INTEGRAIS MÚLTIPLAS IMPRÓPRIAS DE RIEMANN

DANIEL V. TAUSK

Lembramos que a integral própria de Riemann foi definida para funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$, em que X é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$. Um subconjunto limitado X de $\mathbb{R}^n$ é dito *Jordan mensurável* quando a função constante e igual a 1 é Riemann integrável em X (no sentido próprio). Isso é equivalente a dizer que a fronteira de X tem medida de Lebesgue nula. Subconjuntos limitados e Jordan mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ são os domínios naturais para se estudar integral própria de Riemann. Lembramos que uma função limitada $f : X \to \mathbb{R}$ definida num subconjunto limitado e Jordan mensurável X de $\mathbb{R}^n$ é Riemann integrável se, e somente se, o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tiver medida de Lebesgue nula. Para integração imprópria, consideramos domínios possivelmente ilimitados e funções possivelmente ilimitadas.

Definição 1. Um subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ (não necessariamente limitado) é dito *Jordan mensurável* se a interseção de X com qualquer bola aberta de $\mathbb{R}^n$ for Jordan mensurável. Isso é equivalente a dizer que $X \cap Y$ é Jordan mensurável, para todo subconjunto limitado e Jordan mensurável Y de $\mathbb{R}^n$. É equivalente também a dizer que a fronteira de X tem medida de Lebesgue nula.

Definição 2. Sejam X um subconjunto Jordan mensurável (não necessariamente limitado) de $\mathbb{R}^n$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função (não necessariamente limitada). Suponha que exista uma sequência $(X_k)_{k\ge1}$ de subconjuntos de X satisfazendo a seguinte condição:

($*$) $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$, $X_k \subset X_{k+1}$, para todo $k \ge 1$, X_k é limitado, Jordan mensurável e $f|_{X_k}$ é limitada e Riemann integrável, para todo $k \ge 1$.

Se o limite

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{X_k} f \tag{1}$$

existe (podendo ser $+\infty$ ou $-\infty$) e não depende da escolha da sequência $(X_k)_{k\ge1}$ satisfazendo ($*$), então dizemos que a *integral de Riemann imprópria* $\int_X f$ existe e é igual a esse limite.

Observação 1. A existência de uma sequência $(X_k)_{k\ge1}$ satisfazendo ($*$) é equivalente à condição de que o conjunto dos pontos em que f é descontínua tenha medida de Lebesgue nula.

Date: 13 de abril de 2019.

Observação 2. Se X for limitado e f for limitada, então a integral de Riemann imprópria definida acima coincide com a integral de Riemann própria, isto é, a integral de Riemann imprópria $\int_X f$ existe se, e somente se, a integral de Riemann própria $\int_X f$ existe e quando ambas existem são iguais.

Observação 3. Se f é não negativa (isto é, se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$), então o limite (1) não depende da escolha da sequência $(X_k)_{k\geq 1}$ satisfazendo $(*)$. Assim, se o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tiver medida de Lebesgue nula e se f for não negativa, então a integral $\int_X f$ sempre existe (podendo ser igual a $+\infty$).

Para estudar o caso de funções que assumem valores positivos e negativos, consideramos uma decomposição da função em que separamos as partes positiva e negativa.

Definição 3. Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definimos a sua *parte positiva* $f^+ : X \to \mathbb{R}$ por

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

e a sua *parte negativa* $f^- : X \to \mathbb{R}$ por:

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{se } f(x) \leq 0, \\ 0, & \text{se } f(x) > 0. \end{cases}$$

Temos $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$.

O seguinte resultado dá uma condição necessária e suficiente para a existência da integral de Riemann imprópria.

Teorema 1. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto Jordan mensurável (não necessariamente limitado) e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função (não necessariamente limitada). Temos que a integral de Riemann imprópria $\int_X f$ existe (podendo ser $+\infty$ ou $-\infty$) se, e somente se, o conjunto dos pontos em que f é descontínua tiver medida de Lebesgue nula e ao menos uma das integrais $\int_X f^+$, $\int_X f^-$ for finita.*

Definição 4. Dizemos que a integral de Riemann imprópria $\int_X f$ é *convergente* se existir e for finita. Caso contrário, dizemos que ela é *divergente*.

Usando a Definição 2 para integral imprópria, vale que uma integral imprópria será convergente se, e somente se, for absolutamente convergente, como diz o resultado abaixo.

Teorema 2. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto Jordan mensurável (não necessariamente limitado) e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função (não necessariamente limitada). Se o conjunto dos pontos em que f é descontínua tiver medida de Lebesgue nula, então a integral imprópria de Riemann $\int_X f$ será convergente se, e somente se, a integral imprópria de Riemann $\int_X |f|$ for convergente.*

Observação 4. Note que a Definição 2 de integral imprópria de Riemann em $\mathbb{R}^n$ não é equivalente, no caso $n = 1$, à definição que tradicionalmente é usada nesse caso. Por exemplo, a integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, \mathrm{d}x \tag{2}$$

é convergente no sentido usual de integral imprópria de Riemann em $\mathbb{R}$ que a define como sendo igual ao limite $\lim_{u \to +\infty} \int_0^u \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, \mathrm{d}x$. Esse limite existe e é finito. No entanto, tanto a parte positiva quanto a parte negativa do integrando em (2) tem integral $+\infty$ e portanto a integral imprópria não existe no sentido da Definição 2. Isso ocorre porque na Definição 2 é permitido aproximar o intervalo ilimitado $X = [0, +\infty[$ por subconjuntos Jordan mensuráveis arbitrários X_k e não necessariamente apenas por intervalos $[0, u]$. Usando conjuntos X_k que são uniões finitas de intervalos disjuntos é possível construir sequências $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfazendo $(*)$ na Definição 2 tais que o limite (1) não exista ou tal que ele exista e assuma qualquer valor desejado pré-fixado.

Observamos que para funções não negativas a Definição 2 é equivalente à definição tradicional de integral imprópria de Riemann para funções de uma variável real e que sempre que a integral imprópria existe no sentido da Definição 2 então ela existe no sentido tradicional e os valores coincidem. No entanto, como mencionamos acima, algumas funções de uma variável real cuja integral imprópria converge no sentido tradicional não admitem integral no sentido da Definição 2. *No restante do texto, integrais impróprias serão sempre entendidas no sentido da Definição 2, mesmo no caso $n = 1$.*

Enunciamos agora uma primeira versão para o Teorema de Fubini para integral imprópria em $\mathbb{R}^2$.

Teorema 3 (Fubini)**.** *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função cuja integral de Riemann imprópria $\int_{\mathbb{R}^2} f$ existe, podendo ser igual a $+\infty$ ou $-\infty$ (veja o Teorema 1 para o critério de existência). Suponha que a integral $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, \mathrm{d}y$ seja convergente para todo $x \in \mathbb{R}$ e seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, \mathrm{d}y,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Se o conjunto dos pontos em que F é descontínua tiver medida de Lebesgue nula[1]*, então a integral $\int_{\mathbb{R}} F$ existe e é igual a $\int_{\mathbb{R}^2} f$.*

A hipótese de que $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, \mathrm{d}y$ seja convergente para todo $x \in \mathbb{R}$ no enunciado do Teorema 3 é muito forte e muitas vezes não é satisfeita. Por isso enunciamos a seguinte versão melhorada do teorema.

[1]No caso de integrais próprias (isto é, f é limitada e o domínio de f é um retângulo limitado), esta hipótese é desnecessária, já que é automaticamete satisfeita. Para integrais impróprias é possível construir exemplos (um pouco exóticos) em que essa hipótese não é satisfeita.

Teorema 4 (Fubini)**.** *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função cuja integral de Riemann imprópria $\int_{\mathbb{R}^2} f$ existe, podendo ser igual a $+\infty$ ou $-\infty$. Suponha que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uma função tal que*

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, \mathrm{d}y,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ fora de algum conjunto de medida de Lebesgue nula (estamos em particular assumindo que a integral do lado direito da igualdade seja convergente para esses valores de x). Se o conjunto dos pontos em que F é descontínua tiver medida de Lebesgue nula, então a integral $\int_{\mathbb{R}} F$ existe e é igual a $\int_{\mathbb{R}^2} f$.

Adendo. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é tal que a integral $\int_{\mathbb{R}^2} f$ é convergente, então a integral $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, \mathrm{d}y$ será convergente para todo $x \in \mathbb{R}$ fora de algum conjunto de medida de Lebesgue nula. Segue então que se for verificado que a integral $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, \mathrm{d}y$ é divergente para todo x em algum conjunto que não tenha medida de Lebesgue nula (digamos, para todo x num intervalo com mais de um ponto), então poderemos concluir que a integral $\int_{\mathbb{R}^2} f$ é divergente.

Observação 5*.* Os enunciados dos Teoremas 3 e 4 e do adendo acima podem ser reformulados trocando os papéis de x e y.

Observação 6*.* Não perdemos generalidade em assumir nos enunciados acima que a integral seja feita em todo o $\mathbb{R}^2$. Caso o domínio de f seja um subconjunto Jordan mensurável X de $\mathbb{R}^2$ e se quisermos integrar apenas em X, basta estender f a $\mathbb{R}^2$ colocando valor nulo fora de X.

Abaixo generalizamos o Teorema de Fubini para integração em $\mathbb{R}^n$. Enunciamos apenas a generalização do Teorema 4, que é o mais forte. Em $\mathbb{R}^n$ o enunciado fica um pouco mais complicado de escrever pois consideramos uma decomposição arbitrária das n variáveis de f em dois blocos, um com p variáveis e outro com q variáveis, sendo $p + q = n$. A integral de f em $\mathbb{R}^n$ ficará então igual a uma integral iterada, em que integramos primeiro em q das n variáveis de f e depois nas outras p. A função σ que introduzimos no enunciado faz uma permutação da ordem das variáveis e é um artifício de notação que nos permite falar de modo confortável da integral nas q variáveis escolhidas para a primeira integração (que não são necessariamente as q últimas nem as q primeiras).

Teorema 5 (Fubini)**.** *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função cuja integral de Riemann imprópria $\int_{\mathbb{R}^n} f$ existe, podendo ser $+\infty$ ou $-\infty$. Escreva*

$$\{1, 2, \ldots, n\} = \{i_1, \ldots, i_p\} \cup \{j_1, \ldots, j_q\},$$

com $p + q = n$ e defina $\sigma : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ fazendo $\sigma(x, y) = z$, para todos $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, em que $z \in \mathbb{R}^n$ é tal que

$$(z_{i_1}, \ldots, z_{i_p}) = (x_1, \ldots, x_p) \quad e \quad (z_{j_1}, \ldots, z_{j_q}) = (y_1, \ldots, y_q).$$

Suponha que $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ seja uma função tal que

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f\big(\sigma(x, y)\big)\, \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_q,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^p$ fora de algum conjunto de medida de Lebesgue nula (estamos em particular assumindo que a integral do lado direito da igualdade seja convergente para esses valores de x). Se o conjunto dos pontos em que F é descontínua tiver medida de Lebesgue nula, então a integral $\int_{\mathbb{R}^p} F$ existe e é igual a $\int_{\mathbb{R}^n} f$.

Adendo. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é tal que a integral $\int_{\mathbb{R}^n} f$ é convergente, então a integral $\int_{\mathbb{R}^q} f\big(\sigma(x, y)\big)\, \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_q$ será convergente para todo $x \in \mathbb{R}^p$ fora de algum conjunto de medida de Lebesgue nula. Segue então que se for verificado que a integral $\int_{\mathbb{R}^q} f\big(\sigma(x, y)\big)\, \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_q$ é divergente para todo x em algum conjunto que não tenha medida de Lebesgue nula (digamos, para todo x num conjunto aberto não vazio), então poderemos concluir que a integral $\int_{\mathbb{R}^n} f$ é divergente.