No que segue, o corpo de escalares dos espaços vetoriais é arbitrário e denotado por K.

1. **Lema.** *Sejam V um espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear. Se todo vetor não nulo de V é um autovetor de T, então T é um múltiplo da identidade.*

Demonstração. Se $v, w \in V \setminus \{0\}$ são autovetores de T correspondentes a autovalores distintos λ, μ, então $v + w \neq 0$ e $v + w$ não é um autovetor de T; de fato, $T(v + w) = \lambda v + \mu w$ não é múltiplo de $v + w$, já que v e w são linearmente independentes. Logo todos os vetores não nulos de V são autovetores de T correspondentes ao mesmo autovalor e a conclusão segue. $\square$

Recorde que um *hiperplano* de um espaço vetorial V é o núcleo de um funcional linear $\alpha : V \to K$ não nulo.

2. **Lema.** *Se V é um espaço vetorial e $T : V \to V$ é um operador linear que não é múltiplo da identidade, então existe um hiperplano W de V que não é invariante por T.*

Demonstração. Pelo Lema 1, existe $v \in V$ não nulo que não é autovetor de T. Daí v e $T(v)$ são linearmente indepedentes e portanto existe um funcional linear $\alpha : V \to K$ que anula v, mas não anula $T(v)$. Assim $W = \mathrm{Ker}(\alpha)$ é um hiperplano que não é invariante por T, já que $v \in W$ e $T(v) \notin W$. $\square$

3. **Lema.** *Se V é um espaço vetorial e W é um subespaço próprio de V, então $V \setminus W$ gera V. Em particular, V possui uma base disjunta de W.*

Demonstração. Basta ver que todo vetor de W pertence ao subespaço gerado por $V \setminus W$. Para isso, fixe $v \in V \setminus W$ e note que, para todo $w \in W$, temos

$$w = (v + w) - v,$$

com $v + w, v \in V \setminus W$. $\square$

4. **Proposição.** *Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita. Se T não é múltiplo da identidade, então existe uma base $\mathcal{B}$ de V tal que no máximo uma entrada na diagonal principal da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é não nula.*

Demonstração. Denote por n a dimensão de V. Pelo Lema 2, existe um hiperplano W de V que não é invariante por T. Daí

$$W \cap T^{-1}[W] = \big\{w \in W : T(w) \in W\big\}$$

é um subespaço próprio de W e portanto, pelo Lema 3, existe uma base $(e_i)_{i=1}^{n-1}$ de W disjunta de $W \cap T^{-1}[W]$. Temos então que, para todo $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, a sequência $\big(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, T(e_i)\big)$ é uma base de V e portanto existe um funcional linear $\alpha_i : V \to K$ tal que $\alpha_i(e_i) = 1$,

$\alpha_i(e_j) = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n-1$ diferente de i e $\alpha_i\big(T(e_i)\big) = 0$. Seja $S : V \to K^{n-1}$ a transformação linear dada por:

$$S(v) = \big(\alpha_1(v), \alpha_2(v), \ldots, \alpha_{n-1}(v)\big), \quad v \in V.$$

Como a transformação linear S manda a base $(e_i)_{i=1}^{n-1}$ de W na base canônica de K^{n-1}, temos que $S|_W : W \to K^{n-1}$ é um isomorfismo e portanto $\mathrm{Ker}(S)$ é um subespaço de dimensão 1 de V tal que $V = W \oplus \mathrm{Ker}(S)$. Seja $e_n \in \mathrm{Ker}(S)$ um vetor não nulo, de modo que $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^{n}$ é uma base de V. Dado $i = 1, 2, \ldots, n-1$, como $\alpha_i(e_i) = 1$ e $\alpha_i(e_j) = 0$, para $j = 1, 2, \ldots, n$ diferente de i, temos que α_i é o funcional que associa a cada vetor de V a sua i-ésima coordenada na base $\mathcal{B}$. Logo a i-ésima entrada na diagonal principal de $[T]_{\mathcal{B}}$ é $\alpha_i\big(T(e_i)\big) = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. $\square$

5. **Corolário.** *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e igual a n e seja $T : V \to V$ um operador linear. Temos que o traço de T é nulo se, e somente se, uma das duas condições abaixo é satisfeita:*

(a) *a característica do corpo de escalares K é (não nula e) divisora de n e T é um múltiplo da identidade;*

(b) *existe uma base $\mathcal{B}$ de V tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ tem a diagonal nula.*

$\square$