \leq y' \iff z \leq x \to y',$$

o que prova que $x \to y'$ é o maior $z \in P$ tal que $z \wedge (x \wedge y) = 0$. Vamos agora mostrar (b). Em primeiro lugar, vamos mostrar que se $z \wedge (x \to y) = 0$ então $z \leq x'' \wedge y'$. De fato, usando o Lema 20 obtemos:

$$z \wedge x' \leq z \wedge (x \to y) = 0, \quad z \wedge y \leq z \wedge (x \to y) = 0,$$

donde segue que $z \leq x''$, $z \leq y'$ e portanto $z \leq x'' \wedge y'$. Para completar a prova de (b), devemos verificar que $(x'' \wedge y') \wedge (x \to y) = 0$. Usando o Lema 21, obtemos:

$$(x'' \wedge y') \wedge (x \to y) \leq (x'' \wedge y') \wedge (y' \to x') = x'' \wedge [y' \wedge (y' \to x')] \leq x'' \wedge x' = 0.$$

A afirmação (c) segue de (a) e (b):

$$(x \wedge y)'' = (x \to y')' = x'' \wedge y''.$$

Finalmente, provemos (d). Note que para todo $z \in P$, temos:

$$z \wedge x'' \leq y'' \iff (z \wedge x'') \wedge y' = 0 \iff z \wedge (x \to y)' = 0 \iff z \leq (x \to y)'',$$

onde na segunda equivalência usamos o item (b). Temos então que $(x \to y)''$ é o maior $z \in P$ tal que $z \wedge x'' \leq y''$. □

23. **Lema.** *Seja P uma álgebra de Heyting. Dados $x, y \in P$, então:*

$$(x \wedge y)' = (x' \vee y')''.$$

Demonstração. Em vista do Lema 15 e do item (c) do Lema 22, temos:

$$(x' \vee y')' = x'' \wedge y'' = (x \wedge y)''.$$

Daí, usando o Lema 19 obtemos:

$$(x \wedge y)' = (x \wedge y)''' = (x' \vee y')''.$$ □

24. **Corolário.** *Se P é uma álgebra de Boole então $(x \wedge y)' = x' \vee y'$, para todos $x, y \in P$.*

Demonstração. Segue do Lema 23 e do Lema 18. □

25. **Definição.** Se P é uma álgebra de Heyting, então um elemento $x \in P$ é dito *regular* se $x'' = x$. Denotamos por P^{reg} o subconjunto de P formado pelos elementos regulares.

Evidentemente, $0, 1 \in P^{\text{reg}}$.

26. **Exemplo.** Seja P a álgebra de Heyting de abertos de um espaço topológico (Exemplo 11). Temos que um aberto U é um elemento regular de P (dizemos então que ele é um *aberto regular*) se U coincide com o interior de seu fecho. De fato, recorde que U' é o interior do complementar de U e também o complementar do fecho de U. Daí:

$$U'' = (\overline{U}^{\,\mathrm{c}})' = \operatorname{int}\big((\overline{U}^{\,\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}\big) = \operatorname{int}(\overline{U}).$$

27. **Lema.** *Se P é uma álgebra de Heyting então para todo $x \in P$ temos $x' \in P^{\text{reg}}$.*

Demonstração. Segue diretamente do Lema 19. □

28. **Lema.** *Se P é uma álgebra de Heyting e $x \in P$ então x'' é o menor elemento $y \in P^{\text{reg}}$ tal que $x \le y$.*

Demonstração. Pelo Lema 27, x'' é regular e pelo Lema 18 temos $x \le x''$. Se y é um elemento regular e $x \le y$ então, em vista do Lema 14, temos $y' \le x'$ e $x'' \le y'' = y$. □

29. **Lema.** *Se P é uma álgebra de Heyting e $x, y \in P^{\text{reg}}$ então:*

$$x \wedge y \in P^{\text{reg}}, \quad x \to y \in P^{\text{reg}}.$$

Demonstração. Segue diretamente dos itens (c) e (d) do Lema 22. □

30. **Lema.** *Se P é uma álgebra de Heyting então P^{reg}, munido da ordem parcial induzida de P, é um reticulado limitado cujo menor e maior elemento coincidem com o menor e maior elemento de P, respectivamente. Dados $x, y \in P^{\text{reg}}$, então o ínfimo de $\{x, y\}$ em P^{reg} é $x \wedge y$ e o supremo de $\{x, y\}$ em P^{reg} é $(x \vee y)''$.*

Demonstração. Dados $x, y \in P^{\text{reg}}$ então, em vista do Lema 29, $x \wedge y \in P^{\text{reg}}$ e é claro que $x \wedge y$ é o ínfimo de $\{x, y\}$ em P^{reg}. Segue do Lema 28 que se $x, y \in P^{\text{reg}}$ então $(x \vee y)''$ é o supremo de $\{x, y\}$ em P^{reg}. Assim, P^{reg} é um reticulado. Finalmente, como $0, 1 \in P^{\text{reg}}$, temos que P^{reg} é um reticulado limitado, com os mesmos menor e maior elemento que P. □

Em vista do Lema 30, se P é uma álgebra de Heyting, definimos:

$$x \sqcup y = (x \vee y)'' \in P^{\text{reg}},$$

para todos $x, y \in P^{\text{reg}}$.

31. **Lema.** *Se P é uma álgebra de Heyting então o reticulado limitado P^{reg} é também uma álgebra de Heyting e a operação $\to$ de P^{reg} é simplesmente a restrição da operação $\to$ de P.*

Demonstração. Dados $x, y \in P^{\text{reg}}$ então, em vista do Lema 29, temos que $x \to y \in P^{\text{reg}}$. Evidentemente, $x \to y$ é o maior $z \in P^{\text{reg}}$ satisfazendo $z \wedge x \leq y$. □

32. **Proposição.** *Se P é uma álgebra de Heyting então o reticulado limitado P^{reg} é uma álgebra de Boole. Além do mais, para todo $x \in P^{\text{reg}}$, o complemento de x em P^{reg} coincide com o pseudo-complemento x' de x na álgebra de Heyting P.*

Demonstração. Em vista do Lema 31, basta mostrar que para todo $x \in P^{\text{reg}}$ o pseudo-complemento x' de x na álgebra de Heyting P (que, em vista do Lema 27, está em P^{reg}) é um complemento para x na álgebra de Heyting P^{reg}, i.e.:

$$x \wedge x' = 0, \quad x \sqcup x' = 1.$$

Basta mostrar a segunda igualdade. Pelo Lema 15, temos:

$$(x \vee x')' = x' \wedge x'' = 0,$$

donde $x \sqcup x' = (x \vee x')'' = 0' = 1$. □

33. **Definição.** Se P, Q são álgebras de Heyting então um *homomorfismo de álgebras de Heyting* de P para Q é uma aplicação $h : P \to Q$ tal que:

$$h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y), \quad h(x \vee y) = h(x) \vee h(y),$$
$$h(x \to y) = h(x) \to h(y), \quad h(0) = 0,$$

para todos $x, y \in P$.

34. **Lema.** *Se $h : P \to Q$ é um homomorfismo de álgebras de Heyting então $h(1) = 1$ e:*

$$h(x') = h(x)',$$

para todo $x \in P$. Além do mais, dados $x, y \in P$ então $x \leq y$ implica $h(x) \leq h(y)$.

Demonstração. Temos:

$$h(x') = h(x \to 0) = h(x) \to h(0) = h(x) \to 0 = h(x)',$$

para todo $x \in P$. Além do mais, $h(1) = h(0') = h(0)' = 0' = 1$. Agora, dados $x, y \in P$, se $x \leq y$ então $x \wedge y = x$, donde:

$$h(x) \wedge h(y) = h(x \wedge y) = h(x),$$

e concluímos que $h(x) \leq h(y)$. □

35. **Proposição.** *Se P é uma álgebra de Heyting então a aplicação:*

$$h : P \ni x \longmapsto x'' \in P^{\text{reg}}$$

é um homomorfismo de álgebras de Heyting.

Demonstração. Note que, em vista do Lema 27, h está bem definido (i.e., de fato toma valores em P^{reg}). Os itens (c) e (d) do Lema 22 nos dizem que:

$$h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y), \quad h(x \to y) = h(x) \to h(y),$$

para todos $x, y \in P$. Temos também:

$$h(x \vee y) = (x \vee y)'' = (x' \wedge y')' = (x'' \vee y'')'' = x'' \sqcup y'' = h(x) \sqcup h(y),$$

para todos $x, y \in P$, onde na segunda igualdade usamos o Lema 15 e na terceira usamos o Lema 23. Obviamente, $h(0) = 0$. $\square$