

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES

DANIEL V. TAUSK

SUMÁRIO

1. Introdução	2
2. Preliminares	2
3. Existência e unicidade de soluções	4
4. Equações de primeira ordem	7
5. Equações com coeficientes constantes	8
5.1. Raízes complexas	10
5.2. Equações inhomogêneas	15
6. Sistemas lineares de equações diferenciais de primeira ordem	18
6.1. O truque de redução da ordem	22
6.2. O método de variação das constantes	24
7. Demonstração dos resultados da Seção 5	26
Referências	33

1. INTRODUÇÃO

Este é um texto de introdução à teoria das equações diferenciais ordinárias lineares destinado a alunos de graduação com noções de Cálculo Diferencial e Álgebra Linear. O texto contém as demonstrações dos resultados enunciados, exceto pelo teorema de existência e unicidade de soluções cuja demonstração envolve técnicas de Análise que saem do escopo de um curso de Cálculo Diferencial. Resultados um pouco mais complicados de demonstrar sobre equações com coeficientes constantes enunciados na Seção 5 serão demonstrados na Seção 7.

2. PRELIMINARES

Uma *equação diferencial ordinária linear de ordem n* é uma equação do tipo

$$(2.1) \quad a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t),$$

em que a_0, a_1, \dots, a_n e b são funções a valores reais dadas definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e a função a_n não é identicamente nula. Uma *solução* da equação (2.1) é uma função $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ que é n vezes derivável e tal que a igualdade (2.1) é satisfeita para todo $t \in I$, em que $x^{(k)}(t)$ denota a k -ésima derivada de x no ponto t . Dizemos que a equação (2.1) tem *coeficientes constantes* se as funções a_0, a_1, \dots, a_n forem constantes e que a equação (2.1) é *homogênea* se a função b for identicamente nula.

Exemplo 2.1 (oscilador harmônico). Sejam m e k constantes reais positivas. A equação diferencial ordinária linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes

$$(2.2) \quad mx''(t) + kx(t) = 0$$

descreve a lei satisfeita pela deslocamento x (expresso em função do tempo t) em relação a uma posição de equilíbrio de uma partícula de massa m sujeita a uma força cuja intensidade é proporcional à magnitude do deslocamento e que tem o sentido oposto a esse deslocamento. Vários movimentos oscilatórios tais como o movimento de um pêndulo ou de uma partícula massiva presa a uma mola podem ser aproximadamente descritos por soluções dessa equação diferencial no caso de oscilações pequenas. É fácil verificar que se $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, então a função $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(2.3) \quad x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, é uma solução de (2.2) para quaisquer valores que sejam atribuídos às constantes reais c_1 e c_2 . É possível demonstrar na verdade que *toda* solução da equação (2.2) é da forma (2.3) para alguma escolha de valores para c_1 e c_2 e por isso se diz que a expressão (2.3) é a *solução geral* da equação diferencial (2.2). A demonstração desse fato pode ser obtida usando os resultados sobre existência e unicidade de soluções que enunciaremos na Seção 3 ou os resultados sobre equações com coeficientes constantes que

apresentaremos na Seção 5 e demonstraremos na Seção 7. Observamos que a solução geral (2.3) pode também ser escrita na forma

$$(2.4) \quad x(t) = A \cos(\omega t + \theta),$$

em que A e θ são constantes reais com $A \geq 0$. De fato, dados $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, para escrever (2.3) na forma (2.4) basta tomar $A = (c_1^2 + c_2^2)^{\frac{1}{2}}$ e escolher $\theta \in \mathbb{R}$ de modo que $c_1 = A \cos \theta$ e $c_2 = -A \sin \theta$. A constante A é chamada *amplitude* do movimento oscilatório descrito por (2.4) e a constante θ uma *fase*.

É fácil verificar que se uma equação diferencial linear for homogênea, então uma combinação linear de soluções dessa equação é ainda uma solução dessa equação. Usando a terminologia da Álgebra Linear, isso significa que o conjunto solução da equação é um subespaço vetorial do espaço de todas as funções $x : I \rightarrow \mathbb{R}$. Note que se definimos uma função $\mathbb{L}(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mathbb{L}(x)(t) = a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t),$$

para todo $t \in I$ e toda função n vezes derivável $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, então a equação (2.1) é equivalente a:

$$\mathbb{L}(x) = b.$$

Verifica-se diretamente que \mathbb{L} é uma transformação linear definida no espaço vetorial das funções n vezes deriváveis $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ e tomando valores no espaço vetorial de todas as funções de I em \mathbb{R} . O conjunto solução da equação homogênea $\mathbb{L}(x) = 0$ é então nada mais do que o núcleo da transformação linear \mathbb{L} e portanto é, como mencionamos acima, um subespaço vetorial do domínio de \mathbb{L} . O nome “linear” para a equação diferencial (2.1) refere-se precisamente à linearidade da transformação \mathbb{L} que descreve o lado esquerdo da equação (2.1). Uma consequência imediata da linearidade de \mathbb{L} é a seguinte: se x_1 e x_2 são soluções das equações

$$(2.5) \quad \mathbb{L}(x) = b_1 \quad \text{e} \quad \mathbb{L}(x) = b_2,$$

respectivamente, e se α_1 e α_2 são constantes reais, então a combinação linear $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ é uma solução da equação

$$\mathbb{L}(x) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$$

cujo lado direito é a combinação linear correspondente dos lados direitos b_1 e b_2 das equações (2.5). Essa propriedade é normalmente chamada pelos físicos de *princípio de superposição* e é nada mais que um outro nome para a linearidade de \mathbb{L} .

O seguinte resultado é também uma consequência simples da linearidade de \mathbb{L} : se S é o conjunto solução da equação homogênea $\mathbb{L}(x) = 0$ (em outras palavras, se S é o núcleo de \mathbb{L}) e se x_0 é uma solução da equação inhomogênea $\mathbb{L}(x) = b$, então

$$\{x + x_0 : x \in S\}$$

é o conjunto solução da equação $\mathbb{L}(x) = b$. Esse resultado é normalmente expresso através do seguinte *slogan*: *a solução geral da equação linear inhomogênea $\mathbb{L}(x) = b$ é obtida somando uma solução particular dessa equação inhomogênea a uma solução geral da equação homogênea $\mathbb{L}(x) = 0$.*

Exemplo 2.2. Considere a equação diferencial linear inhomogênea de segunda ordem:

$$(2.6) \quad x''(t) + x(t) = e^t.$$

Essa é a equação de um oscilador harmônico com $k = m = 1$ em que há uma força externa dependente do tempo t com intensidade e^t agindo sobre a partícula que oscila. Como vimos no Exemplo 2.1, a solução geral da equação homogênea

$$(2.7) \quad x''(t) + x(t) = 0$$

é

$$(2.8) \quad x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

em que c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias. Vamos procurar alguma solução particular da equação inhomogênea (2.6). É razoável imaginar que essa equação possua alguma solução da forma $x(t) = \alpha e^t$, em que α é uma constante real. Substituindo esse palpite na equação (2.6), obtemos

$$x''(t) + x(t) = \alpha e^t + \alpha e^t = e^t \iff \alpha = \frac{1}{2},$$

donde segue que $x(t) = \frac{1}{2}e^t$ é de fato uma solução de (2.6). A solução geral da equação inhomogênea (2.6) é obtida agora somando a solução particular $x(t) = \frac{1}{2}e^t$ com a solução geral (2.8) da equação homogênea (2.7). Assim, a solução geral da equação inhomogênea (2.6) é

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2}e^t,$$

em que c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias.

3. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES

Quando o coeficiente dominante a_n da equação diferencial (2.1) é uma função que não se anula em nenhum ponto do intervalo I , podemos dividir os dois lados da igualdade (2.1) por a_n obtendo uma equação diferencial equivalente em que o coeficiente dominante é igual a 1. Em outras palavras, o estudo de equações diferenciais (2.1) cujo coeficiente dominante a_n nunca se anula pode ser reduzido ao estudo de equações da forma:

$$(3.1) \quad x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t).$$

Neste texto nós nos restringiremos ao estudo desse tipo de equação. A teoria de equações diferenciais em que o coeficiente dominante a_n se anula em alguns pontos $t \in I$ (chamados *pontos singulares*) é mais complicada

já que, por exemplo, o teorema de existência e unicidade de soluções que enunciamos a seguir não vale nesse caso mais geral (veja Exemplo 3.2).

Teorema 3.1 (existência e unicidade). *Sejam a_0, a_1, \dots, a_{n-1} e b funções contínuas a valores reais definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dados $t_0 \in I$ e números reais $u_0, u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}$, então a equação diferencial (3.1) possui uma única solução $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as condições iniciais:*

$$x(t_0) = u_0, \quad x'(t_0) = u_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}.$$

Demonstração. Esse teorema é obtido como consequência do Teorema 6.1 de existência e unicidade de soluções para sistemas de equações diferenciais de primeira ordem (cuja demonstração omitiremos) usando o truque explicado na Subseção 6.1. \square

De modo sucinto, o Teorema 3.1 nos diz que — sob a hipótese de continuidade mencionada no enunciado — uma solução da equação (3.1) fica unicamente determinada pelo seu valor e pelo valor das suas $n - 1$ primeiras derivadas num “instante inicial” $t_0 \in I$. Em particular, no caso de equações diferenciais de segunda ordem, uma solução x fica determinada pela especificação de $x(t_0)$ e $x'(t_0)$, isto é, pela especificação da posição inicial e da velocidade inicial. Se a equação for de primeira ordem, então uma solução x fica determinada simplesmente pelo valor inicial $x(t_0)$.

Exemplo 3.2. A equação diferencial linear homogênea de primeira ordem

$$(3.2) \quad tx'(t) - 2x(t) = 0$$

tem infinitas soluções satisfazendo a condição inicial $x(0) = 0$; de fato, a função $x(t) = ct^2$ é uma solução da equação para qualquer valor da constante $c \in \mathbb{R}$. Esse fato não contradiz o Teorema 3.1, já que o coeficiente de $x'(t)$ em (3.2) se anula em $t = 0$ e daí (3.2) não é equivalente a uma equação da forma (3.1).

Os resultados a seguir são uma consequência simples do Teorema 3.1.

Corolário 3.3 (dimensão do espaço solução). *Se a_0, a_1, \dots, a_{n-1} são funções contínuas a valores reais definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, então o espaço solução da equação diferencial linear homogênea de ordem n*

$$(3.3) \quad x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0$$

tem dimensão n .

Demonstração. Seja S o espaço solução de (3.3) e escolha um ponto qualquer $t_0 \in I$. Seja $T : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ a transformação definida por

$$T(x) = (x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)),$$

para todo $x \in S$. Verifica-se imediatamente que T é linear e o Teorema 3.1 nos diz que T é bijetora. A conclusão segue lembrando que se há uma bijeção linear entre dois espaços vetoriais, então esses espaços possuem a mesma dimensão. \square

Corolário 3.4. *Se a_0, a_1, \dots, a_{n-1} são funções contínuas a valores reais definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e se*

$$(3.4) \quad x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_k$$

são soluções da equação diferencial linear homogênea (3.3), então para qualquer $t_0 \in I$ dado vale que as funções (3.4) são linearmente independentes se, e somente se, os vetores

$$\begin{aligned} & (x_1(t_0), x_1'(t_0), x_1''(t_0), \dots, x_1^{(n-1)}(t_0)), \\ & (x_2(t_0), x_2'(t_0), x_2''(t_0), \dots, x_2^{(n-1)}(t_0)), \\ & \quad \vdots \\ & (x_k(t_0), x_k'(t_0), x_k''(t_0), \dots, x_k^{(n-1)}(t_0)) \end{aligned}$$

de \mathbb{R}^n forem linearmente independentes.

Demonstração. Basta usar o fato que a transformação linear T definida na demonstração do Corolário 3.3 é bijetora e lembrar que uma transformação linear bijetora leva conjuntos linearmente independentes em conjuntos linearmente independentes. \square

Corolário 3.5 (critério do Wronskiano). *Se a_0, a_1, \dots, a_{n-1} são funções contínuas a valores reais definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e se*

$$(3.5) \quad x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n$$

são soluções da equação diferencial linear homogênea (3.3), então para qualquer $t_0 \in I$ dado vale que as funções (3.5) são linearmente independentes se, e somente se, o determinante

$$(3.6) \quad W(t_0) = \begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) & \cdots & x_n(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) & \cdots & x_n'(t_0) \\ x_1''(t_0) & x_2''(t_0) & \cdots & x_n''(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t_0) & x_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}$$

for diferente de zero.

Demonstração. Segue do Corolário 3.4 e do fato que o determinante de uma matriz é diferente de zero se, e somente se, as suas colunas forem linearmente independentes. \square

O determinante que aparece do lado direito da igualdade (3.6) é conhecido como *Wronskiano*.

Segue do Corolário 3.3 que para achar a solução geral da equação homogênea (3.3) é suficiente encontrar n soluções linearmente independentes para essa equação. Em vista do corolário, essas soluções serão uma base do espaço solução e portanto a solução geral se escreverá como uma combinação

linear dessas n soluções básicas, em que os coeficientes são constantes reais arbitrarias. Por exemplo, no caso do oscilador harmônico discutido no Exemplo 2.1, as duas funções $x_1(t) = \cos(\omega t)$ e $x_2(t) = \sin(\omega t)$ são soluções linearmente independentes da equação homogênea de segunda ordem (2.2) e portanto constituem uma base do espaço solução. Segue daí que (2.3) é de fato a solução geral da equação, como já havia sido mencionado.

Infelizmente, não há um método para se determinar soluções para uma equação diferencial linear qualquer em termos de “fórmulas” exatas (mas há métodos numéricos para se encontrar aproximações das soluções). Nas seções seguintes nós estudaremos dois casos especiais em que há uma técnica para se determinar a solução geral: o caso de equações de primeira ordem (cujos coeficientes não são necessariamente constantes) e o caso de equações de coeficientes constantes (de ordem arbitrária).

4. EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM

Considere a equação diferencial linear de primeira ordem

$$(4.1) \quad x'(t) + a(t)x(t) = b(t),$$

em que a e b são funções contínuas a valores reais definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Como a função a é contínua, ela admite uma primitiva A , isto é, uma função derivável $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $A' = a$. Note que

$$(4.2) \quad \frac{d}{dt}(e^{A(t)}x(t)) = e^{A(t)}(x'(t) + a(t)x(t)),$$

para todo $t \in I$. Multiplicando a igualdade (4.1) dos dois lados por $e^{A(t)}$, obtemos a equação equivalente

$$(4.3) \quad e^{A(t)}(x'(t) + a(t)x(t)) = e^{A(t)}b(t)$$

e, em vista de (4.2), o lado esquerdo de (4.3) pode ser “integrado” transformando (4.3) em

$$(4.4) \quad \frac{d}{dt}(e^{A(t)}x(t)) = e^{A(t)}b(t);$$

por esse motivo, a expressão $e^{A(t)}$ é chamada de *fator integrante*. Como o lado direito de (4.4) define uma função contínua de t , ela admite uma primitiva U , isto é, uma função derivável $U : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$U'(t) = e^{A(t)}b(t),$$

para todo $t \in I$. Todas as outras primitivas dessa função são da forma $U + c$, com $c \in \mathbb{R}$ uma constante e portanto a solução geral de (4.4) é

$$x(t) = e^{-A(t)}(U(t) + c) = ce^{-A(t)} + e^{-A(t)}U(t),$$

em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante real arbitrária. Essa também é a solução geral da equação original (4.1). Note que o termo $ce^{-A(t)}$ nos dá a solução geral da equação homogênea

$$x'(t) + a(t)x(t) = 0$$

e que o conjunto solução dessa equação homogênea é um espaço vetorial de dimensão 1 gerado pela função $x(t) = e^{-A(t)}$. A função $x(t) = e^{-A(t)}U(t)$ é uma solução particular da equação inhomogênea (4.1). Assim, como discutido na Seção 2, vemos concretamente nesse exemplo que a solução geral da equação inhomogênea escreve-se como soma de uma solução particular com a solução geral da equação homogênea.

A técnica que explicamos nesta seção nos permite resolver uma equação diferencial linear de primeira ordem (4.1) qualquer, expressando a solução em termos de uma primitiva A da função a e de uma primitiva U da função $u(t) = e^{A(t)}b(t)$. Evidentemente, num exemplo concreto, nem sempre será fácil ou possível exprimir essas primitivas em termos de funções elementares (ou descrevê-las por alguma “fórmula” mais explícita), mas a redução do problema de encontrar a solução geral de uma equação diferencial ao problema de encontrar primitivas é o melhor que se pode esperar nesse caso. De fato, mesmo no caso trivial $a = 0$, a equação (4.1) é equivalente ao problema de encontrar a primitiva da função b .

5. EQUAÇÕES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Consideramos agora uma equação diferencial linear homogênea de ordem n com coeficientes constantes:

$$(5.1) \quad x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1x'(t) + a_0x(t) = 0;$$

aqui a_0, a_1, \dots, a_{n-1} são números reais dados. Vamos primeiro procurar por uma solução dessa equação da forma $x(t) = e^{\lambda t}$, em que $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma constante a ser determinada. Substituindo esse palpite na equação diferencial vemos que ele nos dará uma solução se, e somente se:

$$(5.2) \quad \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

O polinômio

$$P(\Lambda) = \Lambda^n + a_{n-1}\Lambda^{n-1} + \cdots + a_1\Lambda + a_0$$

que aparece do lado esquerdo da igualdade (5.2) é chamado *polinômio característico* da equação diferencial (5.1). Temos então que a função $x(t) = e^{\lambda t}$ é solução de (5.1) se, e somente se, λ for uma raiz do polinômio característico da equação. Pode-se mostrar¹ que as funções da forma $x(t) = e^{\lambda t}$ correspondentes a valores distintos de λ são linearmente independentes. Na Seção 7 nós mostraremos um resultado mais geral do que esse no Corolário 7.14. Como o espaço solução é um espaço vetorial de dimensão n (Corolário 3.3), segue daí que se o polinômio característico da equação tiver n raízes reais distintas, então obtemos uma base do espaço solução formada só por funções da forma $x(t) = e^{\lambda t}$. Em outras palavras, temos o seguinte resultado.

¹Esse é um exercício comum em cursos de Álgebra Linear. Um jeito de demonstrar isso é usar o determinante Wronskiano (veja Corolário 3.5). No caso de funções da forma $x_i(t) = e^{\lambda_i t}$, com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ distintos, o determinante Wronskiano nos levará a um determinante de uma matriz de Vandermonde com colunas distintas e esse determinante é diferente de zero.

Teorema 5.1. *Se o polinômio característico da equação (5.1) tem n raízes reais distintas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, então as funções*

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad x_n(t) = e^{\lambda_n t}$$

são uma base do espaço solução dessa equação. Em outras palavras, toda solução x de (5.1) se escreve de modo único na forma

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t},$$

em que c_1, c_2, \dots, c_n são constantes reais.

O Teorema 5.1 é um caso particular do Teorema 5.3 mais abaixo que será demonstrado na Seção 7 sem a utilização do Corolário 3.3 sobre a dimensão do espaço solução.

Exemplo 5.2. A equação diferencial homogênea

$$x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 0$$

tem polinômio característico $P(\Lambda) = \Lambda^2 - 5\Lambda + 6$ com duas raízes reais distintas 2 e 3. Assim a solução geral da equação é:

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t},$$

em que c_1 e c_2 são constantes reais.

Para resolver uma equação diferencial linear homogênea com coeficientes constantes arbitrária, precisamos ainda tratar o caso em que o polinômio característico possui raízes múltiplas ou raízes complexas que não são reais. Começamos com as raízes múltiplas. Recorde que se P é um polinômio, então uma raiz λ de P é dita *de multiplicidade k* , em que k é um inteiro positivo, se P pode ser escrito na forma

$$P(\Lambda) = (\Lambda - \lambda)^k Q(\Lambda),$$

em que Q é um polinômio do qual λ não é raiz. Em outras palavras, λ é uma raiz de P de multiplicidade k se quando fatoramos $P(\Lambda)$ como produto de polinômios de grau 1, encontramos exatamente k fatores da forma $\Lambda - \lambda$.

Na Seção 7 nós mostraremos (Corolário 7.5) que se λ é uma raiz do polinômio característico de (5.1) com multiplicidade k , então as funções

$$(5.3) \quad x_0(t) = e^{\lambda t}, \quad x_1(t) = t e^{\lambda t}, \quad x_2(t) = t^2 e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad x_{k-1}(t) = t^{k-1} e^{\lambda t}$$

são soluções da equação (5.1). Não é difícil verificar que essas funções são linearmente independentes. Na verdade, vale algo mais forte (e um tanto mais difícil de mostrar): quando juntamos todas as soluções da forma (5.3) correspondentes a valores distintos de λ num único conjunto, obtemos um conjunto linearmente independente de funções (Corolário 7.14). Agora que consideramos as soluções (5.3), temos que toda raiz real do polinômio característico contribui com um número de soluções linearmente independentes para a equação diferencial igual à sua multiplicidade como raiz. Portanto encontramos um total de n soluções linearmente independentes, desde que

o polinômio característico só tenha raízes reais (isto é, não tenha raízes complexas não reais). Em outras palavras, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.3. *Suponha que o polinômio característico P da equação (5.1) se fatore como*

$$P(\Lambda) = (\Lambda - \lambda_1)^{k_1} (\Lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\Lambda - \lambda_m)^{k_m},$$

em que $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ são números reais distintos e k_1, \dots, k_m são inteiros positivos. Temos então que as funções

$$x_{rs}(t) = t^r e^{\lambda_s t}, \quad r = 0, 1, \dots, k_s - 1, \quad s = 1, \dots, m$$

constituem uma base do espaço solução de (5.1).

Demonstração. Veja Seção 7 (página 33). □

Exemplo 5.4. Considere a equação diferencial

$$x'''(t) - 7x''(t) + 15x'(t) - 9x(t) = 0$$

cujo polinômio característico é $P(\Lambda) = \Lambda^3 - 7\Lambda^2 + 15\Lambda - 9$. Por inspeção direta vemos que 1 é raiz desse polinômio e aí fazendo a divisão de polinômios de $P(\Lambda)$ por $\Lambda - 1$ vem que

$$P(\Lambda) = (\Lambda - 1)(\Lambda^2 - 6\Lambda + 9) = (\Lambda - 1)(\Lambda - 3)^2,$$

isto é, 1 é uma raiz simples do polinômio e 3 é uma raiz dupla. Daí o Teorema 5.3 nos diz que as funções

$$x_1(t) = e^t, \quad x_2(t) = e^{3t}, \quad x_3(t) = t3^{3t}$$

constituem uma base do espaço solução da equação e portanto a solução geral é

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + c_3 t e^{3t},$$

em que c_1, c_2 e c_3 são constantes reais.

Infelizmente o Teorema 5.3 não dá conta nem do oscilador harmônico (Exemplo 2.1), já que nesse caso as raízes do polinômio característico da equação não são reais. Vamos cuidar disso agora.

5.1. Raízes complexas. Toda a teoria que expusemos até agora sobre equações diferenciais se generaliza sem dificuldades para equações diferenciais do tipo (2.1) em que as funções coeficientes a_k e a função b são funções a valores complexos definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Nesse contexto, é natural considerar também soluções $x : I \rightarrow \mathbb{C}$ que tomam valores em \mathbb{C} . Não há nada de muito novo no Cálculo² para funções de uma variável real a valores complexos em relação ao Cálculo para funções de uma variável real a valores reais. Os números complexos \mathbb{C} não são nada além do espaço vetorial

²Por outro lado, o Cálculo com funções de *variável* complexa (isto é, funções cujo domínio e não apenas o contradomínio é \mathbb{C}) traz diversas novidades que são normalmente estudadas em cursos de *funções analíticas*. Ocorre que para funções de \mathbb{C} em \mathbb{C} há uma noção de diferenciabilidade que leva em conta a estrutura multiplicativa de \mathbb{C} que é mais forte do que a diferenciabilidade de funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 .

\mathbb{R}^2 munido de uma operação adicional de multiplicação. Funções de uma variável real a valores complexos são então funções de uma variável real a valores em \mathbb{R}^2 e podem ser derivadas da mesma forma que sempre derivamos funções de uma variável real a valores em \mathbb{R}^2 , a saber, coordenada por coordenada. A única novidade é que quando pensamos que \mathbb{R}^2 é \mathbb{C} , podemos usar a multiplicação de números complexos para multiplicar funções a valores complexos e aí podemos considerar derivadas de produtos de funções a valores complexos. Não é difícil verificar que a regra usual para a derivação de um produto de funções a valores reais (“a derivada da primeira vezes a segunda mais a primeira vezes a derivada da segunda”) vale também para funções a valores complexos³.

É verdade que o espaço das soluções complexas $x : I \rightarrow \mathbb{C}$ de uma equação diferencial linear homogênea é um subespaço complexo do espaço das funções $x : I \rightarrow \mathbb{C}$, isto é, uma combinação linear com coeficientes complexos de soluções é ainda uma solução. O Teorema 3.1 sobre existência e unicidade de soluções de equações diferenciais continua valendo quando trocamos números reais por complexos no enunciado, mas mantendo I um intervalo de \mathbb{R} . O seu Corolário 3.3, que dá a dimensão do espaço solução, também se adapta para números complexos no sentido de que a dimensão⁴ sobre \mathbb{C} do espaço das soluções complexas da equação é n . Isso quer dizer que existem soluções complexas x_1, \dots, x_n da equação que formam uma base sobre \mathbb{C} do espaço das soluções complexas da equação, isto é, qualquer solução complexa se escreve de modo único como uma combinação linear $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ em que os coeficientes c_1, \dots, c_n são constantes *complexas*.

A exponenciação de números reais pode ser estendida para os números complexos usando a série de Taylor

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

³Isso pode ser visto como uma consequência do fato que a multiplicação de números complexos é *bilinear*. A regra para a derivada do produto vale para qualquer espécie de produto bilinear, como o produto escalar em \mathbb{R}^n , o produto vetorial em \mathbb{R}^3 , o produto de matrizes, etc.

⁴Quando temos um espaço vetorial complexo podemos considerar a sua dimensão sobre \mathbb{C} e também a sua dimensão sobre \mathbb{R} , isto é, esquecemos que o espaço admite uma multiplicação por escalares complexos e o tratamos como um espaço vetorial real na hora de determinar a dimensão. Temos que a dimensão sobre \mathbb{R} é sempre o dobro da dimensão sobre \mathbb{C} . Por exemplo, a dimensão do espaço vetorial \mathbb{C}^n sobre \mathbb{C} é n pois uma possível base de \mathbb{C}^n sobre \mathbb{C} é a base canônica e_1, \dots, e_n , em que $e_j \in \mathbb{C}^n$ possui a j -ésima coordenada igual a 1 e as outras coordenadas iguais a zero. Todo elemento de \mathbb{C}^n se escreve de modo único como combinação dessa base canônica usando coeficientes *complexos* na combinação linear. Por outro lado, uma base sobre \mathbb{R} de \mathbb{C}^n é formada pelos $2n$ vetores

$$e_1, e_2, \dots, e_n, ie_1, ie_2, \dots, ie_n$$

pois todo elemento de \mathbb{C}^n se escreve de modo único como combinação linear desses $2n$ vetores usando coeficientes *reais*. Assim a dimensão de \mathbb{C}^n sobre \mathbb{R} é $2n$.

como definição. Essa exponencial tem propriedades similares às da exponencial de números reais: por exemplo, vale que $e^{z+w} = e^z e^w$, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$. Além do mais, e^z é sempre diferente de zero, já que $e^z e^{-z} = e^0 = 1$. Usando essa série, assim como as séries de Taylor das funções seno e cosseno, mostra-se a *fórmula de Euler*

$$(5.4) \quad e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z,$$

válida para todo $z \in \mathbb{C}$ (e, em particular, para $z \in \mathbb{R}$). Segue daí que, se $z = z_1 + iz_2$ com $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, então:

$$e^z = e^{z_1} e^{iz_2} = e^{z_1} (\cos z_2 + i \operatorname{sen} z_2).$$

Se $x : I \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função derivável de variável real a valores complexos, vale a igualdade

$$\frac{d}{dt} e^{x(t)} = e^{x(t)} x'(t),$$

para todo $t \in I$.

Os Teoremas 5.1 e 5.3 se generalizam também sem dificuldade para o caso complexo. Enunciamos agora a versão complexa do Teorema 5.3 (o Teorema 5.1 é um caso particular).

Teorema 5.5. *Considere a equação diferencial*

$$(5.5) \quad x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1x'(t) + a_0x(t) = 0,$$

em que $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ e suponha que o polinômio característico

$$P(\Lambda) = \Lambda^n + a_{n-1}\Lambda^{n-1} + \cdots + a_1\Lambda + a_0$$

dessa equação se fatora como

$$P(\Lambda) = (\Lambda - \lambda_1)^{k_1} (\Lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\Lambda - \lambda_m)^{k_m},$$

em que $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ são números complexos distintos e k_1, \dots, k_m são inteiros positivos. Temos então que as funções

$$(5.6) \quad x_{rs}(t) = t^r e^{\lambda_s t}, \quad r = 0, 1, \dots, k_s - 1, \quad s = 1, \dots, m$$

constituem uma base sobre \mathbb{C} do espaço das soluções complexas de (5.5).

Demonstração. Veja Seção 7 (página 33). □

Exemplo 5.6. A equação diferencial

$$x''(t) + x(t) = 0$$

tem polinômio característico $P(\Lambda) = \Lambda^2 + 1$ com raízes complexas distintas i e $-i$. Segue do Teorema 5.5 que as funções

$$x_1(t) = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad x_2(t) = e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t$$

constituem uma base sobre \mathbb{C} do espaço das soluções complexas $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ da equação. A solução geral complexa dessa equação é

$$x(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it},$$

em que c_1 e c_2 são constantes complexas. Note que as soluções reais $\cos t$ e $\sin t$ se escrevem como:

$$\cos t = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} \quad \text{e} \quad \sin t = \frac{1}{2i}e^{it} - \frac{1}{2i}e^{-it}.$$

Dada uma equação diferencial linear em que os coeficientes são funções (ou constantes) reais, estamos frequentemente mais interessados apenas nas soluções reais da equação. Temos, no entanto, que o Teorema 5.5 nos dá uma base (5.6) do espaço de todas as soluções complexas da equação (5.5) e essa base pode conter soluções complexas que não são reais, mesmo quando os coeficientes da equação forem todos reais. De fato, como vimos no Exemplo 5.6, mesmo quando os coeficientes da equação forem todos reais o polinômio característico poderá ter raízes complexas λ que não são reais e aí as soluções correspondentes $t^r e^{\lambda t}$ também não serão reais. Porém, temos que se um polinômio tiver coeficientes reais e se λ for uma raiz complexa desse polinômio, então o complexo conjugado $\bar{\lambda}$ de λ também será uma raiz desse polinômio de mesma multiplicidade que λ . Recorde que se $z = z_1 + iz_2$ com $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, então o *complexo conjugado* de z é definido por $\bar{z} = z_1 - iz_2$. Valem as identidades

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad \overline{e^z} = e^{\bar{z}},$$

para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$. Assim

$$\overline{t^r e^{\lambda t}} = t^r e^{\bar{\lambda} t},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e todo inteiro não negativo r . Isso significa que, se os coeficientes da equação diferencial (5.5) são reais, então a base (5.6) para o espaço solução produzida pelo Teorema 5.5 tem a propriedade que toda função $x : I \rightarrow \mathbb{C}$ que aparece nessa base aparece junto com a sua complexa conjugada $\bar{x} : I \rightarrow \mathbb{C}$. Para obter então uma base formada só por soluções reais, usamos o seguinte resultado simples.

Lema 5.7. *Seja $x : I \rightarrow \mathbb{C}$ uma função a valores complexos definida num conjunto I e sejam $x_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ a sua parte real e imaginária, isto é, $x(t) = x_1(t) + ix_2(t)$, para todo $t \in I$. Denote por $\bar{x} : I \rightarrow \mathbb{C}$ o complexo conjugado de x , isto é, $\bar{x}(t) = \overline{x(t)}$, para todo $t \in I$. Temos que os conjuntos $\{x, \bar{x}\}$ e $\{x_1, x_2\}$ geram o mesmo subespaço do espaço vetorial complexo de todas as funções de I em \mathbb{C} .*

Demonstração. Basta notar que

$$x = x_1 + ix_2, \quad \bar{x} = x_1 - ix_2$$

e que:

$$x_1 = \frac{1}{2}(x + \bar{x}), \quad x_2 = \frac{1}{2i}(x - \bar{x}). \quad \square$$

Em vista do Lema 5.7, quando os coeficientes da equação (5.5) são reais, podemos obter uma base para o espaço solução formada apenas por soluções

reais pegando a base (5.6) dada pelo Teorema 5.5 e substituindo os pares de soluções conjugadas

$$x(t) = t^r e^{\lambda t} \quad \text{e} \quad \bar{x}(t) = t^r e^{\bar{\lambda} t}$$

pelas partes real e imaginária de x . Segue da fórmula de Euler (5.4) que se $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, então as partes real e imaginária de x são dadas respectivamente por

$$x_1(t) = t^r e^{\lambda_1 t} \cos(\lambda_2 t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = t^r e^{\lambda_1 t} \text{sen}(\lambda_2 t).$$

Na verdade, há um detalhe a mais para ser justificado aqui: se a equação (5.5) tem coeficientes reais e substituimos os pares de soluções conjugadas na base (5.6) por suas partes real e imaginária como explicamos acima, então obtemos uma base sobre \mathbb{C} do espaço das soluções complexas da equação (5.5) que é formada apenas por soluções reais. Mas essa será uma base (sobre \mathbb{R}) do espaço das soluções reais da equação? A resposta é sim, como esclarecemos no lema a seguir.

Lema 5.8. *Sejam I um conjunto e S um subespaço complexo do espaço vetorial das funções $x : I \rightarrow \mathbb{C}$. Se*

$$(5.7) \quad x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n$$

é uma base sobre \mathbb{C} para S e se as funções (5.7) tomam valores reais, então essas funções também são uma base (sobre \mathbb{R}) para o espaço vetorial real

$$\{x \in S : x \text{ toma valores reais}\}$$

formado pelos elementos de S que tomam valores reais.

Demonstração. Do fato que as funções (5.7) são linearmente independentes sobre \mathbb{C} segue diretamente que elas são linearmente independentes sobre \mathbb{R} ; de fato, se a única combinação com coeficientes complexos de (5.7) que dá zero é a combinação trivial, então a única combinação com coeficientes reais de (5.7) que dá zero é a combinação trivial. Resta ver que se $x \in S$ toma valores reais, então x é combinação linear de (5.7) com coeficientes reais. O fato que (5.7) é base sobre \mathbb{C} de S garante a princípio apenas que

$$x = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

com coeficientes c_1, \dots, c_n em \mathbb{C} . Devemos mostrar que esses coeficientes na verdade são reais. Para isso, note que de $x = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ e do fato que x e (5.7) são reais, segue que a combinação linear de (5.7) cujos coeficientes são as partes imaginárias de c_1, \dots, c_n é nula. A independência linear de (5.7) implica então que essas partes imaginárias são nulas e portanto que os coeficientes c_1, \dots, c_n são reais. \square

Exemplo 5.9. Considere a equação diferencial

$$(5.8) \quad x'''(t) - x''(t) + 3x'(t) + 5x(t) = 0.$$

O seu polinômio característico é $P(\Lambda) = \Lambda^3 - \Lambda^2 + 3\Lambda + 5$ e por inspeção vemos que -1 é raiz de P . Fazendo a divisão de polinômios obtemos

$$P(\Lambda) = (\Lambda + 1)(\Lambda^2 - 2\Lambda + 5)$$

e resolvendo a equação de segundo grau $\Lambda^2 - 2\Lambda + 5 = 0$ concluímos que suas raízes são $1 + 2i$ e $1 - 2i$. Segue do Teorema 5.5 que

$$e^{-t}, \quad e^{(1+2i)t}, \quad e^{(1-2i)t}$$

é uma base sobre \mathbb{C} do espaço das soluções complexas de (5.8). As duas soluções correspondentes às raízes conjugadas $1 + 2i$ e $1 - 2i$ são conjugadas entre si e obtemos uma base formada apenas por soluções reais substituindo essas duas soluções pelas partes real e imaginária de $e^{(1+2i)t}$. Assim, uma base formada apenas por soluções reais é

$$e^{-t}, \quad e^t \cos(2t), \quad e^t \sin(2t)$$

e essa é uma base do espaço vetorial de todas as soluções reais de (5.8) pelo Lema 5.8. A solução geral real de (5.8) é portanto

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t \cos(2t) + c_3 e^t \sin(2t),$$

em que c_1 , c_2 e c_3 são constantes reais.

5.2. Equações inhomogêneas. Considere uma equação diferencial linear de ordem n com coeficientes constantes

$$(5.9) \quad x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1x'(t) + a_0x(t) = b(t),$$

em que o lado direito é uma função $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Como vimos na Seção 2, para obter a solução geral de (5.9) basta somar uma solução particular qualquer de (5.9) com a solução geral da equação homogênea correspondente (5.1). Como já sabemos encontrar a solução geral da equação homogênea em termos das raízes do polinômio característico, é suficiente agora encontrar alguma solução particular da equação inhomogênea.

Há um método geral para se encontrar uma solução particular de uma equação diferencial linear inhomogênea a partir da solução geral da equação homogênea conhecido como *método de variação das constantes*; esse método funciona não só para equações com coeficientes constantes e será estudado posteriormente na Subseção 6.2. No entanto, em muitos casos é desnecessário apelar para o método de variação das constantes e é possível encontrar soluções particulares para a equação inhomogênea por métodos *ad hoc*: por exemplo, tentamos adivinhar o formato da solução deixando alguns parâmetros livres para ajuste, substituímos o nosso palpite na equação e determinamos o valor dos parâmetros. Foi isso que nós fizemos no Exemplo 2.2.

O resultado a seguir nos dá o formato de uma solução particular da equação inhomogênea para alguns casos especiais da função b , de modo que nesses casos não precisamos tentar adivinhar o formato da solução. Nós apresentamos um enunciado que já inclui o caso complexo.

Teorema 5.10. *Sejam a_0, a_1, \dots, a_{n-1} números complexos e $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função da forma*

$$b(t) = q(t)e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

em que q é um polinômio complexo e λ é um número complexo. Se λ não é raiz do polinômio característico da equação homogênea (5.1), então a equação inhomogênea (5.9) possui uma solução da forma

$$x(t) = p(t)e^{\lambda t},$$

em que p é um polinômio complexo de mesmo grau que q . Se λ é uma raiz do polinômio característico da equação homogênea (5.1) de multiplicidade k , então a equação inhomogênea (5.9) possui uma solução da forma

$$x(t) = t^k p(t)e^{\lambda t},$$

em que p é um polinômio complexo de mesmo grau que q . Em ambos os casos, se os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_{n-1} forem reais, λ for real e o polinômio q for real, então também o polinômio p pode ser tomado real.

Demonstração. Veja Seção 7 (página 30). □

Corolário 5.11. *Sejam a_0, a_1, \dots, a_{n-1} números reais e $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função da forma*

$$(5.10) \quad b(t) = q(t)e^{\lambda_1 t} \cos(\lambda_2 t), \quad t \in \mathbb{R}$$

ou da forma

$$(5.11) \quad b(t) = q(t)e^{\lambda_1 t} \operatorname{sen}(\lambda_2 t), \quad t \in \mathbb{R},$$

em que q é um polinômio real e λ_1 e λ_2 são números reais. Se $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ não é raiz do polinômio característico da equação homogênea (5.1), então a equação inhomogênea (5.9) possui uma solução da forma

$$x(t) = p_1(t)e^{\lambda_1 t} \cos(\lambda_2 t) + p_2(t)e^{\lambda_1 t} \operatorname{sen}(\lambda_2 t),$$

em que p_1 e p_2 são polinômios reais de grau menor ou igual ao grau de q . Se λ é uma raiz do polinômio característico da equação homogênea (5.1) de multiplicidade k , então a equação inhomogênea (5.9) possui uma solução da forma

$$(5.12) \quad x(t) = t^k p_1(t)e^{\lambda_1 t} \cos(\lambda_2 t) + t^k p_2(t)e^{\lambda_1 t} \operatorname{sen}(\lambda_2 t),$$

em que p_1 e p_2 são polinômios reais de grau menor ou igual ao grau de q .

Demonstração. Se b é da forma (5.10), então

$$b(t) = \frac{1}{2} q(t)e^{\lambda t} + \frac{1}{2} q(t)e^{\bar{\lambda} t},$$

e se b é da forma (5.11), então

$$b(t) = \frac{1}{2i} q(t)e^{\lambda t} - \frac{1}{2i} q(t)e^{\bar{\lambda}t}.$$

Em qualquer caso, o Teorema 5.10 nos dá polinômios complexos u_1 e u_2 de mesmo grau que q de modo que

$$x(t) = t^k u_1(t)e^{\lambda t} + t^k u_2(t)e^{\bar{\lambda}t}$$

é solução de (5.9), em que k é a multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico (sendo $k = 0$ se λ não for raiz). Como todos os coeficientes e o lado direito de (5.9) são reais, segue que a parte real de x também é solução de (5.9). Mas a parte real de x é da forma do lado direito da igualdade (5.12), para certos polinômios reais p_1 e p_2 de grau menor ou igual ao grau de q . \square

Exemplo 5.12. Considere a equação diferencial:

$$(5.13) \quad x''(t) + x(t) = \text{sen } t.$$

O polinômio característico da equação homogênea correspondente a (5.13) é $P(\Lambda) = \Lambda^2 + 1$ com raízes simples i e $-i$. Segue que a solução geral (real) da equação homogênea é

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \text{sen } t,$$

com c_1 e c_2 constantes reais. Note que o lado direito de (5.13) é da forma (5.11), com $q(t) = 1$ (um polinômio de grau zero), $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Como $i = \lambda_1 + i\lambda_2$ é raiz simples do polinômio característico P , o Corolário 5.11 nos diz que a equação inhomogênea (5.13) possui uma solução da forma

$$(5.14) \quad x(t) = \alpha_1 t \cos t + \alpha_2 t \text{sen } t,$$

para certas constantes reais α_1 e α_2 (que seriam os polinômios p_1 e p_2 de grau zero em (5.12)). Substituímos agora (5.14) na equação (5.13) e obtemos:

$$-2\alpha_1 \text{sen } t + 2\alpha_2 \cos t = \text{sen } t.$$

Essa última igualdade nos dá $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, donde

$$x(t) = -\frac{1}{2} t \cos t$$

é uma solução particular de (5.13) e portanto a solução geral de (5.13) é:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \text{sen } t - \frac{1}{2} t \cos t,$$

com c_1 e c_2 constantes reais.

6. SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Um sistema linear de n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem é um sistema de equações da forma

$$(6.1) \quad \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t), \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t), \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t), \end{cases}$$

em que a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$ e b_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são funções a valores reais dadas definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Uma solução para esse sistema é uma lista x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, de funções deriváveis a valores reais definidas em I de modo que todas as igualdades em (6.1) sejam satisfeitas para todo $t \in I$. O sistema é dito *de coeficientes constantes* se todas as funções a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ forem constantes e é dito *homogêneo* se $b_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Nós optamos por apresentar os resultados e definições desta seção apenas no contexto de funções a valores reais, mas todos eles se generalizam sem dificuldades para o caso complexo. Na verdade, um sistema linear de n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com coeficientes complexos é equivalente a um sistema linear de $2n$ equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com coeficientes reais; para ver isso, basta tratar as partes real e imaginária de cada incógnita complexa do sistema como se fossem duas incógnitas reais. Assim, os resultados sobre o caso complexo podem ser obtidos como corolários dos resultados sobre o caso real no contexto de sistemas. Também não há dificuldades em tratar o caso complexo diretamente, já que as técnicas de resolução de equações e as demonstrações dos teoremas são totalmente análogas ao caso real.

Um sistema linear de equações diferenciais pode ser escrito de modo mais compacto usando notação matricial: para cada $t \in I$, consideramos a matriz $A(t) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ cujo elemento na linha i e coluna j é $a_{ij}(t)$ e a matriz coluna $B(t)$ cujo elemento na i -ésima linha é $b_i(t)$. O sistema (6.1) é então equivalente a

$$(6.2) \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$

em que $X(t)$ denota a matriz coluna cujo elemento na i -ésima linha é $x_i(t)$. Como é usual, identificamos matrizes coluna de n linhas com elementos de \mathbb{R}^n , de modo que B e X identificam-se com funções definidas em I a valores em \mathbb{R}^n . A função A é uma função definida em I a valores no espaço $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ das matrizes reais $n \times n$ (que pode ser identificado com \mathbb{R}^{n^2}).

Sistemas lineares de equações diferenciais possuem propriedades totalmente análogas àquelas discutidas na Seção 2: o conjunto solução de um sistema homogêneo é um subespaço vetorial do espaço das funções $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$

e a solução geral do sistema inhomogêneo é obtida somando uma solução particular do sistema inhomogêneo com a solução geral do sistema homogêneo. Há também um teorema de existência e unicidade para sistemas.

Teorema 6.1. *Se as funções a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ e b_i , $i = 1, \dots, n$, são contínuas num intervalo I , então para todo $t_0 \in I$ e todo $u \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução $X = (x_1, \dots, x_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ do sistema (6.1) satisfazendo a condição inicial $X(t_0) = u$.*

Demonstração. Omitida. □

Corolário 6.2. *Se as funções a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, são contínuas num intervalo I e se $b_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, então o espaço solução do sistema homogêneo (6.1) tem dimensão n .*

Demonstração. Se S é o espaço solução do sistema homogêneo e se $t_0 \in I$ é um ponto qualquer, então a transformação $T : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $T(X) = X(t_0)$, para todo $X \in S$ é linear. Segue do Teorema 6.1 que T é bijetora e disso que S e \mathbb{R}^n possuem a mesma dimensão. □

Corolário 6.3. *Suponha que as funções a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, sejam contínuas num intervalo I e que $b_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Dadas soluções X_1, \dots, X_k do sistema homogêneo (6.1) e dado $t_0 \in I$, vale que as funções X_1, \dots, X_k são linearmente independentes se, e somente se, os vetores $X_1(t_0), \dots, X_k(t_0)$ de \mathbb{R}^n forem linearmente independentes.*

Demonstração. Segue do fato que a transformação linear T definida na demonstração do Corolário 6.2 é bijetora e do fato que transformações lineares bijetoras levam conjuntos linearmente independentes em conjuntos linearmente independentes. □

Diferentemente do caso de equações diferenciais lineares de primeira ordem (Seção 4), não há uma técnica para se encontrar fórmulas explícitas para soluções de sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem. De fato, como veremos na Subseção 6.1 a seguir, toda equação diferencial linear de ordem n é equivalente a um certo sistema linear de n equações diferenciais de primeira ordem e se houvesse uma técnica para se encontrar soluções para sistemas de primeira ordem, essa técnica poderia ser usada para encontrar soluções para equações diferenciais de ordem n arbitrária.

Veremos na Subseção 6.2 que há uma técnica para se encontrar soluções de sistemas inhomogêneos a partir da solução geral do sistema homogêneo. No caso homogêneo, há uma técnica para encontrar a solução geral no caso em que o sistema tem coeficientes constantes. De fato, quando a matriz de coeficientes A (que não depende de t) é diagonalizável, determinamos a solução geral do sistema homogêneo $X'(t) = AX(t)$ diagonalizando a matriz A (veja [1]). Quando a matriz A não é diagonalizável ainda é possível encontrar a solução geral do sistema homogêneo $X'(t) = AX(t)$ usando a chamada *forma canônica de Jordan* de A . A solução geral de um sistema homogêneo com coeficientes constantes também pode ser escrita em termos

da exponencial da matriz de coeficientes. Dada uma matriz quadrada A com entradas reais (ou complexas), definimos a sua *exponencial* através da série de Taylor

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

em que denotamos por A^0 a matriz identidade. Vale que a solução geral do sistema homogêneo com coeficientes constantes $X'(t) = AX(t)$ é

$$X(t) = e^{tA}u,$$

em que u é uma constante arbitrária de \mathbb{R}^n . Note que essa é precisamente a solução satisfazendo a condição inicial $X(0) = u$. Mais geralmente, a solução X satisfazendo a condição inicial $X(t_0) = u$ é dada por:

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}u.$$

Apesar de permitir escrever soluções de sistemas com coeficientes constantes de forma compacta, a exponencial de matrizes ajuda pouco na hora de determinar expressões mais explícitas para a solução geral: de fato, o jeito padrão de calcular a exponencial e^A é diagonalizando a matriz A (ou usando sua forma canônica de Jordan, se a matriz não for diagonalizável), de modo que determinar e^{tA} é um trabalho equivalente ao de resolver o sistema $X'(t) = AX(t)$ diagonalizando A (ou usando sua forma canônica de Jordan).

Observamos que a exponencial de matrizes *não possui* exatamente as mesmas propriedades usuais da exponencial de números reais ou complexos. Por exemplo, a fórmula $e^{A+B} = e^A e^B$ *não vale em geral* para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesmo tamanho; a fórmula vale, por exemplo, se A e B comutam, isto é, se $AB = BA$. Também as fórmulas

$$(6.3) \quad \frac{d}{dt}e^{A(t)} = A'(t)e^{A(t)} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}e^{A(t)} = e^{A(t)}A'(t)$$

não valem em geral se A é uma função derivável num intervalo I tomando valores nas matrizes $n \times n$. As fórmulas (6.3) valem, por exemplo, para aqueles valores de t em que as matrizes $A(t)$ e $A'(t)$ comutam. É o fato que as fórmulas (6.3) falham em geral que faz com que as técnicas que estudamos na Seção 4 para resolver equações diferenciais de primeira ordem não funcionem em geral para sistemas de equações diferenciais de primeira ordem.

Observação 6.4. Sejam X_1, X_2, \dots, X_n soluções do sistema homogêneo

$$(6.4) \quad X'(t) = A(t)X(t),$$

em que $A : I \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é uma função contínua definida no intervalo I . Se para cada $t \in I$ consideramos a matriz $\mathfrak{X}(t) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ cujas colunas são

$$(6.5) \quad X_1(t), \quad X_2(t), \quad \dots, \quad X_n(t),$$

então a função $\mathfrak{X} : I \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ satisfaz a condição

$$(6.6) \quad \mathfrak{X}'(t) = A(t)\mathfrak{X}(t),$$

para todo $t \in I$, isto é, \mathfrak{X} satisfaz uma equação com o mesmo formato que (6.4), com a diferença que em (6.4) temos que $X(t)$ está em \mathbb{R}^n e em (6.6) temos que $\mathfrak{X}(t)$ está em $M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Para ver que a igualdade (6.6) vale, note que para todo $i = 1, 2, \dots, n$ a igualdade entre a i -ésima coluna de $\mathfrak{X}'(t)$ e a i -ésima coluna de $A(t)\mathfrak{X}(t)$ é equivalente a $X_i'(t) = A(t)X_i(t)$. Como a matriz $\mathfrak{X}(t)$ é quadrada, podemos considerar o seu determinante

$$W(t) = \det(\mathfrak{X}(t)),$$

para todo $t \in I$. Usando (6.6) e propriedades da derivada de determinantes, verifica-se que a função $W : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a equação diferencial linear homogênea de primeira ordem

$$(6.7) \quad W'(t) = \operatorname{tr}(A(t))W(t),$$

em que $\operatorname{tr}(A(t))$ denota o *traço* de matriz $A(t)$, isto é, a soma dos elementos na diagonal principal de $A(t)$. Note que a equação (6.7) pode ser resolvida usando as técnicas da Seção 4 e portanto conseguimos calcular o determinante da matriz de soluções $\mathfrak{X}(t)$ mesmo sem conhecer as soluções! Como (6.7) é uma equação linear homogênea de primeira ordem, temos que se W é uma solução não nula de (6.7), então todas as outras soluções de (6.7) são simplesmente obtidas considerando uma constante vezes W . Essas várias soluções W de (6.7) correspondem a diferentes possíveis escolhas para as soluções (6.5) usadas para montar a matriz $\mathfrak{X}(t)$. Se essas soluções forem linearmente dependentes, então a função W correspondente será identicamente nula (Corolário 6.3) e se essas soluções forem linearmente independentes então a função W correspondente será uma solução não nula de (6.7). Essas curiosidades sobre o determinante da matriz de soluções $\mathfrak{X}(t)$ terão consequências relevantes (veja Observação 6.7) quando considerarmos sistemas de primeira ordem obtidos de uma equação diferencial linear de ordem n pelo truque de redução da ordem que estudaremos na Subseção 6.1 logo a seguir.

6.1. O truque de redução da ordem. Dada uma equação diferencial linear

$$(6.8) \quad x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t)$$

de ordem n podemos montar um sistema linear de n equações diferenciais de primeira ordem que é equivalente a (6.8) criando novas incógnitas cujos valores serão forçosamente iguais às derivadas de x . Mais explicitamente, temos que (6.8) é equivalente ao seguinte sistema linear de n equações diferenciais de primeira ordem:

$$(6.9) \quad \begin{cases} x'_1(t) = x_2(t), \\ x'_2(t) = x_3(t), \\ \quad \quad \quad \vdots \\ x'_{n-1}(t) = x_n(t), \\ x'_n(t) = -a_0(t)x_1(t) - a_1(t)x_2(t) - \cdots - a_{n-1}(t)x_n(t) + b(t). \end{cases}$$

De fato, verifica-se imediatamente que x é solução de (6.8) se, e somente se, x é $n - 1$ vezes derivável e a n -upla (x_1, \dots, x_n) definida por

$$(6.10) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$$

é solução de (6.9). Essa observação nos permite obter resultados sobre equações diferenciais lineares de ordem n como corolário de resultados sobre sistemas lineares de n equações diferenciais de primeira ordem. Por exemplo, usando essa observação obtemos o Teorema 3.1 de existência e unicidade para soluções de equações diferenciais lineares de ordem n como consequência imediata do Teorema 6.1 de existência e unicidade para soluções de sistemas lineares de n equações diferenciais de primeira ordem.

Dada uma função x a valores reais que é $n - 1$ vezes derivável num intervalo I , definimos uma função $\mathbb{D}(x) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tomando $\mathbb{D}(x)$ igual ao lado direito da igualdade (6.10), isto é

$$(6.11) \quad \mathbb{D}(x)(t) = (x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t)),$$

para todo $t \in I$. É claro que \mathbb{D} é uma transformação linear do espaço das funções $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ que são $n - 1$ vezes deriváveis no espaço das funções de I em \mathbb{R}^n . A equivalência discutida acima entre equações diferenciais de ordem n e sistemas de n equações diferenciais de primeira ordem nos diz que \mathbb{D} estabelece uma bijeção linear entre o espaço solução da equação homogênea de ordem n

$$(6.12) \quad x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0$$

e o espaço solução do sistema homogêneo de primeira ordem:

$$(6.13) \quad \begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = x_3(t), \\ \quad \quad \quad \vdots \\ x_{n-1}'(t) = x_n(t), \\ x_n'(t) = -a_0(t)x_1(t) - a_1(t)x_2(t) - \cdots - a_{n-1}(t)x_n(t). \end{cases}$$

Como uma transformação linear bijetora leva bases em bases, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 6.5. *Se x_1, x_2, \dots, x_n for uma base do espaço solução da equação diferencial linear homogênea (6.12), então*

$$\mathbb{D}(x_1), \quad \mathbb{D}(x_2), \quad \dots, \quad \mathbb{D}(x_n)$$

será uma base do espaço solução do sistema homogêneo de primeira ordem (6.13), em que \mathbb{D} é definida em (6.11). \square

Observação 6.6. Note que o truque de redução da ordem explicado nesta subseção pode também ser usado para transformar um sistema de n equações diferenciais lineares de ordem m num sistema de nm equações diferenciais lineares de primeira ordem. Por isso, quando estudamos a teoria de sistemas de equações diferenciais, podemos sempre nos restringir sem perda de generalidade ao caso de sistemas de primeira ordem.

Observação 6.7. Quando consideramos o sistema de primeira ordem homogêneo (6.13) obtido pelo truque de redução da ordem a partir de uma equação diferencial linear homogênea (6.12), então o determinante W de uma matriz de soluções \mathfrak{X} discutido na Observação 6.4 é justamente o Wronskiano (3.6). Nesse caso, o traço da matriz de coeficientes $A(t)$ é $-a_{n-1}(t)$ e a equação (6.7) fica:

$$W'(t) + a_{n-1}(t)W(t) = 0.$$

Como já foi mencionado na Observação 6.4, podemos usar essa equação de primeira ordem e as técnicas da Seção 4 para determinar W mesmo sem conhecer as soluções do sistema (6.13). Agora, se por alguma razão nós conhecermos $n - 1$ soluções linearmente independentes x_1, x_2, \dots, x_{n-1} para a equação (6.12), então a igualdade (3.6) que define W nos dá uma equação diferencial linear inhomogênea de ordem $n - 1$ para a n -ésima solução desconhecida x_n se calcularmos o determinante que aparece em (3.6) por expansão de cofatores na última coluna. Em particular, se $n = 2$, essa equação é de primeira ordem e pode ser resolvida pelo método da Seção 4. Assim, para equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem, quando conhecemos uma solução não nula, podemos usar esse método para determinar uma segunda solução linearmente independente da primeira e assim a solução geral.

6.2. O método de variação das constantes. Considere o sistema linear inhomogêneo de equações diferenciais

$$(6.14) \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$

em que $A : I \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções contínuas definidas num intervalo I . Como vimos no Corolário 6.2, o espaço solução do sistema homogêneo

$$(6.15) \quad X'(t) = A(t)X(t)$$

é um espaço vetorial de dimensão n e portanto encontrar a solução geral de (6.15) é equivalente a encontrar n soluções linearmente independentes de (6.15). De fato, se X_1, X_2, \dots, X_n são soluções linearmente independentes de (6.15), então essas soluções constituem uma base do espaço solução e a solução geral é dada por

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t),$$

em que c_1, \dots, c_n são constantes reais. Vamos ver agora como obter uma solução particular para o sistema inhomogêneo (6.14) a partir de uma base do espaço solução do sistema homogêneo (6.15). Para isso, vamos “variar as constantes” c_1, c_2, \dots, c_n , isto é, vamos procurar uma solução do sistema inhomogêneo da forma

$$(6.16) \quad X(t) = c_1(t)X_1(t) + \dots + c_n(t)X_n(t),$$

em que c_1, c_2, \dots, c_n agora serão funções deriváveis a valores reais definidas no intervalo I . Derivando os dois lados da igualdade (6.16) e usando o fato que cada X_i é solução do sistema homogêneo (6.15), obtemos:

$$X'(t) = A(t)X(t) + c_1'(t)X_1(t) + \dots + c_n'(t)X_n(t).$$

Daí segue que a função X definida em (6.16) é solução do sistema inhomogêneo (6.14) se, e somente se, as funções c_i satisfazem:

$$c_1'(t)X_1(t) + \dots + c_n'(t)X_n(t) = B(t),$$

para todo $t \in I$. Em vista do Corolário 6.3, como X_1, X_2, \dots, X_n são soluções linearmente independentes do sistema homogêneo (6.15), temos que

$$(6.17) \quad X_1(t), \quad X_2(t), \quad \dots, \quad X_n(t)$$

é uma base de \mathbb{R}^n para todo $t \in I$ e portanto podemos, para cada $t \in \mathbb{R}$, obter escalares $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)$ de modo que

$$\alpha_1(t)X_1(t) + \dots + \alpha_n(t)X_n(t) = B(t).$$

Os escalares $\alpha_i(t)$ são nada mais do que as coordenadas do vetor $B(t)$ na base (6.17) de \mathbb{R}^n e podem ser encontrados simplesmente resolvendo um sistema linear de n equações. As funções α_i obtidas dessa forma serão contínuas, se a função B for contínua. Podemos agora escolher funções $c_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ que sejam primitivas das funções α_i e daí a função X definida em (6.16) será uma solução do sistema inhomogêneo (6.14).

Combinando essa técnica com o truque de redução da ordem estudado na Subseção 6.1, obtemos então uma técnica para produzir uma solução particular para uma equação diferencial linear inhomogênea de ordem n a partir da solução geral da equação diferencial linear homogênea correspondente. De fato, uma base de soluções para uma equação diferencial linear homogênea de ordem n nos dá através da transformação \mathbb{D} definida em (6.11) uma base de soluções para o sistema homogêneo de n equações diferenciais lineares de primeira ordem obtido pelo truque de redução da ordem (Teorema 6.5).

Exemplo 6.8. Considere a equação diferencial inhomogênea de segunda ordem:

$$(6.18) \quad x''(t) + x(t) = \text{sen}^2 t.$$

As funções

$$x_1(t) = \cos t \quad \text{e} \quad x_2(t) = \text{sen } t$$

formam uma base do espaço solução da equação homogênea correspondente:

$$x''(t) + x(t) = 0.$$

Usando o truque de redução da ordem, obtemos o sistema

$$(6.19) \quad \begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -x(t) + \text{sen}^2 t, \end{cases}$$

que é equivalente a (6.18), isto é, as soluções de (6.19) são da forma (x, x') , com x uma solução de (6.18). Temos então uma base X_1, X_2 para o espaço solução do sistema homogêneo associado a (6.19) dada por

$$\begin{aligned} X_1(t) &= (x_1(t), x_1'(t)) = (\cos t, -\text{sen } t), \\ X_2(t) &= (x_2(t), x_2'(t)) = (\text{sen } t, \cos t). \end{aligned}$$

Usando o método de variação das constantes, temos que uma solução particular para o sistema inhomogêneo (6.19) é da forma

$$(6.20) \quad X(t) = c_1(t)X_1(t) + c_2(t)X_2(t),$$

em que $c_1' = \alpha_1$, $c_2' = \alpha_2$, as funções α_1 e α_2 são caracterizadas por

$$(6.21) \quad \alpha_1(t)X_1(t) + \alpha_2(t)X_2(t) = B(t)$$

e $B(t) = (0, \text{sen}^2 t)$. Temos que (6.21) é equivalente a:

$$(6.22) \quad \begin{cases} \alpha_1(t) \cos t + \alpha_2(t) \text{sen } t = 0, \\ -\alpha_1(t) \text{sen } t + \alpha_2(t) \cos t = \text{sen}^2 t; \end{cases}$$

resolvendo o sistema linear (6.22) obtemos

$$\alpha_1(t) = -\text{sen}^3 t, \quad \alpha_2(t) = \text{sen}^2 t \cos t,$$

e daí encontramos c_1 e c_2 calculando primitivas para as funções α_1 e α_2 :

$$c_1(t) = -\int \text{sen}^3 t \, dt = \cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t, \quad c_2(t) = \int \text{sen}^2 t \cos t \, dt = \frac{1}{3} \text{sen}^3 t.$$

Definindo X por (6.20), sabemos então que X é solução do sistema inhomogêneo (6.19) e portanto X é da forma $X = (x, x')$, em que x é solução da equação inhomogênea (6.18). Daí

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) = \cos^2 t + \frac{1}{3}(\sin^4 t - \cos^4 t)$$

é uma solução particular para a equação inhomogênea (6.18) e a solução geral é

$$x(t) = \cos^2 t + \frac{1}{3}(\sin^4 t - \cos^4 t) + c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

em que c_1 e c_2 são constantes reais.

7. DEMONSTRAÇÃO DOS RESULTADOS DA SEÇÃO 5

Demonstraremos aqui os resultados da Seção 5 usando apenas alguns fatos elementares de Álgebra Linear e Cálculo. Não usaremos o teorema de existência e unicidade para soluções de equações diferenciais. Como queremos demonstrar ao mesmo tempo resultados sobre equações diferenciais com coeficientes reais ou complexos, usaremos a letra \mathbb{K} para se referir a \mathbb{R} ou a \mathbb{C} . Alguns enunciados serão apresentados apenas para números complexos, quando for o caso que o enunciado com números complexos implica trivialmente o enunciado correspondente para números reais. Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes em \mathbb{K} e, para todo inteiro não negativo n , por $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ o subespaço de $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ formado pelos polinômios de grau menor ou igual a n (incluindo o polinômio nulo, é claro). Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, denotamos por E_λ a função $E_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ definida pela exponencial

$$E_\lambda(t) = e^{\lambda t},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Denotamos também por $E_\lambda \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ o subespaço do espaço vetorial das funções de \mathbb{R} em \mathbb{K} formado pelas funções que se escrevem como o produto de E_λ por um elemento de $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$, ou seja:

$$E_\lambda \mathcal{P}_n(\mathbb{K}) = \{pE_\lambda : p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{K})\}.$$

Similarmente, definimos $E_\lambda \mathcal{P}(\mathbb{K}) = \{pE_\lambda : p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})\}$.

A primeira coisa que precisamos é definir o que significa aplicar um polinômio numa transformação linear. Como veremos, essa definição aparentemente inofensiva é extremamente poderosa.

Definição 7.1. Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear. Se

$$P(\Lambda) = a_n \Lambda^n + a_{n-1} \Lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \Lambda + a_0$$

é um polinômio com coeficientes em \mathbb{K} , então denotamos por $P(T)$ a transformação linear de V definida por

$$(7.1) \quad P(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \cdots + a_0 T + a_0 \mathbf{I},$$

em que $I : V \rightarrow V$ denota a transformação identidade e, para todo inteiro positivo k , denotamos por T^k a composição $T \circ T \circ \cdots \circ T$ de T com si próprio k vezes.

É conveniente definir $T^0 = I$ para escrever (7.1) mais abreviadamente usando o somatório $P(T) = \sum_{k=0}^n a_k T^k$. É fácil verificar que se P e Q são polinômios então

$$(P + Q)(T) = P(T) + Q(T) \quad \text{e} \quad (PQ)(T) = P(T) \circ Q(T),$$

para qualquer transformação linear $T : V \rightarrow V$. São essas identidades simples que concentram toda a “mágica” que permite demonstrar com facilidade os resultados da Seção 5.

No que segue, consideramos o espaço vetorial das funções $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ e a transformação linear D nesse espaço vetorial definida por $D(x) = x'$, isto é, D é o *operador derivada*. Usando essa linguagem, a equação diferencial homogênea com coeficientes constantes (5.1) pode ser escrita na forma compacta

$$(7.2) \quad P(D)(x) = 0,$$

em que P é o polinômio característico de (5.1). Há um detalhe a ser esclarecido aqui: as soluções de (7.2) incluem apenas funções de classe C^∞ , já que o domínio da transformação linear $P(D)$ é formado só por funções de classe C^∞ . Para que fique claro que (7.2) é realmente equivalente à equação original (5.1), devemos esclarecer que (5.1) também só tem soluções de classe C^∞ . Mas isso é fácil de verificar, notando que a n -ésima derivada de uma solução x de (5.1) se escreve como combinação linear das derivadas de x de ordem menor do que n . Daí segue que a n -ésima derivada da solução x é também derivável e portanto que x é $n + 1$ vezes derivável. Iterando esse argumento (a rigor, fazendo uma prova por indução finita), mostra-se que a solução x é de classe C^∞ . O mesmo argumento prova na verdade que toda solução da equação mais geral (3.1) é de classe C^∞ , desde que os coeficientes a_k e o lado direito b sejam de classe C^∞ .

Precisamos agora de um resultado simples de Cálculo.

Lema 7.2. *Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função de classe C^∞ , então*

$$(7.3) \quad (D - \lambda I)(xE_\lambda) = D(x)E_\lambda = x'E_\lambda$$

e portanto

$$(7.4) \quad (D - \lambda I)^k(xE_\lambda) = D^k(x)E_\lambda = x^{(k)}E_\lambda,$$

para todo inteiro não negativo k .

Demonstração. Para mostrar (7.3) basta notar que $E'_\lambda = \lambda E_\lambda$ e portanto:

$$(D - \lambda I)(xE_\lambda) = (xE_\lambda)' - \lambda xE_\lambda = x'E_\lambda.$$

Aplicando $D - \lambda I$ novamente obtemos

$$(D - \lambda I)^2(xE_\lambda) = (D - \lambda I)(x'E_\lambda) = x''E_\lambda,$$

em que usamos (7.3) com x' no lugar de x . A igualdade (7.4) segue facilmente iterando esse processo k vezes (ou, mais precisamente, usando (7.3) e indução finita em k). \square

Corolário 7.3. *Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ são polinômios relacionados pela igualdade*

$$P(\Lambda) = Q(\Lambda - \lambda),$$

então

$$P(D)(xE_\lambda) = Q(D)(x)E_\lambda,$$

para toda função $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ .

Demonstração. Note que se $Q(\Lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \Lambda^k$, então

$$P(\Lambda) = \sum_{k=0}^n a_k (\Lambda - \lambda)^k$$

e portanto

$$P(D)(xE_\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k (D - \lambda I)^k (xE_\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k D^k(x)E_\lambda = Q(D)(x)E_\lambda,$$

em que usamos (7.4). \square

Corolário 7.4. *Dado $\lambda \in \mathbb{K}$ e um inteiro $k \geq 1$, então o espaço das soluções a valores em \mathbb{K} da equação*

$$(7.5) \quad (D - \lambda I)^k(x) = 0$$

é $E_\lambda \mathcal{P}_{k-1}(\mathbb{K})$.

Demonstração. Toda função $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^∞ se escreve de modo único na forma $x = yE_\lambda$, com $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ uma função de classe C^∞ ; de fato, basta definir $y(t) = x(t)e^{-\lambda t}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Usando o Lema 7.2, obtemos

$$(D - \lambda I)^k(x) = (D - \lambda I)^k(yE_\lambda) = D^k(y)E_\lambda = y^{(k)}E_\lambda.$$

Como E_λ nunca se anula, temos que x é solução de (7.5) se, e somente se, $y^{(k)} = 0$. Mas $y^{(k)} = 0$ se, e somente se, a função y é um polinômio de grau menor do que k . \square

Corolário 7.5. *Se P é um polinômio complexo e λ é uma raiz complexa de P de multiplicidade $k \geq 1$, então as funções*

$$x_0(t) = e^{\lambda t}, \quad x_1(t) = te^{\lambda t}, \quad x_2(t) = t^2 e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad x_{k-1}(t) = t^{k-1} e^{\lambda t},$$

são soluções da equação diferencial $P(D)(x) = 0$.

Demonstração. Como λ é uma raiz de P de multiplicidade k , então P se fatora como $P(\Lambda) = Q(\Lambda)(\Lambda - \lambda)^k$, em que Q é um polinômio. Daí

$$P(D) = Q(D) \circ (D - \lambda I)^k.$$

Do Corolário 7.4 vem $(D - \lambda I)^k(x_j) = 0$, para $j = 0, 1, \dots, k-1$, e daí segue que:

$$P(D)(x_j) = Q(D)((D - \lambda I)^k(x_j)) = 0. \quad \square$$

Veja que conseguimos ir bem longe usando apenas propriedades elementares de polinômios avaliados em operadores lineares e um pouco de Cálculo! Para ir até o final precisamos de mais uma definição e dois resultados elementares de Álgebra Linear.

Definição 7.6. Uma transformação linear $N : V \rightarrow V$ num espaço vetorial V é chamada *nilpotente* se existe um inteiro positivo k tal que $N^k = 0$.

Lema 7.7. *Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} e $N : V \rightarrow V$ uma transformação linear nilpotente. Se $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ é um polinômio do qual zero é raiz, então $P(N)$ também é nilpotente.*

Demonstração. Como zero é raiz de P , podemos escrever $P(\Lambda) = \Lambda Q(\Lambda)$, em que Q é um polinômio. Daí, se k é um inteiro positivo, elevamos essa igualdade a k dos dois lados, obtendo:

$$P^k(\Lambda) = \Lambda^k Q^k(\Lambda);$$

avaliando em N , vem:

$$[P(N)]^k = P^k(N) = N^k Q^k(N).$$

Daí, escolhendo k com $N^k = 0$ vemos que também $[P(N)]^k = 0$. \square

Lema 7.8. *Se $N : V \rightarrow V$ é uma transformação linear nilpotente de um espaço vetorial V , então $I - N$ é uma bijeção de V .*

Demonstração. Seja k um inteiro positivo tal que $N^k = 0$. Note que se P e Q são os polinômios definidos por

$$P(\Lambda) = 1 - \Lambda \quad \text{e} \quad Q(\Lambda) = 1 + \Lambda + \Lambda^2 + \dots + \Lambda^{k-1},$$

então:

$$P(\Lambda)Q(\Lambda) = Q(\Lambda)P(\Lambda) = 1 - \Lambda^k.$$

Daí

$$P(N)Q(N) = Q(N)P(N) = I - N^k = I,$$

ou seja:

$$(I - N)Q(N) = Q(N)(I - N) = I.$$

Isso prova que $Q(N)$ é uma função inversa para $I - N$ e portanto que $I - N$ é uma função bijetora. \square

Corolário 7.9. *Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} e $N : V \rightarrow V$ uma transformação linear nilpotente. Se $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ é um polinômio do qual zero não é raiz, então a transformação $P(N)$ é bijetora.*

Demonstração. Seja $Q = P - P(0)$, de modo que $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ e zero é raiz de Q . Como $P = Q + P(0)$, temos

$$P(N) = Q(N) + P(0)I = P(0)(I - N')$$

em que $N' = -\frac{1}{P(0)}Q(N)$. Pelo Lema 7.7, $Q(N)$ é nilpotente e daí segue do Lema 7.8 que $P(N)$ é bijetor, já que $P(0) \neq 0$ e N' é nilpotente. \square

Corolário 7.10. *Se $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ é tal que zero não é raiz de P e se n é um inteiro não negativo, então a restrição de $P(D)$ a $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ é uma bijeção de $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$.*

Demonstração. Basta notar que a restrição de D a $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ é uma transformação nilpotente e usar o Corolário 7.9. \square

Corolário 7.11. *Seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Se $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ é tal que λ não é raiz de P e se n é um inteiro não negativo, então a restrição de $P(D)$ a $E_\lambda \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ é uma bijeção de $E_\lambda \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$.*

Demonstração. Defina $Q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ fazendo $Q(\Lambda) = P(\Lambda + \lambda)$, de modo que $P(\Lambda) = Q(\Lambda - \lambda)$ e o Corolário 7.3 nos dá

$$(7.6) \quad P(D)(pE_\lambda) = Q(D)(p)E_\lambda,$$

para todo $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$. De (7.6) segue que se $p, q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$, então:

$$(7.7) \quad P(D)(pE_\lambda) = qE_\lambda \iff Q(D)(p) = q.$$

Como λ não é raiz de P , temos que 0 não é raiz de Q e portanto o Corolário 7.10 nos dá que a restrição de $Q(D)$ a $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ é uma bijeção de $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$, isto é, para todo $q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ existe um único $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ tal que $Q(D)(p) = q$. Daí (7.7) implica que para todo elemento qE_λ de $E_\lambda \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ existe um único elemento pE_λ de $E_\lambda \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ tal que $P(D)(pE_\lambda) = qE_\lambda$. \square

Estamos agora em condições de provar o Teorema 5.10.

Demonstração do Teorema 5.10. Usando a terminologia adotada nesta seção, o enunciado do Teorema 5.10 fica assim: sejam $P, q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$; denote por n o grau de q . Vale que:

- (i) se λ não é raiz de P , então existe $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ de grau n tal que $P(D)(pE_\lambda) = qE_\lambda$;
- (ii) se λ é raiz de P de multiplicidade k , então existe $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ de grau n tal que $P(D)(\tilde{p}E_\lambda) = qE_\lambda$, em que $\tilde{p}(t) = t^k p(t)$.

O item (i) segue diretamente do Corolário 7.11: como λ não é raiz de P , então a restrição de $P(D)$ a $E_\lambda \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ é uma bijeção de $E_\lambda \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ e portanto dado $q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$, existe $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ tal que $P(D)(pE_\lambda) = qE_\lambda$. Resta só notar que se o grau de q é n , então o grau de p não pode ser menor do que n , senão pE_λ estaria em $E_\lambda \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K})$, donde $qE_\lambda = P(D)(pE_\lambda)$ também estaria em $E_\lambda \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{K})$ e portanto q teria grau menor do que n também.

Para provar o item (ii), escrevemos

$$P(\Lambda) = Q(\Lambda)(\Lambda - \lambda)^k,$$

em que $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ é tal que $Q(\lambda) \neq 0$. Usando o resultado do item (i), obtemos $r \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ de grau n tal que:

$$(7.8) \quad Q(D)(rE_\lambda) = qE_\lambda.$$

Dado $\tilde{p} \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, usando o Lema 7.2 obtemos:

$$(7.9) \quad P(D)(\tilde{p}E_\lambda) = Q(D)((D - \lambda I)^k(\tilde{p}E_\lambda)) = Q(D)(\tilde{p}^{(k)}E_\lambda).$$

Seja então $\tilde{p} \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ tal que a k -ésima derivada de \tilde{p} seja igual a r ; podemos jogar fora os termos de \tilde{p} que tenham expoente menor do que k , já que esses desaparecem quando calculamos a k -ésima derivada. Daí $\tilde{p}(t) = t^k p(t)$, para algum $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ de grau n e segue de (7.8) e (7.9) que:

$$P(D)(\tilde{p}E_\lambda) = qE_\lambda. \quad \square$$

O lema a seguir nos dará um conjunto de geradores para o espaço solução de uma equação diferencial linear homogênea com coeficientes constantes.

Lema 7.12. *Seja $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ um polinômio que se fatora como*

$$(7.10) \quad P(\Lambda) = (\Lambda - \lambda_1)^{k_1} (\Lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\Lambda - \lambda_m)^{k_m},$$

em que $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ são distintos e k_1, \dots, k_m são inteiros positivos. Temos que o espaço solução da equação diferencial $P(D)(x) = 0$ é a soma:

$$(7.11) \quad E_{\lambda_1} \mathcal{P}_{k_1-1}(\mathbb{K}) + E_{\lambda_2} \mathcal{P}_{k_2-1}(\mathbb{K}) + \cdots + E_{\lambda_m} \mathcal{P}_{k_m-1}(\mathbb{K}).$$

Demonstração. Segue do Corolário 7.5 que $E_{\lambda_s} \mathcal{P}_{k_s-1}(\mathbb{K})$ está contido no espaço solução de $P(D)(x) = 0$ para todo $s = 1, \dots, m$ donde segue que a soma (7.11) também está contida no espaço solução. Para mostrar a outra inclusão usamos indução no número m de raízes distintas. O caso $m = 1$ é simplesmente o Corolário 7.4. Supondo $m \geq 2$ e o resultado válido para polinômios com $m - 1$ raízes distintas, mostramos que o resultado vale com P dado por (7.10). Seja

$$Q(\Lambda) = (\Lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\Lambda - \lambda_m)^{k_m},$$

de modo que $P(\Lambda) = Q(\Lambda)(\Lambda - \lambda_1)^{k_1}$ e portanto:

$$(7.12) \quad P(D) = Q(D) \circ (D - \lambda_1 I)^{k_1}.$$

Pela hipótese de indução, o espaço solução de $Q(D)(x) = 0$ é a soma:

$$E_{\lambda_2} \mathcal{P}_{k_2-1}(\mathbb{K}) + \cdots + E_{\lambda_m} \mathcal{P}_{k_m-1}(\mathbb{K}).$$

Seja x tal que $P(D)(x) = 0$ e vamos mostrar que x pertence a (7.11). Tomando $y = (D - \lambda_1 I)^{k_1}(x)$, segue de (7.12) que $Q(D)(y) = 0$ e portanto y é da forma $y = \sum_{s=2}^m y_s$, em que $y_s \in E_{\lambda_s} \mathcal{P}_{k_s-1}(\mathbb{K})$, para $s = 2, \dots, m$. Pelo Corolário 7.11, temos que $(D - \lambda_1 I)^{k_1}$ se restringe a uma bijeção de $E_{\lambda_s} \mathcal{P}_{k_s-1}(\mathbb{K})$ e portanto existe $x_s \in E_{\lambda_s} \mathcal{P}_{k_s-1}(\mathbb{K})$ tal que

$$(D - \lambda_1 I)^{k_1}(x_s) = y_s,$$

para $s = 2, \dots, m$. Tomando $x_1 = x - \sum_{s=2}^m x_s$, temos que $x = \sum_{s=1}^m x_s$ e que:

$$(D - \lambda_1 I)^{k_1}(x_1) = (D - \lambda_1 I)^{k_1}(x) - \sum_{s=2}^m (D - \lambda_1 I)^{k_1}(x_s) = y - \sum_{s=2}^m y_s = 0.$$

Segue então do Corolário 7.4 que $x_1 \in E_{\lambda_1} \mathcal{P}_{k_1-1}(\mathbb{K})$ e portanto que x está em (7.11), como queríamos. \square

O lema abaixo será usado para mostrar que o conjunto de geradores que obteremos para o espaço solução de uma equação diferencial linear homogênea com coeficientes constantes é linearmente independente e é portanto uma base.

Lema 7.13. *Se $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ são distintos e se $p_1, \dots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ são tais que*

$$(7.13) \quad p_1 E_{\lambda_1} + \dots + p_m E_{\lambda_m} = 0,$$

então $p_1 = \dots = p_m = 0$.

Demonstração. Usamos indução em m . Se $m = 1$, o resultado segue do fato que a função E_{λ_1} nunca se anula. Supondo $m \geq 2$ e a versão do resultado com $m - 1$ polinômios verdadeira, mostramos a versão do resultado com m polinômios. Supondo (7.13) válida, tomamos um inteiro positivo k maior do que o grau de p_1 e aplicamos $(D - \lambda_1 I)^k$ aos dois lados da igualdade (7.13), obtendo

$$(7.14) \quad (D - \lambda_1 I)^k (p_2 E_{\lambda_2}) + \dots + (D - \lambda_1 I)^k (p_m E_{\lambda_m}) = 0,$$

já que pelo Lema 7.2 vale que:

$$(D - \lambda_1 I)^k (p_1 E_{\lambda_1}) = p_1^{(k)} E_{\lambda_1} = 0.$$

Para $s = 2, \dots, m$, temos que $(D - \lambda_1 I)^k (p_s E_{\lambda_s}) = q_s E_{\lambda_s}$ para algum polinômio $q_s \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ e daí (7.14) nos dá

$$q_2 E_{\lambda_2} + \dots + q_m E_{\lambda_m} = 0;$$

da hipótese de indução segue então que $q_s = 0$ para $s = 2, \dots, m$. O Corolário 7.11 implica que a restrição de $(D - \lambda_1 I)^k$ a $E_{\lambda_s} \mathcal{P}(\mathbb{K})$ é injetora para $s \geq 2$ e portanto de $q_s = 0$ concluímos que também $p_s = 0$. Usando agora (7.13) concluímos que $p_1 = 0$ e completamos a demonstração. \square

Corolário 7.14. *Dados $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ distintos e um inteiro não negativo k , temos que as funções*

$$x_{rs}(t) = t^r e^{\lambda_s t}, \quad r = 0, \dots, k, \quad s = 1, \dots, m$$

são linearmente independentes sobre \mathbb{K} .

Demonstração. Sejam $a_{rs} \in \mathbb{K}$, $r = 0, \dots, k$, $s = 1, \dots, m$, tais que:

$$\sum_{r=0}^k \sum_{s=1}^m a_{rs} x_{rs} = \sum_{r=0}^k \sum_{s=1}^m a_{rs} t^r e^{\lambda_s t} = 0.$$

Definindo

$$p_s(t) = \sum_{r=0}^k a_{rs} t^r,$$

temos que $\sum_{s=1}^m p_s E_{\lambda_s} = 0$. O Lema 7.13 nos dá então que $p_s = 0$, para $s = 1, \dots, m$ e de $p_s = 0$ vem que $a_{rs} = 0$, para todo $r = 0, \dots, k$. \square

Demonstração dos Teoremas 5.3 e 5.5. Para $s = 1, \dots, m$, temos que todo elemento de $E_{\lambda_s} \mathcal{P}_{k_s-1}(\mathbb{K})$ é combinação linear com coeficientes em \mathbb{K} das funções x_{rs} , $r = 0, 1, \dots, k_s - 1$. Segue então do Lema 7.12 que as funções

$$x_{rs}, \quad r = 0, 1, \dots, k_s - 1, \quad s = 1, 2, \dots, m$$

geram o espaço solução de $P(D)(x) = 0$. Finalmente, o Corolário 7.14 implica que essas funções são linearmente independentes. \square

REFERÊNCIAS

- [1] D. V. Tausk, *Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes*, <http://www.ime.usp.br/~tausk/texts/Sistemas-EDO.pdf>, 2008.