TEORIA BÁSICA DE DETERMINANTES

DANIEL V. TAUSK

Neste texto apresentamos a teoria de determinantes para matrizes quadradas com entradas num anel comutativo. A primeira seção é dedicada ao estudo de permutações, em particular à noção de paridade de uma permutação. Na segunda seção desenvolvemos a teoria dos determinantes propriamente dita. Algumas noções elementares sobre estruturas algébricas necessárias para completa compreensão do texto são apresentadas num apêndice.

Em todo o texto, se $n \geq 0$ é um inteiro, então $I_n = \{1, \ldots, n\}$ denota o conjunto dos inteiros positivos que são menores ou iguais a n. Se X é um conjunto, então X^n denota o conjunto de todas as funções $\sigma : I_n \to X$ e $\mathfrak{S}_n$ denota o subconjunto de $(I_n)^n$ formado pelas funções $\sigma : I_n \to I_n$ que são bijetoras. Os elementos de $\mathfrak{S}_n$ são chamados de *permutações de n elementos*. O número de elementos de um conjunto finito X é denotado por $|X|$.

1. Permutações

Nesta seção, se X é um conjunto, denotamos por $\wp(X)$ o conjunto de todas as partes de X e por $\wp_2(X)$ o subconjunto de $\wp(X)$ formado pelas partes de X que tem exatamente dois elementos:

$$\wp_2(X) = \big\{A \in \wp(X) : |A| = 2\big\}.$$

Se $\sigma : X \to Y$ é uma função injetora, denotamos por $\sigma_* : \wp_2(X) \to \wp_2(Y)$ a função definida por:

$$\sigma_*\big(\{x_1, x_2\}\big) = \{\sigma(x_1), \sigma(x_2)\}, \quad x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2.$$

Obviamente, σ_* é bijetora, se σ o for. Em particular, dado um inteiro $n \geq 0$ e uma permutação $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, então a função $\sigma_* : \wp_2(I_n) \to \wp_2(I_n)$ é bijetora. Dizemos que σ *reverte* um elemento A de $\wp_2(I_n)$ se a restrição de σ a A for decrescente; em outras palavras, escrevendo $A = \{i_1, i_2\}$ com $i_1 < i_2$, temos que σ reverte A se e somente se $\sigma(i_1) > \sigma(i_2)$. Denotamos por $\mathfrak{r}(\sigma)$ o conjunto dos elementos de $\wp_2(I_n)$ que são revertidos por σ, isto é:

$$\mathfrak{r}(\sigma) = \big\{\{i_1, i_2\} : i_1, i_2 \in I_n,\ i_1 < i_2 \text{ e } \sigma(i_1) > \sigma(i_2)\big\}.$$

Definição 1.1. Dizemos que uma permutação $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ é *par* (resp., *ímpar*) se o número natural $|\mathfrak{r}(\sigma)|$ for par (resp., ímpar).

Obviamente, se $\sigma : I_n \to I_n$ é a permutação identidade, então $\mathfrak{r}(\sigma)$ é vazio, de modo que $|\mathfrak{r}(\sigma)| = 0$ e σ é par.

Date: 09 de junho de 2014.

Definição 1.2. Dados $i, j \in I_n$ distintos, então a *transposição* de i com j é a permutação $\mathfrak{t}_{ij} \in \mathfrak{S}_n$ definida por:

$$\mathfrak{t}_{ij}(i) = j, \quad \mathfrak{t}_{ij}(j) = i,$$

e $\mathfrak{t}_{ij}(k) = k$, para todo $k \in I_n$ distinto de i e de j.

Obviamente $\mathfrak{t}_{ij} = \mathfrak{t}_{ji}$ e $\mathfrak{t}_{ij} \circ \mathfrak{t}_{ij}$ é a permutação identidade, isto é, $\mathfrak{t}_{ij}$ é inversa de si mesma.

Exercício 1.3. Dados $i, j \in I_n$ com $i < j$, mostre que:

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{t}_{ij}) = \big\{\{i,k\} : i < k < j\big\} \cup \big\{\{k,j\} : i < k < j\big\} \cup \big\{\{i,j\}\big\}.$$

Conclua que toda transposição é uma permutação ímpar.

Exercício 1.4. Dados $i, j \in I_n$ com $i \le j$, então o *ciclo* com extremos i e j é a permutação $\mathfrak{z}_{ij} \in \mathfrak{S}_n$ definida por:

$$\mathfrak{z}_{ij}(k) = \begin{cases} k+1, & \text{se } i \le k < j, \\ i, & \text{se } k = j, \\ k, & \text{se } 1 \le k < i \text{ ou } j < k \le n. \end{cases}$$

Mostre que:

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{z}_{ij}) = \big\{\{k,j\} : i \le k < j\big\}$$

e conclua que $\mathfrak{z}_{ij}$ é par se e somente se $j - i$ é par.

Lema 1.5. *Se X e Y são conjuntos finitos, então os números naturais:*

$$\big|(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)\big| \quad e \quad |X| + |Y|$$

têm a mesma paridade, isto é, a diferença entre eles é par.

Demonstração. Basta notar que:

$$|X| = |X \setminus Y| + |X \cap Y|, \quad |Y| = |Y \setminus X| + |X \cap Y|,$$

e que:

$$\big|(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)\big| = |X \setminus Y| + |Y \setminus X|,$$

donde:

$$|X| + |Y| = \big|(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)\big| + 2\,|X \cap Y|.$$

□

Lema 1.6. *Se $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, então os números naturais:*

$$|\mathfrak{r}(\tau \circ \sigma)| \quad e \quad |\mathfrak{r}(\tau)| + |\mathfrak{r}(\sigma)|$$

têm a mesma paridade.

Demonstração. Dado $\{i_1, i_2\} \in \wp_2(I_n)$, temos que $\{i_1, i_2\}$ está em $\mathfrak{r}(\tau \circ \sigma)$ se e somente se vale uma das duas seguintes condições:

(a) $\{i_1, i_2\} \in \mathfrak{r}(\sigma)$ e $\{\sigma(i_1), \sigma(i_2)\} \notin \mathfrak{r}(\tau)$;
(b) $\{i_1, i_2\} \notin \mathfrak{r}(\sigma)$ e $\{\sigma(i_1), \sigma(i_2)\} \in \mathfrak{r}(\tau)$.

Escrevendo $X = \mathfrak{r}(\sigma)$ e

$$Y = \sigma_*^{-1}[\mathfrak{r}(\tau)] = \big\{\{i_1, i_2\} \in \wp_2(I_n) : \{\sigma(i_1), \sigma(i_2)\} \in \mathfrak{r}(\tau)\big\},$$

temos que a condição (a) é equivalente a $\{i_1, i_2\} \in X \setminus Y$ e que a condição (b) é equivalente a $\{i_1, i_2\} \in Y \setminus X$. Assim:

$$\mathfrak{r}(\tau \circ \sigma) = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Além do mais, $|Y| = |\mathfrak{r}(\tau)|$, já que a função σ_* é bijetora. A conclusão segue do Lema 1.5. □

Corolário 1.7. *A composição de duas permutações pares é par; a composição de uma permutação par com uma permutação ímpar é ímpar; a composição de duas permutações ímpares é par.* □

Corolário 1.8. *A inversa de uma permutação $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tem a mesma paridade que σ.*

Demonstração. Basta notar que $\sigma \circ \sigma^{-1}$ é a permutação identidade, que é par. □

Definição 1.9. O *sinal* de uma permutação $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, denotado por $\operatorname{sgn}(\sigma)$, é igual a 1, se σ é par, e igual a -1, se σ é ímpar.

Usando essa terminologia, o Corolário 1.7 pode ser reformulado assim:

Proposição 1.10. *Para quaisquer $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, temos:*

$$\operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma).$$ □

Como vimos no Exercício 1.3, toda transposição é uma permutação ímpar. Levando isso em conta, outra conseqüência imediata do Corolário 1.7 é o seguinte resultado.

Proposição 1.11. *Se $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k$, onde $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k \in \mathfrak{S}_n$ são transposições, então σ é par (resp., ímpar) se e somente se k é par (resp., ímpar).* □

Veremos que toda permutação é uma composição finita de transposições (Proposição 1.12 a seguir). Usualmente, define-se que uma permutação é par (resp., ímpar) quando pode ser escrita como composição de um número par (resp., ímpar) de transposições. A dificuldade com essa definição é que ela torna necessário mostrar que, se escrevemos uma permutação σ como a composição de k transposições, então a paridade de k não depende (embora o valor de k dependa) do modo que escrevemos σ como composição de transposições. Na abordagem que usamos, a definição da paridade de uma permutação σ foi dada em termos da paridade do número de elementos de $\mathfrak{r}(\sigma)$ e o fato que a nossa definição coincide com a usual é justamente o conteúdo da Proposição 1.11. O fato que a paridade de k não depende do modo que escrevemos σ como composição de transposições é também conseqüência da Proposição 1.11.

Proposição 1.12. *Se $n \geq 2$, então qualquer permutação $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ é igual à composição de um número finito*[1] *de transposições.*

Demonstração. Usamos indução em n. Se $n = 2$, então os únicos elementos de $\mathfrak{S}_n$ são a transposição $\mathfrak{t}_{12}$ e a permutação identidade, que é igual à composição de $\mathfrak{t}_{12}$ consigo mesma. Suponha que $n \geq 3$ e que todo elemento de $\mathfrak{S}_{n-1}$ seja igual à composição de um número finito de transposições. Seja $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Se $\sigma(n) = n$, então a restrição de σ a I_{n-1} é um elemento de $\mathfrak{S}_{n-1}$ e portanto se escreve como uma composição $\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$, em que cada $\tau_i \in \mathfrak{S}_{n-1}$ é uma transposição. A permutação $\tau_i' \in \mathfrak{S}_n$ que estende τ_i e satisfaz $\tau_i'(n) = n$ é também uma transposição e vale que $\sigma = \tau_1' \circ \cdots \circ \tau_k'$, donde σ se escreve como composição finita de transposições. Se $\sigma(n) = m \neq n$, definimos:

$$\bar{\sigma} = \mathfrak{t}_{mn} \circ \sigma \in \mathfrak{S}_n,$$

de modo que $\sigma = \mathfrak{t}_{mn} \circ \bar{\sigma}$. Como $\bar{\sigma}(n) = n$, temos que $\bar{\sigma}$ se escreve como composição de um número finito de transposições e portanto o mesmo vale para σ. □

2. Determinantes

Ao longo da seção, R denota sempre um anel comutativo (não necessariamente com unidade) e $M_n(R)$ denota o anel das matrizes $n \times n$ com entradas em R, onde n é um inteiro positivo. (Veja o Apêndice A para a definição de anel e das operações com matrizes.)

Definição 2.1. Dada $A \in M_n(R)$, então o *determinante* de A, denotado por $\det(A)$, é o elemento de R definido por:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \Big(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \Big). \tag{1}$$

Em (1), o produto de $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \mathbb{Z}$ por $\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \in R$ é entendido no sentido usual de multiplicação de elementos de um anel R por números inteiros: temos $1r = r$ e $(-1)r = -r$, para todo $r \in R$, sendo $-r$ o inverso aditivo (ou oposto) de r. (Veja Exemplo A.6 para a definição de nr, para $n \in \mathbb{Z}$ e $r \in R$.)

Exemplo 2.2. Se $A \in M_n(R)$ é uma *matriz diagonal*, i.e., se $A_{ij} = 0$ para todos $i, j \in I_n$ com $i \neq j$, então:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}.$$

De fato, se $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ é diferente da identidade, então existe $k \in I_n$ com $\sigma(k) \neq k$ e daí $A_{k\sigma(k)} = 0$, donde $\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} = 0$.

---

[1]Se convencionarmos que a composição de uma seqüência vazia de transposições é a permutação identidade, então o resultado também vale para $n = 0$ e para $n = 1$. Note que nesse caso não há nenhuma transposição em $\mathfrak{S}_n$ e que o único elemento de $\mathfrak{S}_n$ é a permutação identidade.

Antes de começarmos o desenvolvimento da teoria de determinantes, observamos um fato simples sobre somatórios e produtórios finitos de elementos de R que será usado freqüentemente ao longo do texto. Se $(c_i)_{i\in I}$ é uma família finita de elementos de R e $\rho : J \to I$ é uma função bijetora, então vale a igualdade:

$$\sum_{i\in I} c_i = \sum_{j\in J} c_{\rho(j)}. \tag{2}$$

Diremos que o somatório do lado direito da igualdade em (2) é obtido do somatório do lado esquerdo da igualdade pela *substituição de i por $\rho(j)$*. Como o anel R é comutativo, uma observação similar é válida para produtórios[2], isto é, temos:

$$\prod_{i\in I} c_i = \prod_{j\in J} c_{\rho(j)}.$$

Notamos também que, fixada $\tau \in \mathfrak{S}_n$, então as aplicações:

$$\mathfrak{S}_n \ni \sigma \longmapsto \sigma\circ\tau \in \mathfrak{S}_n, \quad \mathfrak{S}_n \ni \sigma \longmapsto \tau\circ\sigma \in \mathfrak{S}_n$$

são bijetoras, de modo que podem ser usadas para substituições de índices em somatórios e produtórios. Por fim, notamos que a aplicação:

$$\mathfrak{S}_n \ni \sigma \longmapsto \sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n$$

é também bijetora.

Começamos o estudo de determinantes mostrando a invariância por transposição. Dada uma matriz $A \in M_n(R)$, então a *matriz transposta* de A, denotada por $A^{\mathrm{t}} \in M_n(R)$, é definida da maneira usual, fazendo:

$$(A^{\mathrm{t}})_{ij} = A_{ji}, \quad i, j \in I_n.$$

Proposição 2.3 (determinante da transposta)**.** *Se $A \in M_n(R)$, então* $\det(A) = \det(A^{\mathrm{t}})$.

Demonstração. Segue diretamente da definição de determinante e da definição de A^{t} que:

$$\det(A^{\mathrm{t}}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\Big(\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n A_{\sigma(i)i}\Big).$$

Como $\sigma : I_n \to I_n$ é bijetora, podemos substituir i por $\sigma^{-1}(j)$ no produtório, obtendo:

$$\det(A^{\mathrm{t}}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\Big(\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{j=1}^n A_{j\sigma^{-1}(j)}\Big).$$

[2]Convencionamos que o somatório da família vazia é o elemento $0 \in R$ e, se R tiver unidade, que o produtório da família vazia é o elemento $1 \in R$. Usando essas convenções, temos que o determinante da matriz vazia $A \in M_0(R)$ é igual a 1; de fato, o conjunto das permutações $\mathfrak{S}_0$ tem um único elemento σ (a identidade do conjunto vazio), que é uma permutação par e o produtório vazio $\prod_{i=1}^0 A_{i\sigma(i)}$ é igual a 1. Quando R não tem unidade, não consideramos produtórios vazios.

Substitutindo σ por τ^{-1} no somatório e usando o Corolário 1.8, chegamos em:

$$\det(A^{\mathrm{t}}) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \Big(\operatorname{sgn}(\tau) \prod_{j=1}^{n} A_{j\tau(j)} \Big) = \det(A),$$

concluindo a demonstração. $\square$

A Proposição 2.3 será usada regularmente para obter resultados envolvendo as colunas de uma matriz como corolário de resultados envolvendo as linhas de uma matriz (e vice-versa). Mostremos agora que se uma matriz $A \in M_n(R)$ tem duas linhas iguais (ou duas colunas iguais), então seu determinante é igual a zero.

Proposição 2.4 (linhas ou colunas iguais)**.** *Seja $A \in M_n(R)$. Se A tem duas linhas iguais, isto é, se existem $i, j \in I_n$ distintos tais que $A_{ik} = A_{jk}$, para todo $k \in I_n$, então* $\det(A) = 0$*. Similarmente, se A tem duas colunas iguais, então* $\det(A) = 0$.

Demonstração. Basta provar o resultado a respeito das colunas e daí o resultado a respeito das linhas seguirá da Proposição 2.3. Sejam $i, j \in I_n$ distintos tais que:

$$A_{ki} = A_{kj}, \tag{3}$$

para todo $k \in I_n$. O conjunto $\mathfrak{S}_n$ é união disjunta dos conjuntos S_+ e S_- definidos por:

$$S_+ = \big\{ \sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j) \big\}, \quad S_- = \big\{ \sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j) \big\}.$$

Daí:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_+} \Big(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} A_{k\sigma(k)} \Big) + \sum_{\tau \in S_-} \Big(\operatorname{sgn}(\tau) \prod_{k=1}^{n} A_{k\tau(k)} \Big).$$

Como a aplicação:

$$S_+ \ni \sigma \longmapsto \mathfrak{t}_{ij} \circ \sigma \in S_-$$

é bijetora, podemos substituir τ por $\mathfrak{t}_{ij} \circ \sigma$ no segundo somatório; além do mais, de (3) segue que:

$$\tau = \mathfrak{t}_{ij} \circ \sigma \Longrightarrow A_{k\tau(k)} = A_{k\sigma(k)},$$

para todo $k \in I_n$ e todo $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Concluímos então que:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_+} \Big(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} A_{k\sigma(k)} \Big) + \sum_{\sigma \in S_+} \Big(\operatorname{sgn}(\mathfrak{t}_{ij} \circ \sigma) \prod_{k=1}^{n} A_{k\sigma(k)} \Big).$$

Segue da Proposição 1.10 e do fato que transposições são permutações ímpares (Exercício 1.3) que $\operatorname{sgn}(\mathfrak{t}_{ij} \circ \sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$. Isso conclui a demonstração. $\square$

Estudamos agora o que ocorre com o determinante quando permutamos as linhas (ou as colunas) de uma matriz.

Definição 2.5. Dada uma matriz $A \in M_n(R)$ e uma função $\sigma : I_n \to I_n$, denotamos por $L^\sigma(A) \in M_n(R)$ a matriz definida por:

$$[L^\sigma(A)]_{ij} = A_{\sigma(i)j}, \quad i, j \in I_n,$$

e por $C^\sigma(A) \in M_n(R)$ a matriz definida por:

$$[C^\sigma(A)]_{ij} = A_{i\sigma(j)}, \quad i, j \in I_n.$$

É fácil ver que:

$$C^\sigma(A) = [L^\sigma(A^{\mathrm{t}})]^{\mathrm{t}}, \tag{4}$$

para qualquer $A \in M_n(R)$ e qualquer função $\sigma : I_n \to I_n$.

Proposição 2.6. *Sejam $A \in M_n(R)$ e $\sigma : I_n \to I_n$ uma função. Se $\sigma \notin \mathfrak{S}_n$, então:*

$$\det\bigl(L^\sigma(A)\bigr) = \det\bigl(C^\sigma(A)\bigr) = 0,$$

e se $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, então:

$$\det\bigl(L^\sigma(A)\bigr) = \det\bigl(C^\sigma(A)\bigr) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A).$$

Demonstração. Os resultados envolvendo $C^\sigma(A)$ seguem dos resultados envolvendo $L^\sigma(A)$ usando (4) e a Proposição 2.3. Vamos então demonstrar os resultados envolvendo $L^\sigma(A)$. Se $\sigma \notin \mathfrak{S}_n$, então σ não é injetora e portanto $L^\sigma(A)$ tem duas linhas iguais. Segue então da Proposição 2.4 que $\det\bigl(L^\sigma(A)\bigr) = 0$. Suponha agora que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Usando a definição de determinante e de $L^\sigma(A)$, obtemos:

$$\det\bigl(L^\sigma(A)\bigr) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \Bigl(\operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^{n} A_{\sigma(i)\tau(i)}\Bigr).$$

Substituindo i por $\sigma^{-1}(j)$ no produtório e depois τ por $\lambda \circ \sigma$ no somatório, vem:

$$\det\bigl(L^\sigma(A)\bigr) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{S}_n} \Bigl(\operatorname{sgn}(\lambda \circ \sigma) \prod_{j=1}^{n} A_{j\lambda(j)}\Bigr).$$

A conclusão segue do fato que $\operatorname{sgn}(\lambda \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\lambda)\operatorname{sgn}(\sigma)$ (Proposição 1.10). □

Corolário 2.7. *Quando trocamos a ordem de duas linhas ou de duas colunas de uma matriz, então o seu determinante se multiplica por -1, isto é, dados $i, j \in I_n$ distintos e tomando $\sigma = \mathfrak{t}_{ij}$, vale a igualdade:*

$$\det\bigl(L^\sigma(A)\bigr) = \det\bigl(C^\sigma(A)\bigr) = -\det(A),$$

para qualquer $A \in M_n(R)$.

Demonstração. Basta notar que uma transposição é uma permutação ímpar (Exercício 1.3) e usar a Proposição 2.6. □

Observamos que o Corolário 2.7 implica que se $A \in M_n(R)$ tem duas linhas ou duas colunas iguais então $\det(A) = -\det(A)$. Como R é um anel comutativo arbitrário, dessa igualdade *não segue* que $\det(A) = 0$. No entanto, como vimos (Proposição 2.4), é verdade que se A tem duas linhas ou duas colunas iguais então $\det(A) = 0$.

Vamos agora demonstrar a fórmula de Laplace para o cálculo de determinantes usando expansão por cofatores. Começamos com as definições relevantes.

Definição 2.8. Dada uma matriz $A \in M_n(R)$ e dados $i, j \in I_n$, denotamos por $A^{[i,j]}$ a matriz obtida de A pela remoção da linha i e da coluna j. Mais precisamente, para $i \in I_n$, denotamos por

$$\psi_i : I_{n-1} \longrightarrow I_n \setminus \{i\}$$

a única bijeção crescente entre I_{n-1} e $I_n \setminus \{i\}$ e, para $i, j \in I_n$, definimos $A^{[i,j]} \in M_{n-1}(R)$ fazendo:

$$(A^{[i,j]})_{kl} = A_{\psi_i(k)\psi_j(l)}, \quad k, l \in I_{n-1}.$$

Se $n \geq 2$, então o *cofator* associado à posição (i, j) da matriz A é definido por $(-1)^{i+j} \det(A^{[i,j]}) \in R$.

Note que, para $i \in I_n$, a aplicação ψ_i coincide com a restrição a I_{n-1} do ciclo $\mathfrak{z}_{in}$ (recorde Exercício 1.4):

$$\psi_i = \mathfrak{z}_{in}|_{I_{n-1}} : I_{n-1} \longrightarrow I_n \setminus \{i\}. \tag{5}$$

Precisamos agora de um lema.

Lema 2.9. *Sejam dados $i, j \in I_n$ e, para cada $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$, denote por $\hat{\tau} \in \mathfrak{S}_n$ a permutação que satisfaz $\hat{\tau}(i) = j$ e que estende a bijeção:*

$$\psi_j \circ \tau \circ \psi_i^{-1} : I_n \setminus \{i\} \longrightarrow I_n \setminus \{j\}.$$

Vale que:

$$\operatorname{sgn}(\hat{\tau}) = (-1)^{i+j} \operatorname{sgn}(\tau).$$

Demonstração. Seja $\tau' \in \mathfrak{S}_n$ a extensão de τ que satisfaz $\tau'(n) = n$. Obviamente $\mathfrak{r}(\tau) = \mathfrak{r}(\tau')$, de modo que também $\operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\tau')$. Segue facilmente de (5) que:

$$\hat{\tau} = \mathfrak{z}_{jn} \circ \tau' \circ \mathfrak{z}_{in}^{-1}.$$

Usando o Corolário 1.8, a Proposição 1.10 e o resultado do Exercício 1.4, calculamos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\hat{\tau}) = \operatorname{sgn}(\mathfrak{z}_{jn}) \operatorname{sgn}(\tau') \operatorname{sgn}(\mathfrak{z}_{in}) &= (-1)^{n-j} \operatorname{sgn}(\tau)(-1)^{n-i} \\ &= (-1)^{i+j} \operatorname{sgn}(\tau), \end{aligned}$$

e a demonstração está completa. □

Corolário 2.10. *Suponha que* $n \geq 2$. *Sejam dados* $A \in M_n(R)$ *e* $i, j \in I_n$. *Denotando por* $\mathfrak{S}_n^{ij}$ *o conjunto:*

$$\mathfrak{S}_n^{ij} = \big\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma(i) = j\big\},$$

temos que vale a igualdade:

$$A_{ij} \det(A^{[i,j]}) = (-1)^{i+j} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^{ij}} \Big(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} A_{k\sigma(k)} \Big). \tag{6}$$

Demonstração. Pela definição de determinante, temos:

$$A_{ij} \det(A^{[i,j]}) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}} \Big(\operatorname{sgn}(\tau) A_{ij} \prod_{k=1}^{n-1} (A^{[i,j]})_{k\tau(k)} \Big), \tag{7}$$

e, usando a definição de $A^{[i,j]}$, obtemos:

$$A_{ij} \prod_{k=1}^{n-1} (A^{[i,j]})_{k\tau(k)} = A_{ij} \prod_{k=1}^{n-1} A_{\psi_i(k)\psi_j(\tau(k))}, \tag{8}$$

para qualquer $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$. Substituindo k por $\psi_i^{-1}(l)$ no último produtório, vem:

$$A_{ij} \prod_{k=1}^{n-1} A_{\psi_i(k)\psi_j(\tau(k))} = A_{ij} \prod_{l \in I_n \setminus \{i\}} A_{l\hat{\tau}(l)} = \prod_{l=1}^{n} A_{l\hat{\tau}(l)}, \tag{9}$$

onde $\hat{\tau} \in \mathfrak{S}_n$ é definido como no enunciado do Lema 2.9. De (7), (8), (9) e do Lema 2.9, obtemos:

$$A_{ij} \det(A^{[i,j]}) = (-1)^{i+j} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}} \Big(\operatorname{sgn}(\hat{\tau}) \prod_{l=1}^{n} A_{l\hat{\tau}(l)} \Big).$$

É fácil ver que a aplicação:

$$\mathfrak{S}_{n-1} \ni \tau \longmapsto \hat{\tau} \in \mathfrak{S}_n^{ij}$$

é bijetora e portanto a conclusão é obtida substituindo σ por $\hat{\tau}$ no somatório em (6). □

Proposição 2.11 (Laplace)**.** *Suponha*[3] *que* $n \geq 2$ *e seja* $A \in M_n(R)$. *Para todo* $i \in I_n$, *vale que o determinante de* A *pode ser calculado usando* expansão por cofatores na i-ésima linha, *isto é:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det(A^{[i,j]}). \tag{10}$$

[3]Se o anel R tem unidade, temos que o determinante da matriz vazia é igual a 1 e nesse caso a fórmula de Laplace vale também com $n = 1$.

Analogamente, para todo $j \in I_n$, vale que o determinante de A pode ser calculado usando expansão por cofatores na j-ésima coluna*, isto é:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det(A^{[i,j]}). \tag{11}$$

Demonstração. A igualdade (10) segue diretamente da definição de determinante e de (6), levando em conta que, fixado $i \in I_n$, temos:

$$\mathfrak{S}_n = \bigcup_{j=1}^{n} \mathfrak{S}_n^{ij},$$

sendo essa união disjunta. Similarmente, a igualdade (11) segue diretamente da definição de determinante e de (6), levando em conta que, fixado $j \in I_n$, temos:

$$\mathfrak{S}_n = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{S}_n^{ij},$$

sendo essa união disjunta. □

Definição 2.12. Sejam $x \in R^n$ e $A \in M_n(R)$. Dado $i \in I_n$, denotamos por $L(A, x, i)$ a matriz obtida de A pela substituição da sua i-ésima linha por x, ou seja, $L(A, x, i) \in M_n(R)$ é definida por:

$$[L(A, x, i)]_{kj} = \begin{cases} x_j, & \text{se } k = i, \\ A_{kj}, & \text{se } k \neq i, \end{cases}$$

para todos $k, j \in I_n$. Similarmente, dado $j \in I_n$, denotamos por $C(A, x, j)$ a matriz obtida de A pela substituição da sua j-ésima coluna por x, ou seja, $C(A, x, j) \in M_n(R)$ é definida por:

$$[C(A, x, j)]_{ik} = \begin{cases} x_i, & \text{se } k = j, \\ A_{ik}, & \text{se } k \neq j, \end{cases}$$

para todos $i, k \in I_n$.

Corolário 2.13. *Suponha que $n \geq 2$ e sejam $A \in M_n(R)$ e $x \in R^n$. Para todo $i \in I_n$, o determinante de $L(A, x, i)$ é dado por:*

$$\det\big(L(A, x, i)\big) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} x_j \det(A^{[i,j]}).$$

Similarmente, para todo $j \in I_n$, o determinante de $C(A, x, j)$ é dado por:

$$\det\big(C(A, x, j)\big) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} x_i \det(A^{[i,j]}).$$

Demonstração. Basta calcular o determinante da matriz $L(A,x,i)$ usando expansão por cofatores na i-ésima linha e o determinante de $C(A,x,j)$ usando expansão por cofatores na j-ésima coluna (Proposição 2.11), levando em conta que:

$$[L(A,x,i)]^{[i,j]} = A^{[i,j]}, \quad [C(A,x,j)]^{[i,j]} = A^{[i,j]},$$

para todos $i,j \in I_n$. □

Antes de enunciar o próximo corolário, notamos que dados $r_1,\dots,r_n \in R$, então a aplicação $f : R^n \to R$ definida por:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i, \quad x \in R^n, \tag{12}$$

é linear. (Veja Definição A.4 e Exemplo A.5.)

Corolário 2.14. *Seja $A \in M_n(R)$. Para todo $i \in I_n$, as funções:*

$$R^n \ni x \longmapsto \det\big(L(A,x,i)\big) \in R, \quad R^n \ni x \longmapsto \det\big(C(A,x,i)\big) \in R \tag{13}$$

são lineares.

Demonstração. Para $n = 1$, temos $i = 1$ e:

$$\det\big(L(A,x,i)\big) = \det\big(C(A,x,i)\big) = x.$$

Para $n \geq 2$, a conclusão segue observando que, em vista do Corolário 2.13, as funções em (13) são da forma (12). □

Corolário 2.15 (operação elementar)**.** *Sejam $A \in M_n(R)$ e $i,j \in I_n$ com $i \neq j$. A matriz obtida de A pela substituição da sua i-ésima linha pela soma da sua i-ésima linha com um múltiplo da sua j-ésima linha possui o mesmo determinante que A: mais precisamente, definindo $x,y \in R^n$ fazendo:*

$$x_k = A_{ik}, \quad y_k = A_{jk}, \quad k \in I_n,$$

então:

$$\det\big(L(A,x+ry,i)\big) = \det(A),$$

para todo $r \in R$. Vale também o resultado análogo obtido substituindo a palavra "linha" pela palavra "coluna".

Demonstração. Basta notar que, em vista do Corolário 2.14 e da Proposição 2.4, temos:

$$\det\big(L(A,x+ry,i)\big) = \det\big(L(A,x,i)\big) + r\det\big(L(A,y,i)\big) = \det(A),$$

já que $L(A,x,i) = A$ e que a matriz $L(A,y,i)$ tem duas linhas iguais. □

Definição 2.16. Seja $A \in M_n(R)$. A *adjunta clássica* de A, denotada por $\operatorname{adj}(A)$, é a transposta da matriz dos cofatores de A; mais precisamente, para $n \geq 2$, definimos $\operatorname{adj}(A) \in M_n(R)$ fazendo:

$$[\operatorname{adj}(A)]_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A^{[j,i]}),$$

para todos $i,j \in I_n$. Se $n = 1$, a adjunta clássica $\operatorname{adj}(A) \in M_1(R)$ é definida apenas no caso em que o anel R tem unidade e vale $[\operatorname{adj}(A)]_{11} = 1 \in R$.

Definição 2.17. Dado $r \in R$, denotamos por $r\mathrm{I}_n$ a matriz diagonal $n \times n$ cuja diagonal principal tem todas as entradas iguais a r; mais precisamente, definimos $r\mathrm{I}_n \in M_n(R)$ fazendo:

$$[r\mathrm{I}_n]_{ij} = \begin{cases} r, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

para todos $i, j \in I_n$. Se o anel R tem unidade, a matriz $1\mathrm{I}_n$ é denotada simplesmente por I_n e é chamada a *matriz identidade* $n \times n$. Nesse caso, $r\mathrm{I}_n$ é igual ao produto de r por I_n.

É fácil ver que:

$$(r\mathrm{I}_n)A = A(r\mathrm{I}_n) = rA,$$

para quaisquer $A \in M_n(R)$, $r \in R$. Se R tem unidade, então I_n é a unidade do anel $M_n(R)$.

Proposição 2.18 (adjunta clássica)**.** *Seja $A \in M_n(R)$. Vale que:*

$$\mathrm{adj}(A)A = A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)\mathrm{I}_n.$$

Demonstração. Dados $i, j \in I_n$, temos:

$$\begin{aligned} [\mathrm{adj}(A)A]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [\mathrm{adj}(A)]_{ik} A_{kj} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{kj} \det(A^{[k,i]}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} x_k \det(A^{[k,i]}), \end{aligned}$$

onde $x \in R^n$ é definido por $x_k = A_{kj}$, $k \in I_n$. Do Corolário 2.13 vem:

$$[\mathrm{adj}(A)A]_{ij} = \det\big(C(A, x, i)\big).$$

Se $i \neq j$, então $C(A, x, i)$ tem duas colunas iguais e portanto, pela Proposição 2.4, $[\mathrm{adj}(A)A]_{ij} = 0$. Se $i = j$, então $C(A, x, i) = A$ e portanto $[\mathrm{adj}(A)A]_{ij} = \det(A)$. Isso completa a demonstração da igualdade $\mathrm{adj}(A)A = \det(A)\mathrm{I}_n$. Um raciocínio análogo mostra que, para todos $i, j \in I_n$, temos $[A\,\mathrm{adj}(A)]_{ij} = \det\big(L(A, x, j)\big)$, onde $x \in R^n$ é definido por $x_k = A_{ik}$, $k \in I_n$. Segue então que $A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)\mathrm{I}_n$. □

Corolário 2.19 (regra de Cramer)**.** *Sejam $A \in M_n(R)$, $x, y \in R^n$. Se:*

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{14}$$

então:

$$x_i \det(A) = \det\big(C(A, y, i)\big).$$

Demonstração. Multiplicando os dois lados de (14) pela esquerda por $\operatorname{adj}(A)$ e usando a Proposição 2.18, obtemos:

$$x_i \det(A) = \sum_{j=1}^{n} [\operatorname{adj}(A)]_{ij}\, y_j, \quad i \in I_n.$$

Usando a definição de $\operatorname{adj}(A)$ e o Corolário 2.13, vem:

$$\sum_{j=1}^{n} [\operatorname{adj}(A)]_{ij}\, y_j = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} y_j \det(A^{[j,i]}) = \det\bigl(C(A, y, i)\bigr),$$

e a demonstração está completa. □

A seguir mostraremos que o determinante de um produto de matrizes é igual ao produto de seus determinantes. Antes disso, precisamos de um fato sobre produtórios finitos de somatórios finitos de elementos de R. Seja I um conjunto finito não vazio e, para cada $i \in I$, consideramos uma família $(r^i_j)_{j \in J_i}$ de elementos de R indexada por um conjunto finito J_i. Usando a propriedade distributiva, é fácil verificar que o produtório:

$$\prod_{i \in I} \sum_{j \in J_i} r^i_j$$

é igual ao somatório de todos os produtórios cujos fatores são obtidos escolhendo exatamente um termo de cada um dos somatórios $\sum_{j \in J_i} r^i_j$. Mais precisamente, vale a igualdade:

$$\prod_{i \in I} \sum_{j \in J_i} r^i_j = \sum_{\sigma} \prod_{i \in I} r^i_{\sigma(i)},$$

sendo que no somatório do lado direito da igualdade, σ percorre o conjunto de todas as funções com domínio I tais que $\sigma(i) \in J_i$, para todo $i \in I$; em outras palavras, σ percorre o produto cartesiano $\prod_{i \in I} J_i$. No caso particular em que $I = I_n$ para um inteiro positivo n e que todos os conjuntos J_i são iguais a um mesmo conjunto finito J, temos:

$$\prod_{i=1}^{n} \sum_{j \in J} r^i_j = \sum_{\sigma \in J^n} \prod_{i=1}^{n} r^i_{\sigma(i)}. \tag{15}$$

Estamos prontos agora para provar o nosso próximo resultado.

Teorema 2.20 (determinante do produto)**.** *Sejam $A, B \in M_n(R)$. Vale que:*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Demonstração. Usando a definição de determinante, temos:

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \Bigl(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (AB)_{i\sigma(i)} \Bigr),$$

e, usando a definição de produto de matrizes, vem:

$$\det(AB) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\Big(\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\big(A_{ik}B_{k\sigma(i)}\big)\Big).$$

Em vista das considerações sobre produtórios de somatórios feitas antes do enunciado do teorema (veja (15)), temos:

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\Big(\operatorname{sgn}(\sigma)\sum_{\tau\in I_n^n}\prod_{i=1}^n\big(A_{i\tau(i)}B_{\tau(i)\sigma(i)}\big)\Big)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sum_{\tau\in I_n^n}\Big(\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n A_{i\tau(i)}\prod_{i=1}^n B_{\tau(i)\sigma(i)}\Big).\end{aligned}$$

Substituindo i por $\sigma^{-1}(j)$ no produtório $\prod_{i=1}^n B_{\tau(i)\sigma(i)}$ e depois substituindo τ por $\lambda\circ\sigma$ no somatório interno, vem:

$$\det(AB) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sum_{\lambda\in I_n^n}\Big(\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n A_{i\lambda(\sigma(i))}\prod_{j=1}^n B_{\lambda(j)j}\Big).$$

Trocando a ordem dos somatórios e recordando a Definição 2.5, podemos escrever:

$$\det(AB) = \sum_{\lambda\in I_n^n}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\Big(\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n[C^\lambda(A)]_{i\sigma(i)}\prod_{j=1}^n B_{\lambda(j)j}\Big)$$

e usando a definição de $\det\big(C^\lambda(A)\big)$ vem:

$$\det(AB) = \sum_{\lambda\in I_n^n}\Big(\det\big(C^\lambda(A)\big)\prod_{j=1}^n B_{\lambda(j)j}\Big).$$

Da Proposição 2.6 segue agora que:

$$\det(AB) = \sum_{\lambda\in\mathfrak{S}_n}\Big(\operatorname{sgn}(\lambda)\det(A)\prod_{j=1}^n B_{\lambda(j)j}\Big) = \det(A)\det(B^{\mathrm{t}}),$$

e usando a Proposição 2.3 concluímos a prova. □

Mostramos agora o critério para invertibilidade de matrizes em termos de determinantes. (Veja Definição A.2 e comentários que a seguem para alguns fatos básicos sobre elementos invertíveis em anéis.)

Proposição 2.21 (matriz inversa)**.** *Suponha que o anel R tenha unidade, de modo que a matriz identidade I_n é a unidade do anel $M_n(R)$. Seja A em $M_n(R)$. São equivalentes:*

(a) *A é invertível à esquerda no anel $M_n(R)$;*
(b) *A é invertível à direita no anel $M_n(R)$;*
(c) *A é invertível no anel $M_n(R)$;*
(d) $\det(A)$ *é invertível no anel R.*

Além do mais, se A é invertível em $M_n(R)$, então:

$$A^{-1} = [\det(A)]^{-1} \operatorname{adj}(A).$$

Demonstração. Se A admite uma inversa à esquerda ou à direita B em $M_n(R)$, então $\det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = 1$, pela Proposição 2.20 (note que $\det(A)$ e $\det(B)$ são elementos de R, que é um anel comutativo). Daí $\det(A)$ é invertível em R. Reciprocamente, se $\det(A)$ é invertível em R, segue da Proposição 2.18 que $B = [\det(A)]^{-1} \operatorname{adj}(A)$ satisfaz:

$$AB = BA = \mathrm{I}_n. \qquad \square$$

Vamos agora estudar o determinante de matrizes feitas de blocos. Dados inteiros $n, m \geq 0$ e matrizes $A \in M_n(R)$, $B \in M_{n\times m}(R)$, $C \in M_{m\times n}(R)$ e $D \in M_m(R)$, denotamos por:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{n+m}(R) \tag{16}$$

a matriz definida por:

$$X_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & \text{se } 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq n, \\ B_{i(j-n)}, & \text{se } 1 \leq i \leq n \text{ e } n+1 \leq j \leq n+m, \\ C_{(i-n)j}, & \text{se } n+1 \leq i \leq n+m \text{ e } 1 \leq j \leq n, \\ D_{(i-n)(j-n)}, & \text{se } n+1 \leq i \leq n+m \text{ e } n+1 \leq j \leq n+m. \end{cases}$$

Seja $\mathfrak{S}_{n,m}$ o subconjunto de $\mathfrak{S}_{n+m}$ definido por:

$$\mathfrak{S}_{n,m} = \big\{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+m} : \sigma[I_n] = I_n\big\}.$$

Para $\tau \in \mathfrak{S}_n$ e $\tau' \in \mathfrak{S}_m$, definimos $\tau \vee \tau' \in \mathfrak{S}_{n,m}$ fazendo:

$$(\tau \vee \tau')(i) = \begin{cases} \tau(i), & \text{se } 1 \leq i \leq n, \\ \tau'(i-n) + n, & \text{se } n+1 \leq i \leq n+m. \end{cases}$$

É fácil ver que a aplicação:

$$\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m \ni (\tau, \tau') \longmapsto \tau \vee \tau' \in \mathfrak{S}_{n,m}$$

é bijetora. Além do mais:

$$\mathfrak{r}(\tau \vee \tau') = \mathfrak{r}(\tau) \cup \big\{\{i_1 + n, i_2 + n\} : \{i_1, i_2\} \in \mathfrak{r}(\tau')\big\},$$

de modo que:

$$|\mathfrak{r}(\tau \vee \tau')| = |\mathfrak{r}(\tau)| + |\mathfrak{r}(\tau')|,$$

e:

$$\operatorname{sgn}(\tau \vee \tau') = \operatorname{sgn}(\tau) \operatorname{sgn}(\tau'), \tag{17}$$

para todos $\tau \in \mathfrak{S}_n$ e $\tau' \in \mathfrak{S}_m$.

Podemos agora demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 2.22. *Sejam n e m inteiros positivos. Sejam*

$$A \in M_n(R), \quad B \in M_{n\times m}(R), \quad C \in M_{m\times n}(R), \quad D \in M_m(R)$$

e $X \in M_{n+m}(R)$ definida por (16). *Se $B = 0$ ou $C = 0$, então:*

$$\det(X) = \det(A)\det(D).$$

Demonstração. Pela definição de determinante, temos:

$$\det(X) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+m}} \Big(\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n+m} X_{i\sigma(i)}\Big).$$

Seja $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+m}$ com $\sigma \notin \mathfrak{S}_{n,m}$, isto é, $\sigma[I_n] \neq I_n$. Como os conjuntos $\sigma[I_n]$ e I_n têm n elementos, não pode ser $\sigma[I_n] \subset I_n$; similarmente, não pode ser $\sigma[I_{n+m}\backslash I_n] \subset I_{n+m}\backslash I_n$. Existem então $j \in I_n$ com $\sigma(j) \notin I_n$ e $k \in I_{n+m}\backslash I_n$ com $\sigma(k) \in I_n$. Daí $X_{j\sigma(j)} = 0$, se $B = 0$, e $X_{k\sigma(k)} = 0$, se $C = 0$. Em qualquer caso, vale que:

$$\prod_{i=1}^{n+m} X_{i\sigma(i)} = 0;$$

assim:

$$\det(X) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n,m}} \Big(\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n+m} X_{i\sigma(i)}\Big).$$

Para qualquer $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+m}$, temos:

$$\prod_{i=1}^{n+m} X_{i\sigma(i)} = \prod_{i=1}^{n} X_{i\sigma(i)} \prod_{i=n+1}^{n+m} X_{i\sigma(i)};$$

se $\sigma \in \mathfrak{S}_{n,m}$, substituindo i por $n + j$ no segundo produtório e usando a definição de X, obtemos:

$$\prod_{i=1}^{n+m} X_{i\sigma(i)} = \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \prod_{j=1}^{m} D_{j(\sigma(j+n)-n)}.$$

Portanto:

$$\det(X) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n,m}} \Big(\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \prod_{j=1}^{m} D_{j(\sigma(j+n)-n)}\Big).$$

Substituindo σ por $\tau \vee \tau'$ no último somatório e usando (17), obtemos:

$$\det(X) = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \sum_{\tau'\in\mathfrak{S}_m} \Big(\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\tau')\prod_{i=1}^{n} A_{i\tau(i)} \prod_{j=1}^{m} D_{j\tau'(j)}\Big).$$

O lado direito da última igualdade é claramente igual a $\det(A)\det(D)$ e a demonstração está completa. $\square$

Corolário 2.23. *Suponha que o anel R tenha unidade. Dados inteiros $m, n \geq 0$ e matrizes $A \in M_{m\times n}(R)$ e $B \in M_{n\times m}(R)$, vale a igualdade:*

$$\det(\mathrm{I}_m + AB) = \det(\mathrm{I}_n + BA).$$

Demonstração. Note que:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_m + AB & 0 \\ B & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & A \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & -A \\ B & \mathrm{I}_n \end{pmatrix},$$

e:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & -A \\ 0 & \mathrm{I}_n + BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \\ -B & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & -A \\ B & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

A conclusão é obtida tomando determinantes dos dois lados dessas igualdades, usando o Teorema 2.20 e a Proposição 2.22. □

Apêndice A. Algumas estruturas algébricas

Para conveniência do leitor, listamos neste apêndice as definições das estruturas algébricas que são usadas ao longo do texto, juntamente com os exemplos e fatos básicos que são relevantes para o texto.

Definição A.1. Um *grupo abeliano* é um conjunto R munido de uma operação binária[4]

$$R \times R \ni (r, s) \longmapsto r + s \in R,$$

denominada *adição*, satisfazendo as seguintes propriedades:

- $(r + s) + t = r + (s + t)$, para todos $r, s, t \in R$ (associatividade);
- $r + s = s + r$, para todos $r, s \in R$ (comutatividade);
- existe um (necessariamente único) elemento neutro $0 \in R$, isto é:

  $$r + 0 = 0 + r = r,$$

  para todo $r \in R$;
- todo elemento $r \in R$ admite um (necessariamente único e denotado por $-r$) *inverso aditivo* ou *oposto*, isto é, existe $s \in R$ tal que:

  $$r + s = s + r = 0.$$

Um *anel* é um grupo abeliano R munido de mais uma operação binária

$$R \times R \ni (r, s) \longmapsto rs \in R,$$

denominada *multiplicação*, satisfazendo a propriedade associativa:

$$(rs)t = r(st), \quad r, s, t \in R,$$

e a propriedade *distributiva com relação à adição*:

$$r(s + t) = rs + rt, \quad (s + t)r = sr + tr, \qquad r, s, t \in R.$$

[4]Em textos dedicados à teoria de grupos, a operação de um grupo é normalmente denominada "multiplicação" e denotada por $(r, s) \mapsto rs$. A notação aditiva é normalmente reservada apenas ao caso de grupos abelianos, embora usa-se também com freqüência a notação multiplicativa no caso abeliano. Nós usaremos apenas a notação aditiva.

Dizemos que o anel R é um *anel com unidade* se existe um (necessariamente único) elemento neutro $1 \in R$ para a multiplicação, isto é:

$$r1 = 1r = r,$$

para todo $r \in R$. Dizemos que o anel R é *comutativo* se a multiplicação é comutativa, isto é:

$$rs = sr, \quad r, s \in R.$$

Definição A.2. Seja R um anel com unidade. Um elemento $r \in R$ é dito *invertível à esquerda* (resp., *invertível à direita*) se existe $s \in R$ tal que $sr = 1$ (resp., $rs = 1$). Dizemos que r é *invertível* se for invertível à esquerda e à direita.

Se $r \in R$ é invertível, então todos os seus inversos à esquerda são iguais a todos os seus inversos à direita; de fato, se $s_1, s_2 \in R$ satisfazem $s_1 r = 1$ e $rs_2 = 1$, então $(s_1 r)s_2 = s_2$ e $s_1(rs_2) = s_1$, donde $s_1 = s_2$. Em particular, se $r \in R$ é invertível, então todos os inversos à esquerda de r são iguais entre si, assim como todos os inversos à direita de r são iguais entre si. Denotamos então o (único) inverso de r por r^{-1}.

Definição A.3. Dado um conjunto R e inteiros $m, n \geq 0$, então uma *matriz $m \times n$ com entradas em R* é uma função $A : I_m \times I_n \to R$; dados $i \in I_m$, $j \in I_n$, escrevemos A_{ij} em vez de $A(i, j)$ e dizemos que A_{ij} é a *entrada de A na i-ésima linha e na j-ésima coluna*. O conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas em R é denotado por $M_{m\times n}(R)$. Quando $m = n$, escrevemos apenas $M_n(R)$. Se R é um grupo abeliano, então tornamos $M_{m\times n}(R)$ um grupo abeliano definindo a operação de adição em $M_{m\times n}(R)$ fazendo:

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \quad i \in I_m,\ j \in I_n.$$

Se R é um anel, definimos a multiplicação de matrizes da seguinte forma: dados inteiros $m, n, p \geq 0$ e matrizes $A \in M_{m\times n}(R)$, $B \in M_{n\times p}(R)$, então a matriz $AB \in M_{m\times p}(R)$ é definida por:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}, \quad i \in I_m,\ j \in I_p.$$

A multiplicação de matrizes é associativa:

$$(AB)C = A(BC), \quad A \in M_{m\times n}(R),\ B \in M_{n\times p}(R),\ C \in M_{p\times q}(R),$$

e satisfaz a propriedade distributiva em relação à adição:

$$A(B + C) = AB + AC, \quad A \in M_{m\times n}(R),\ B, C \in M_{n\times p}(R),$$
$$(B + C)A = BA + CA, \quad A \in M_{n\times p}(R),\ B, C \in M_{m\times n}(R).$$

Assim, $M_n(R)$ é um anel, para todo inteiro $n \geq 0$.

Definição A.4. Seja R um anel. Um *R-módulo* é um grupo abeliano M, munido de uma operação

$$R \times M \ni (r, x) \longmapsto rx \in M,$$

denominada *multiplicação por escalares em* R, satisfazendo as seguintes propriedades[5]:

- $r(x+y) = rx + ry$, para todos $r \in R$, $x, y \in M$;
- $(r+s)x = rx + sx$, para todos $r, s \in R$, $x \in M$;
- $(rs)x = r(sx)$, para todos $r, s \in R$, $x \in M$.

Se M e N são R-módulos, então uma função $f : M \to N$ é dita *linear* se valem as condições:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(rx) = rf(x),$$

para todos $x, y \in M$, $r \in R$. Se o anel R é comutativo, então uma R-*álgebra* é um R-módulo M, munido de uma operação:

$$M \times M \ni (x, y) \longmapsto xy \in M,$$

denominada *multiplicação*, que é *bilinear*, isto é, satisfaz a propriedade distributiva em relação à soma:

$$(x+y)z = xz + yz, \quad z(x+y) = zx + zy, \qquad x, y, z \in M,$$

e a propriedade:

$$(rx)y = x(ry) = r(xy), \quad r \in R,\ x, y \in M.$$

Em outras palavras, a multiplicação é linear em cada variável. Uma R-álgebra é dita *associativa* quando a operação de multiplicação for associativa:

$$(xy)z = x(yz), \quad x, y, z \in M.$$

Exemplo A.5. Seja R um anel. Dado um inteiro $n \geq 0$, definimos em R^n uma estrutura de R-módulo fazendo:

$$(x+y)_i = x_i + y_i, \quad (rx)_i = rx_i, \qquad i \in I_n,\ r \in R,\ x, y \in R^n,$$

e, dados inteiros $m, n \geq 0$, definimos no grupo abeliano $M_{m\times n}(R)$ uma estrutura de R-módulo fazendo:

$$(rA)_{ij} = rA_{ij}, \quad i \in I_m,\ j \in I_n,\ r \in R,\ A \in M_{m\times n}(R).$$

Se R é comutativo, então $M_n(R)$ munido dessa estrutura de R-módulo é uma R-álgebra associativa.

Exemplo A.6. Se R é um grupo abeliano, então existe uma única estrutura de $\mathbb{Z}$-módulo em R tal que $1r = r$, para todo $r \in R$; o produto nr, para $n \geq 0$ inteiro e $r \in R$, é definido recursivamente fazendo:

$$0r = 0, \quad (n+1)r = nr + r, \quad n \geq 0,$$

e para n inteiro negativo e $r \in R$, definimos:

$$nr = (-n)(-r),$$

onde $-r$ denota o oposto de r. Se R é um anel, então essa estrutura de $\mathbb{Z}$-módulo faz de R uma $\mathbb{Z}$-álgebra associativa.

[5]Quando o anel R tem unidade, normalmente se supõe também que $1x = x$, para todo $x \in M$.