Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole e sejam $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ subconjuntos de $\mathcal{B}$. Escrevemos $\mathcal{E} \le \mathcal{F}$ se todo elemento de $\mathcal{E}$ é menor ou igual a todo elemento de $\mathcal{F}$. Isso é o mesmo que dizer que toda disjunção finita de elementos de $\mathcal{E}$ é menor ou igual a toda conjunção finita de elementos de $\mathcal{F}$. Escrevemos $\mathcal{E} < \mathcal{F}$ se toda disjunção finita[1] de elementos de $\mathcal{E}$ é menor do que toda conjunção finita de elementos de $\mathcal{F}$. Dizemos que $b \in \mathcal{B}$ *separa* $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ se $\mathcal{E} \le \{b\} \le \mathcal{F}$ e dizemos que $b$ *separa estritamente* $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ se $\mathcal{E} < \{b\} < \mathcal{F}$.

Na terminologia do curso, note que uma $(\omega, \omega)$-abertura (resp., uma $(\omega, 1)$-abertura/$(1, \omega)$-abertura/$(1, 1)$-abertura) é um par $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ de subconjuntos de $\mathcal{B}$ tais que $|\mathcal{E}| = \omega$ (resp., $|\mathcal{E}| = \omega/|\mathcal{E}| < \omega/|\mathcal{E}| < \omega$), $|\mathcal{F}| = \omega$ (resp., $|\mathcal{F}| < \omega/|\mathcal{F}| = \omega/|\mathcal{F}| < \omega$), $\mathcal{E} < \mathcal{F}$, mas não existe $b \in \mathcal{B}$ que separa estritamente $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Note também que $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ é uma $(\omega, 1)$-abertura se e somente se $(\mathcal{F}', \mathcal{E}')$ é uma $(1, \omega)$-abertura, onde:

$$\mathcal{E}' = \{e' : e \in \mathcal{E}\}, \quad \mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}.$$

Assim, $\mathcal{B}$ admite uma $(\omega, 1)$-abertura se e somente se $\mathcal{B}$ admite uma $(1, \omega)$-abertura.

Na terminologia do handbook, dizemos que $\mathcal{B}$ possui a *propriedade de separação enumerável* se dados subconjuntos enumeráveis (possivelmente finitos) $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}$ com $\mathcal{E} \le \mathcal{F}$ então existe $b \in \mathcal{B}$ que separa $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Dizemos que $\mathcal{B}$ possui a *propriedade forte de separação enumerável* se dados subconjuntos enumeráveis (possivelmente finitos) $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}$ com $\mathcal{E} < \mathcal{F}$ então existe $b \in \mathcal{B}$ que separa estritamente $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Note que as seguintes condições são equivalentes:

(a) $\mathcal{B}$ não possui $(\omega, \omega)$-aberturas, nem $(\omega, 1)$-aberturas, nem $(1, 1)$-aberturas;

(b) $\mathcal{B}$ possui a propriedade forte de separação enumerável.

1. *Observação.* Uma álgebra de Boole $\mathcal{B}$ possui alguma $(1, 1)$-abertura se e somente se possui algum átomo. De fato, seja $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ uma $(1, 1)$-abertura para $\mathcal{B}$. Daí $\mathcal{E} < \mathcal{F}$, donde $e = \sup \mathcal{E}$ é menor que $f = \inf \mathcal{F}$. Mas não existe $b \in \mathcal{B}$ com $e < b < f$, donde $f \wedge e'$ é um átomo. Reciprocamente, se $\mathcal{B}$ possui um átomo $x$ então $\mathcal{E} = \{0\}$, $\mathcal{F} = \{x\}$ é uma $(1, 1)$-abertura.

2. **Lema.** *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole. Então $\mathcal{B}$ possui a propriedade forte da separação enumerável se e somente se valem as três seguintes condições:*

(i) *$\mathcal{B}$ possui a propriedade da separação enumerável;*

(ii) *todo subconjunto enumerável $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}$ com a propriedade da interseção finita (i.e., toda conjunção finita de elementos de $\mathcal{F}$ é não nula) possui uma cota inferior não nula;*

(iii) *$\mathcal{B}$ não tem átomos.*

*Demonstração.* Suponha que $\mathcal{B}$ possui a propriedade forte da separação enumerável. Mostremos primeiramente que $\mathcal{B}$ possui a propriedade da separação

[1] É conveniente permitir disjunções vazias (cujo resultado é 0) e conjunções vazias (cujo resultado é 1). Permitir disjunções e conjunções vazias só faz diferença se $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{F}$ for vazio.

enumerável. Sejam $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ subconjuntos enumeráveis de $\mathcal{B}$ com $\mathcal{E} \leq \mathcal{F}$. Se $\mathcal{E} < \mathcal{F}$ então existe $b \in \mathcal{B}$ que separa estritamente (e portanto separa) $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Se não tivermos $\mathcal{E} < \mathcal{F}$ então existe $b \in \mathcal{B}$ que é uma disjunção finita de elementos de $\mathcal{E}$ e é também uma conjunção finita de elementos de $\mathcal{F}$. Como $b$ é uma disjunção finita de elementos de $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E} \leq \mathcal{F}$, segue que $b$ é uma cota inferior para $\mathcal{F}$. Como $b$ é uma conjunção finita de elementos de $\mathcal{F}$, segue que $b$ é uma cota superior para $\mathcal{E}$. Daí $b$ separa $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Vamos agora demonstrar (ii). Seja $\mathcal{F}$ um subconjunto enumerável de $\mathcal{B}$ com a propriedade da interseção finita. Se $\mathcal{E} = \{0\}$ então $\mathcal{E} < \mathcal{F}$. Logo existe $b \in \mathcal{B}$ que separa estritamente $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Daí $b \neq 0$ e $b$ é uma cota inferior para $\mathcal{F}$. Finalmente, mostremos que $\mathcal{B}$ não tem átomos. Se $x \in \mathcal{B}$, $x \neq 0$, então $\{0\} < \{x\}$ e portanto existe $b \in \mathcal{B}$ que separa estritamente $\big(\{0\}, \{x\}\big)$. Daí $0 < b < x$, i.e., $x$ não é um átomo.

Suponha agora que (i), (ii) e (iii) sejam satisfeitas e vamos demonstrar que $\mathcal{B}$ possui a propriedade forte da separação enumerável. Sejam $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ subconjuntos enumeráveis de $\mathcal{B}$ tais que $\mathcal{E} < \mathcal{F}$. Daí $\mathcal{E} \leq \mathcal{F}$ e, como $\mathcal{B}$ possui a propriedade da separação enumerável, existe $b \in \mathcal{B}$ que separa $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Temos então $\mathcal{E} \leq \{b\} \leq \mathcal{F}$. Afirmamos que ou $\mathcal{E} < \{b\}$ ou $\{b\} < \mathcal{F}$. De fato, caso contrário teríamos que $b$ é ao mesmo tempo uma disjunção finita de elementos de $\mathcal{E}$ e uma conjunção finita de elementos de $\mathcal{F}$, o que contradiz $\mathcal{E} < \mathcal{F}$. Assuma primeiramente que $\mathcal{E} \leq \{b\} < \mathcal{F}$. Como $\{b\} < \mathcal{F}$, segue que $\mathcal{F} \cup \{b'\}$ possui a propriedade da interseção finita. Por (ii), $\mathcal{F} \cup \{b'\}$ possui uma cota inferior não nula $x$. Daí $x$ é uma cota inferior para $\mathcal{F}$ e $x \leq b'$, i.e., $x \wedge b = 0$. Como $\mathcal{B}$ não tem átomos, temos que existe $y \in \mathcal{B}$ com $0 < y < x$. Temos então $\mathcal{E} \leq \{b\} < \{b \vee y\}$ e $\{b \vee y\} < \{b \vee x\} \leq \mathcal{F}$. Logo $b \vee y$ separa estritamente $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Suponha agora que $\mathcal{E} < \{b\} \leq \mathcal{F}$. Seja $\mathcal{E}' = \big\{e' : e \in \mathcal{E}\big\}$. Como $\mathcal{E} < \{b\}$, segue que $\mathcal{E}' \cup \{b\}$ possui a propriedade da interseção finita. Seja $x \in \mathcal{B}$ uma cota inferior não nula para $\mathcal{E}' \cup \{b\}$ e seja $y \in \mathcal{B}$ com $0 < y < x$. Temos $0 < y < x \leq b$. Daí $\{b \wedge y'\} < \{b\} \leq \mathcal{F}$. O fato que $x$ é uma cota inferior para $\mathcal{E}' \cup \{b\}$ implica que $x'$ é uma cota superior para $\mathcal{E}$ e portanto também $b \wedge x'$ é uma cota superior para $\mathcal{E}$. Daí $\mathcal{E} \leq \{b \wedge x'\} < \{b \wedge y'\}$. Assim $b \wedge y'$ separa estritamente $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. $\square$

3. **Lema.** *Seja $X$ um espaço topológico compacto, Hausdorff e zero-dimensional. Se $F$ é fechado em $X$, $U$ é aberto em $X$ e $F \subset U$ então existe um clopen $V$ em $X$ tal que $F \subset V \subset U$.*

*Demonstração.* Para cada $x \in F$, seja $V_x$ um clopen com $x \in V_x \subset U$. Tome $V$ como sendo a união de um número finito de conjuntos $V_x$ que cobrem o compacto $F$. $\square$

4. **Corolário.** *Seja $X$ um espaço topológico compacto, Hausdorff e zero-dimensional. Se um aberto $U$ de $X$ é um $F_\sigma$ então $U$ é uma união enumerável de clopens.*

*Demonstração.* Escreva $U = \bigcup_{n\in\omega} F_n$, com cada $F_n$ fechado em $X$. Para cada $n \in \omega$, encontramos um clopen $V_n$ com $F_n \subset V_n \subset U$. Daí:

$$U = \bigcup_{n\in\omega} V_n. \qquad \square$$

5. **Lema.** *Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole e $X$ o seu espaço de Stone. A condição (i) no enunciado do Lema 2 é equivalente à condição:*

(i') *se $U$, $V$ são abertos disjuntos de $X$ que são $F_\sigma$ então $U$ e $V$ têm fechos disjuntos.*

*Demonstração.* Assuma (i). Sejam $U$, $V$ abertos disjuntos de $X$ que são $F_\sigma$. Pelo Corolário 4, podemos escrever:

$$U = \bigcup_{n\in\omega} U_n, \quad V = \bigcup_{n\in\omega} V_n,$$

com $U_n$, $V_n$ clopens em $X$. Tomando:

$$\mathcal{E} = \big\{U_n : n \in \omega\big\}, \quad \mathcal{F} = \big\{X \setminus V_n : n \in \omega\big\},$$

então $\mathcal{E} \le \mathcal{F}$ e portanto, por (i), existe um clopen $W$ que separa $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Daí $W$ contém $U$ e $X \setminus W$ contém $V$. Como $W$ e $X \setminus W$ são fechados, segue que o fecho de $U$ e o fecho de $V$ são disjuntos. Agora assuma (i'). Vamos mostrar que a álgebra de clopens de $X$ (que é isomorfa a $\mathcal{B}$) satisfaz (i). Sejam $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ conjuntos enumeráveis de clopens de $X$ tais que $\mathcal{E} \le \mathcal{F}$. Se:

$$U = \bigcup \mathcal{E}, \quad V = \bigcup \big\{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\big\}$$

então $U$, $V$ são abertos, são $F_\sigma$ e são disjuntos. Por (i'), temos que os fechos $\overline{U}$ e $\overline{V}$ são disjuntos. Como o fechado $\overline{U}$ está contido no aberto $X \setminus \overline{V}$, o Lema 3 nos dá um clopen $W$ com $\overline{U} \subset W \subset X \setminus \overline{V}$. Daí $W$ separa $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. $\square$

6. **Lema.** *Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole e $X$ o seu espaço de Stone. A condição (ii) no enunciado do Lema 2 é equivalente à condição:*

(ii') *todo $G_\delta$ não vazio de $X$ tem interior não vazio.*

*Demonstração.* Suponha que $\mathcal{B}$ satisfaz (ii) e seja $G$ um $G_\delta$ não vazio de $X$. Daí:

$$G = \bigcap_{n\in\omega} U_n,$$

com cada $U_n$ um aberto de $X$. Seja $x \in G$. Para cada $n \in \omega$, temos $x \in U_n$ e portanto existe um clopen $V_n$ de $X$ com $x \in V_n \subset U_n$. Seja $H = \bigcap_{n\in\omega} V_n$. Daí $x \in H \subset G$. Como $H \ne \emptyset$, temos em particular que $\mathcal{F} = \big\{V_n : n \in \omega\big\}$ possui a propriedade da interseção finita e portanto, por (ii), existe um clopen $V$ não vazio que é uma cota inferior de $\mathcal{F}$. Daí $V$ é um aberto não vazio contido em $H$ (e em $G$), donde $G$ tem interior não vazio. Reciprocamente, assuma (ii') e mostremos que a álgebra de clopens de $X$ satisfaz (ii). Seja $\mathcal{F}$ uma coleção enumerável de clopens de $X$ com a propriedade da interseção finita. Como $X$ é compacto e $\mathcal{F}$ é uma coleção de fechados, temos que $G = \bigcap \mathcal{F}$ é não vazio. Como $G$ é um $G_\delta$, por (ii'),

$G$ possui interior não vazio. Assim, o interior de $G$ contém um clopen não vazio $V$. Daí $V$ é uma cota inferior não nula para $\mathcal{F}$. $\square$

7. **Lema.** *Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole e $X$ o seu espaço de Stone. A condição (iii) no enunciado do Lema 2 é equivalente à condição:*

(iii') *$X$ não tem pontos isolados.*

*Demonstração.* Sabemos que os átomos da álgebra de clopens de $X$ são precisamente os conjuntos da forma $\{x\}$, com $x$ um ponto isolado de $X$. $\square$