Nosso objetivo é demonstrar o seguinte resultado.

1. **Teorema.** *Seja X um espaço topológico Booleano (i.e., compacto, Hausdorff, zero-dimensional) cuja álgebra de clopens* $\mathrm{Clop}(X)$ *possui a propriedade de separação enumerável*[1] *e possui cardinal menor ou igual a $\aleph_1$. (Por exemplo, sob a hipótese do continuum, $X = \beta(\omega)$ e $X = \beta(\omega)\setminus\omega$ satisfazem essas hipóteses.) Se U é um aberto não vazio de X de tipo F_σ então o fecho de U é um retrato de X.*

Seja $Y = \overline{U}$ o fecho de U. Queremos demonstrar que a aplicação inclusão $i : Y \to X$ possui uma inversa à esquerda contínua. Pela dualidade de Stone, isso é o mesmo que mostrar que o homomorfismo induzido:

$$i^* : \mathrm{Clop}(X) \ni A \longmapsto i^{-1}(A) = A \cap Y \in \mathrm{Clop}(Y)$$

possui um inverso à direita $h : \mathrm{Clop}(Y) \to \mathrm{Clop}(X)$ que é um homomorfismo de álgebras de Boole. Seja:

$$\mathcal{I} = \wp(U) \cap \mathrm{Clop}(X)$$

o conjunto dos clopens de X que estão contidos em U. Evidentemente, $\mathcal{I}$ é um ideal de $\mathrm{Clop}(X)$. Além do mais, temos que $\mathcal{I}$ está contido em $\mathrm{Clop}(Y)$ e $\mathcal{I}$ é também um ideal[2] de $\mathrm{Clop}(Y)$.

Como todo fechado de X contido em U está contido num clopen de X contido em U e como U é uma união enumerável de fechados de X, temos que U é uma união enumerável de clopens de X; podemos escrever então:

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n,$$

onde $(U_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência crescente de clopens de X. Observamos que[3]:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \big\{A \in \mathrm{Clop}(X) : A \subset U_n, \text{ para algum } n \geq 1\big\}\\ &= \big\{A \in \mathrm{Clop}(Y) : A \subset U_n, \text{ para algum } n \geq 1\big\}.\end{aligned}$$

De fato, note que se $A \in \mathcal{I}$ então A é um subconjunto compacto de U e portanto pode ser coberto por um número finito (e portanto por apenas um) dos abertos U_n. Além do mais, se $A \in \mathrm{Clop}(Y)$ e $A \subset U_n$ para algum $n \geq 1$ então A é um clopen de U_n e portanto um clopen de X.

[1]Uma álgebra de Boole $\mathcal{B}$ possui a *propriedade de separação enumerável* quando dados subconjuntos enumeráveis $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}$ com $e \leq f$ para todos $e \in \mathcal{E}$, $f \in \mathcal{F}$ então existe $x \in \mathcal{B}$ que é uma cota superior de $\mathcal{E}$ e uma cota inferior de $\mathcal{F}$.

[2]O único fato não trivial a ser verificado é que se $A \in \mathcal{I}$, $B \subset A$ e $B \in \mathrm{Clop}(Y)$ então $B \in \mathcal{I}$. Para verificar isso, note que se $B \subset A \subset Y$ e B é um clopen de Y então B é um clopen de A; além do mais, se A é um clopen de X e B é um clopen de A então B é um clopen de X também.

[3]Em outras palavras, $\mathcal{I}$ é o ideal de $\mathrm{Clop}(X)$ (e também o ideal de $\mathrm{Clop}(Y)$) gerado por $\big\{U_n : n \geq 1\big\}$.

2. **Definição.** Se $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de $\mathrm{Clop}(Y)$ e $h : \mathcal{B} \to \mathrm{Clop}(X)$ é um homomorfismo, diremos que h é *admissível* se as duas seguintes condições são satisfeitas:

(1) $i^* \circ h$ é a aplicação inclusão de $\mathcal{B}$ em $\mathrm{Clop}(Y)$, i.e., $h(B) \cap Y = B$, para todo $B \in \mathcal{B}$;
(2) $h(I) = I$, para todo $I \in \mathcal{I} \cap \mathcal{B}$.

Evidentemente, a restrição de um homomorfismo admissível a uma subálgebra de seu domínio é ainda um homomorfismo admissível.

A demonstração do Teorema 1 estará completa se mostrarmos que existe um homomorfismo admíssível h cujo domínio é $\mathrm{Clop}(Y)$. Observe, no entanto, que se U for um clopen de X então $Y = U$ e portanto $Y \in \mathcal{I}$. Nesse caso, um homomorfismo admíssivel h deveria satisfazer $h(Y) = Y$ e ao mesmo tempo $h(Y) = X$, o que não é possível se $Y \neq X$. Porém, se U é um clopen não vazio de X então $Y = U$ é obviamente um retrato de X; de fato, nesse caso uma aplicação $r : X \to Y$ tal que $r|_Y$ é a aplicação identidade de Y e tal que $r|_{X \setminus Y}$ é constante é uma retração.

No que segue, assumiremos que U *não* é um clopen de X, de modo que U é um subconjunto próprio de Y e $Y \notin \mathcal{I}$.

Recordamos o seguinte resultado sobre extensão de homomorfismos de álgebras de Boole.

3. **Lema.** *Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ álgebras de Boole, $\mathcal{B}$ uma subálgebra de $\mathcal{A}$, $x \in \mathcal{A}$ e $y \in \mathcal{A}'$; denote por $\mathcal{B}[x]$ a subálgebra de $\mathcal{A}$ gerada por $\mathcal{B} \cup \{x\}$. Dados um homomorfismo $h : \mathcal{B} \to \mathcal{A}'$ então h estende-se (de modo único) a um homomorfismo de $\mathcal{B}[x]$ em $\mathcal{A}'$ que leva x em y se e somente se as duas seguintes condições são satisfeitas:*

(i) *$h(b) \leq y$, para todo $b \in \mathcal{B}$ com $b \leq x$;*
(ii) *$y \leq h(b)$, para todo $b \in \mathcal{B}$ com $x \leq b$.* □

4. **Corolário.** *Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ álgebras de Boole, $\mathcal{B}$ uma subálgebra enumerável de $\mathcal{A}$ e $x \in \mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}'$ possui a propriedade de separação enumerável então todo homomorfismo $h : \mathcal{B} \to \mathcal{A}'$ estende-se a um homomorfismo de $\mathcal{B}[x]$ em $\mathcal{A}'$.*

Demonstração. Basta notar que todo elemento do conjunto enumerável:

$$\big\{h(b) : b \in \mathcal{B},\ b \leq x\big\} \tag{1}$$

é menor ou igual a todo elemento do conjunto enumerável:

$$\big\{h(b) : b \in \mathcal{B},\ x \leq b\big\} \tag{2}$$

e portanto, já que $\mathcal{A}'$ possui a propriedade de separação enumerável, existe $y \in \mathcal{A}'$ que é uma cota superior de (1) e é uma cota inferior de (2). □

Usando o Lema 3, demonstraremos o seguinte resultado.

5. **Lema.** *Se $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de $\mathrm{Clop}(Y)$ e $h : \mathcal{B} \to \mathrm{Clop}(X)$ é um homomorfismo admissível então, para todo $I \in \mathcal{I}$, temos que h estende-se (de modo único) a um homomorfismo admissível $h' : \mathcal{B}[I] \to \mathrm{Clop}(X)$.*

Demonstração. Primeiramente, usamos o Lema 3 para verificar que h estende-se a um homomorfismo $h' : \mathcal{B}[I] \to \mathrm{Clop}(X)$ tal que $h'(I) = I$. (Note que $h'(I) = I$ é a única possibilidade para que h' seja admissível.) Dado $B \in \mathcal{B}$ com $B \subset I$ então $B \in \mathcal{I}$ e portanto $h(B) = B$, já que h é admissível. Daí $h(B) \subset I$. Agora, se $B \in \mathcal{B}$ e $I \subset B$ então, já que $h(B) \cap Y = B$, temos $I \subset B \subset h(B)$. Isso mostra a existência de h'. Verifiquemos agora que h' é admissível. Em primeiro lugar, temos que o homomorfismo $i^* \circ h'$ fixa todos os elementos de $\mathcal{B} \cup \{I\}$ e portanto fixa todos os elementos de $\mathcal{B}[I]$. Verifiquemos agora que h' fixa os elementos de $\mathcal{B}[I] \cap \mathcal{I}$. Todo elemento de $\mathcal{B}[I]$ é da forma:

$$(B_1 \cap I) \cup (B_2 \setminus I), \tag{3}$$

com $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Se (3) pertence a $\mathcal{I}$ então $B_2 \setminus I$ pertence a $\mathcal{I}$ e daí também B_2 pertence a $\mathcal{I}$, já que $B_2 \subset (B_2 \setminus I) \cup I$. Temos:

$$h'(B_1 \cap I) = h'(B_1) \cap h'(I) = h(B_1) \cap I = h(B_1) \cap Y \cap I = B_1 \cap I,$$

e:

$$h'(B_2 \setminus I) = h'(B_2) \setminus h'(I) = h(B_2) \setminus I = B_2 \setminus I,$$

já que $B_2 \in \mathcal{I}$. Logo h' fixa (3). □

6. **Corolário.** *Se $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de* $\mathrm{Clop}(Y)$ *e $h : \mathcal{B} \to \mathrm{Clop}(X)$ é um homomorfismo admissível então h estende-se (de modo único) a um homomorfismo admissível $h' : \mathcal{B}[\mathcal{I}] \to \mathrm{Clop}(X)$ definido na subálgebra $\mathcal{B}[\mathcal{I}]$ gerada por $\mathcal{B} \cup \mathcal{I}$.*

Demonstração. Se $\mathcal{S}$ é um subconjunto finito de $\mathcal{I}$ então h estende-se de modo único a um homomorfismo admissível $h_{\mathcal{S}} : \mathcal{B}[\mathcal{S}] \to \mathrm{Clop}(X)$ definido na subálgebra $\mathcal{B}[\mathcal{S}]$ gerada por $\mathcal{B} \cup \mathcal{S}$. De fato, a unicidade segue do fato que duas extensões admissíveis de h a $\mathcal{B}[\mathcal{S}]$ devem coincidir em $\mathcal{B} \cup \mathcal{S}$. A existência segue facilmente do Lema 5, usando indução no número de elementos de $\mathcal{S}$. Se $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ são subconjuntos finitos de $\mathcal{I}$ então $h_{\mathcal{S}_1}$ e $h_{\mathcal{S}_2}$ coincidem na interseção de seus domínios, já que ambos são restrições de $h_{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2}$. Assim, existe uma única função h' definida em:

$$\mathcal{B}[\mathcal{I}] = \bigcup \big\{ \mathcal{B}[\mathcal{S}] : \mathcal{S} \subset \mathcal{I} \text{ finito} \big\}$$

que estende todos os homomorfismos $h_{\mathcal{S}}$. Como todo subconjunto finito de $\mathcal{B}[\mathcal{I}]$ está contido em $\mathcal{B}[\mathcal{S}]$ para algum subconjunto finito $\mathcal{S}$ de $\mathcal{I}$, segue facilmente que h' é um homomorfismo. Evidentemente, h' é admissível. □

7. **Lema.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma subálgebra de* $\mathrm{Clop}(Y)$*, $f : \mathcal{A} \to \mathrm{Clop}(X)$ um homomorfismo e $B \in \mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}_0$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$ tal que $f|_{\mathcal{A}_0}$ é admissível e tal que $B \cap U_n \in \mathcal{A}_0$ para todo $n \geq 1$ então $B \subset (i^* \circ f)(B)$.*

Demonstração. Como $B \cap U_n \in \mathcal{A}_0$ e $f|_{\mathcal{A}_0}$ é admissível, temos que:

$$(i^* \circ f)(B \cap U_n) = B \cap U_n.$$

Além do mais, como $B \cap U_n \subset B$, temos:

$$B \cap U_n = (i^* \circ f)(B \cap U_n) \subset (i^* \circ f)(B),$$

para todo $n \geq 1$. Portanto:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap U_n) = B \cap U \subset (i^* \circ f)(B). \tag{4}$$

Note agora que U é denso em Y e B é aberto em Y, donde $B \cap U$ é denso em B; como $(i^* \circ f)(B)$ é fechado, obtemos de (4) que $B \subset (i^* \circ f)(B)$. $\square$

8. **Lema.** *Se $\mathcal{B}$ é uma subálgebra enumerável de* $\mathrm{Clop}(Y)$ *e $h : \mathcal{B} \to \mathrm{Clop}(X)$ é um homomorfismo admissível então, para todo $A \in \mathrm{Clop}(Y)$, temos que h estende-se a um homomorfismo admissível definido em $\mathcal{B}[A]$.*

Demonstração. Seja:

$$\mathcal{S} = \big\{U_n \cap A : n \geq 1\big\} \cup \big\{U_n \setminus A : n \geq 1\big\} \subset \mathcal{I}.$$

Segue do Corolário 6 que h estende-se a um homomorfismo admissível h' definido em $\mathcal{B}' = \mathcal{B}[\mathcal{S}]$ (pois a extensão admissível de h a $\mathcal{B}[\mathcal{I}]$ pode ser restringida a $\mathcal{B}[\mathcal{S}]$, evidentemente). Já que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{S}$ são enumeráveis, temos que $\mathcal{B}'$ também é enumerável. Como a álgebra de Boole $\mathrm{Clop}(X)$ possui a propriedade de separação enumerável, segue do Corolário 4 que h' estende-se a um homomorfismo $h'' : \mathcal{B}'[A] \to \mathrm{Clop}(X)$. Vamos verificar que h'' é admissível; seguirá então que a restrição de h'' a $\mathcal{B}[A]$ é a extensão admissível desejada de h. Como h' é admissível, temos que $i^* \circ h''$ fixa os elementos de $\mathcal{B}'$. Para concluir que $i^* \circ h''$ fixa todo elemento de $\mathcal{B}'[A]$, é suficiente então verificar que $i^* \circ h''$ fixa A. Como $U_n \cap A$ e $U_n \setminus A$ estão em $\mathcal{B}'$ para todo $n \geq 1$ e como a restrição de h'' a $\mathcal{B}'$ (i.e., h') é admissível, podemos aplicar o Lema 7 para $B = A$ e para $B = A^{\mathrm{c}} = Y \setminus A$, obtendo:

$$A \subset (i^* \circ h'')(A), \quad A^{\mathrm{c}} \subset (i^* \circ h'')(A^{\mathrm{c}}) = \big((i^* \circ h'')(A)\big)^{\mathrm{c}}.$$

Segue daí que $A = (i^* \circ h'')(A)$. Finalmente, devemos verificar que h'' fixa todos os elementos de $\mathcal{B}'[A] \cap \mathcal{I}$. Com esse propósito, mostraremos que $\mathcal{B}'[A] \cap \mathcal{I} = \mathcal{B}' \cap \mathcal{I}$. Como h'' estende h' e h' fixa os elementos de $\mathcal{B}' \cap \mathcal{I}$, a conclusão seguirá. Seja $I \in \mathcal{B}'[A] \cap \mathcal{I}$. Como $I \in \mathcal{B}'[A]$, existem $B_1, B_2 \in \mathcal{B}'$ tais que:

$$I = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \setminus A).$$

Como $I \in \mathcal{I}$, existe $n \geq 1$ tal que $I \subset U_n$. Daí:

$$I = I \cap U_n = \big(B_1 \cap (A \cap U_n)\big) \cup \big(B_2 \cap (U_n \setminus A)\big),$$

e como $A \cap U_n$ e $U_n \setminus A$ estão em $\mathcal{B}'$, concluímos que $I \in \mathcal{B}'$. $\square$

O próximo lema completa a demonstração do Teorema 1.

9. **Lema.** *Se U não é um clopen de X então existe um homomorfismo admissível $h : \mathrm{Clop}(Y) \to \mathrm{Clop}(X)$.*

Demonstração. Como $\mathrm{Clop}(Y)$ é uma imagem homomórfica de $\mathrm{Clop}(X)$ e como $\mathrm{Clop}(X)$ tem cardinal menor ou igual a $\aleph_1$, temos que $\mathrm{Clop}(Y)$ também tem cardinal menor ou igual a $\aleph_1$. Escreva:

$$\mathrm{Clop}(Y) = \big\{A_\alpha : \alpha \in \aleph_1\big\},$$

e para cada $\alpha \in \aleph_1$, seja $\mathcal{B}_\alpha$ a subálgebra de $\mathrm{Clop}(Y)$ gerada por:

$$\big\{A_\beta : \beta < \alpha\big\}.$$

Vamos definir por recursão transfinita uma família de homomorfismos admissíveis $h_\alpha : \mathcal{B}_\alpha \to \mathrm{Clop}(X)$, $\alpha \in \aleph_1$, de modo que h_α estende h_β quando $\beta \le \alpha$. Como $\mathrm{Clop}(Y) = \bigcup_{\alpha\in\aleph_1} \mathcal{B}_\alpha$, o homomorfismo admissível h é obtido então tomando a união de todos os h_α. Em primeiro lugar, note que $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, Y\}$ e podemos então definir $h_0 : \mathcal{B}_0 \to \mathrm{Clop}(X)$ fazendo $h_0(\emptyset) = \emptyset$ e $h_0(Y) = X$. (O fato que h_0 é admissível segue do fato que U não é um clopen de X, de modo que $Y \notin \mathcal{I}$.) Dado $\alpha \in \aleph_1$, temos $\mathcal{B}_{\alpha+1} = \mathcal{B}_\alpha[A_\alpha]$. Como $\mathcal{B}_\alpha$ é enumerável, o Lema 8 nos diz que o homomorfismo admissível $h_\alpha : \mathcal{B}_\alpha \to \mathrm{Clop}(X)$ admite uma extensão admissível $h_{\alpha+1} : \mathcal{B}_{\alpha+1} \to \mathrm{Clop}(X)$. Finalmente, se $\alpha \in \aleph_1$ é um ordinal limite então $\mathcal{B}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{B}_\beta$ e definimos o homomorfismo h_α como sendo a união dos homomorfismos h_β com $\beta < \alpha$. $\square$