Dada uma álgebra de Boole $\mathcal{A}$, denotamos por $\mathrm{Stone}(\mathcal{A})$ o seu espaço de Stone. No que segue, X denota um conjunto e $\mathcal{A}$ denota uma álgebra de subconjuntos de X, i.e., uma subálgebra de Boole da álgebra $\wp(X)$ de todas as partes de X. O espaço de Stone de $\wp(X)$ é uma compactificação de Stone–Čech do espaço topológico discreto X e será denotado por $\beta(X)$. (Identificamos cada ponto $x \in X$ com o ultrafiltro principal de $\wp(X)$ gerado por $\{x\}$.) Temos que se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada então sua única extensão contínua $\bar{f} : \beta(X) \to \mathbb{R}$ é dada por:

$$\bar{f}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} - \lim f, \quad \mathcal{U} \in \beta(X),$$

onde $\mathcal{U} - \lim f$ denota o limite do ultrafiltro:

$$f_*\mathcal{U} = \big\{B \in \wp(\mathbb{R}) : f^{-1}(B) \in \mathcal{U}\big\}.$$

A aplicação inclusão de $\mathcal{A}$ em $\wp(X)$ (que é um homomorfismo injetor de álgebras de Boole) induz uma função contínua sobrejetora entre os correspondentes espaços de Stone dada por:

$$\beta(X) \ni \mathcal{U} \longmapsto \mathcal{U} \cap \mathcal{A} \in \mathrm{Stone}(\mathcal{A}). \tag{1}$$

Dizemos que uma função ϕ definida em $\beta(X)$ *passa ao quociente* com respeito à aplicação (1) se ϕ é constante nos conjuntos de nível definidos por (1), i.e., se $\phi(\mathcal{U}_1) = \phi(\mathcal{U}_2)$ sempre que $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \beta(X)$ são tais que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{A} = \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{A}$.

1. **Lema.** *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de partes de X então as duas seguintes condições são equivalentes a respeito de uma função limitada $f : X \to \mathbb{R}$:*

(a) *$\bar{f} : \beta(X) \to \mathbb{R}$ passa ao quociente com respeito a (1);*

(b) *se F_1, F_2 são subconjuntos fechados disjuntos de $\mathbb{R}$ então existe A em $\mathcal{A}$ tal que $f^{-1}(F_1) \subset A$ e $A \cap f^{-1}(F_2) = \emptyset$.*

Demonstração. Suponha (a) e vamos demonstrar (b). Sejam F_1, F_2 subconjuntos fechados disjuntos de $\mathbb{R}$. Para $i = 1, 2$, seja:

$$\mathfrak{F}_i = \big\{A \in \mathcal{A} : A \supset f^{-1}(F_i)\big\}.$$

Temos que $\mathfrak{F}_i$ é uma coleção não vazia (já que $X \in \mathfrak{F}_i$) e fechada por interseções finitas[1]. Suponha por absurdo que todo $A \in \mathcal{A}$ que contém $f^{-1}(F_1)$ intersecte $f^{-1}(F_2)$. Daí todo elemento de $\mathfrak{F}_1$ intersecta $f^{-1}(F_2)$ e portanto todo elemento de $\mathfrak{F}_1$ intersecta todo elemento de $\mathfrak{F}_2$. Segue que a coleção:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$$

possui a propriedade da interseção finita e está portanto contida num ultrafiltro $\mathcal{U}_0$ de $\mathcal{A}$. Note que todo elemento de $\mathcal{U}_0$ intersecta $f^{-1}(F_i)$: de fato, se $A \in \mathcal{U}_0$ não intersecta $f^{-1}(F_i)$ então $X \setminus A \in \mathcal{A}$ contém $f^{-1}(F_i)$ e portanto $X \setminus A \in \mathfrak{C} \subset \mathcal{U}_0$, o que contradiz $A \in \mathcal{U}_0$. Daí $\mathcal{U}_0 \cup \{f^{-1}(F_i)\}$ possui a propriedade da interseção finita e portanto está contido num ultrafiltro $\mathcal{U}_i$ de $\wp(X)$. Temos então $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{A} = \mathcal{U}_0$ e $f^{-1}(F_i) \in \mathcal{U}_i$. De $f^{-1}(F_i) \in \mathcal{U}_i$ e do

[1] Temos que $\mathfrak{F}_i$ é um filtro de $\mathcal{A}$.

fato que F_i é fechado, segue que $\bar{f}(\mathcal{U}_i) = \mathcal{U}_i - \lim f \in F_i$. Mas $\bar{f}(\mathcal{U}_1) = \bar{f}(\mathcal{U}_2)$ e F_1, F_2 são disjuntos, o que nos dá uma contradição.

Agora suponha (b) e vamos demonstrar (a). Sejam $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \beta(X)$ tais que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{A} = \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{A}$. Se fosse $\bar{f}(\mathcal{U}_1) \neq \bar{f}(\mathcal{U}_2)$, existiriam fechados disjuntos $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}$ tais que F_i é uma vizinhança de $\bar{f}(\mathcal{U}_i)$, $i = 1, 2$. Seja $A \in \mathcal{A}$ um conjunto que contém $f^{-1}(F_1)$ e é disjunto de $f^{-1}(F_2)$. Daí $f^{-1}(F_1) \in \mathcal{U}_1$ e portanto $A \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{A}$. Mas também $f^{-1}(F_2) \in \mathcal{U}_2$ e portanto $X \setminus A \in \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{A}$, contradizendo a igualdade $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{A} = \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{A}$. □

Dizemos que uma função é *simples* se a sua imagem é finita. Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de partes de X então uma função simples f definida em X é dita $\mathcal{A}$-*mensurável* se $f^{-1}(c) \in \mathcal{A}$ para qualquer c pertencente à imagem de f. Segue facilmente daí que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para qualquer subconjunto B do contra-domínio de f.

No que segue denotaremos por $\mathfrak{B}(X, \mathbb{R})$ o espaço de Banach das funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$, munido da norma do supremo $\| \cdot \|_{\text{sup}}$.

2. **Lema.** *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de partes de X então o subconjunto de $\mathfrak{B}(X, \mathbb{R})$ formado pelas funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$ que satisfazem a condição (b) que aparece no enunciado do Lema 1 é fechado.*

Demonstração. Seja $f \in \mathfrak{B}(X, \mathbb{R})$ um elemento do fecho do subconjunto formado pelas funções que satisfazem (b) e sejam F_1, F_2 subconjuntos fechados disjuntos de $\mathbb{R}$. Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ que contém a imagem de f e seja $K_i = F_i \cap K$, $i = 1, 2$. Note que $f^{-1}(K_i) = f^{-1}(F_i)$. Sejam U_1, U_2 abertos de $\mathbb{R}$ com fechos disjuntos tais que $K_i \subset U_i$, $i = 1, 2$. Seja $\varepsilon > 0$ um número positivo menor ou igual à distância de K_i ao complementar de U_i, $i = 1, 2$, e seja $g \in \mathfrak{B}(X, \mathbb{R})$ uma função que satisfaz (b) e tal que $\|f - g\|_{\text{sup}} < \varepsilon$. Daí $f^{-1}(K_i) \subset g^{-1}(U_i)$. Como $\overline{U_1}$, $\overline{U_2}$ são fechados disjuntos de $\mathbb{R}$, existe $A \in \mathcal{A}$ que contém $g^{-1}(\overline{U_1})$ e é disjunto de $g^{-1}(\overline{U_2})$. Daí A contém $f^{-1}(K_1) = f^{-1}(F_1)$ e é disjunto de $f^{-1}(K_2) = f^{-1}(F_2)$. □

3. **Lema.** *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de partes de X e se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada então a condição (b) que aparece no enunciado do Lema 1 é equivalente à condição:*

   (c) *f pertence ao fecho em $\mathfrak{B}(X, \mathbb{R})$ do subconjunto formado pelas funções simples $\mathcal{A}$-mensuráveis de X em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função simples $\mathcal{A}$-mensurável então f satisfaz a condição (b): de fato, se F_1, F_2 são subconjuntos fechados disjuntos de $\mathbb{R}$ então $A = f^{-1}(F_1)$ está em $\mathcal{A}$ e é disjunto de $f^{-1}(F_2)$. Segue então do Lema 2 que (c) implica (b). Suponha agora que $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada que satisfaz (b) e vamos demonstrar que f satisfaz (c). Seja dado $\varepsilon > 0$ e sejam F_i, $i = 1, \ldots, k$, conjuntos fechados de diâmetro menor do que ε que cobrem a imagem de f. Para cada $i = 1, \ldots, k$, seja U_i um aberto de $\mathbb{R}$ de diâmetro menor do que ε que contém F_i. Como F_i e $\mathbb{R} \setminus U_i$ são fechados disjuntos, existe $A_i \in \mathcal{A}$ que contém $f^{-1}(F_i)$ e é disjunto de

$f^{-1}(\mathbb{R}\setminus U_i)$; daí A_i está contido em $f^{-1}(U_i)$ e portanto $f(A_i)$ tem diâmetro menor do que ε. Como os conjuntos F_i cobrem a imagem de f, temos que os conjuntos A_i cobrem X. Sejam $A'_1 = A_1$ e $A'_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$, $i = 2, \ldots, k$. Daí os conjuntos A'_i constituem uma partição de X formada por elementos de $\mathcal{A}$ e $f(A'_i)$ tem diâmetro menor do que ε, para todo $i = 1, \ldots, k$. Defina uma função simples $g : X \to \mathbb{R}$ fazendo com que, para cada $i = 1, \ldots, k$ tal que A'_i não é vazio, a restrição de g a A'_i seja constante e igual a um elemento qualquer de $f(A'_i)$. Daí $\|f - g\|_{\sup} \le \varepsilon$ e g é uma função simples $\mathcal{A}$-mensurável. □

4. **Corolário.** *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de partes de X e se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada então as condições (a), (b) e (c) são equivalentes.* □

5. *Observação.* Se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de partes de X então a condição (b) é equivalente à $\mathcal{A}$-mensurabilidade de f (i.e., equivalente à condição de que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, para todo Boreleano B de $\mathbb{R}$). De fato, se f é $\mathcal{A}$-mensurável e F_1, F_2 são fechados disjuntos de $\mathbb{R}$ então $A = f^{-1}(F_1) \in \mathcal{A}$ é disjunto de $f^{-1}(F_2)$. Reciprocamente, suponha que f satisfaz (b) e vamos demonstrar que f é $\mathcal{A}$-mensurável. É suficiente mostrar que $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ se F é um fechado de $\mathbb{R}$. Escreva o aberto $\mathbb{R} \setminus F$ como uma união enumerável de subconjuntos fechados F_n de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, os fechados F e F_n são disjuntos e portanto existe $A_n \in \mathcal{A}$ que contém $f^{-1}(F)$ e é disjunto de $f^{-1}(F_n)$. Daí $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ contém $f^{-1}(F)$ e é disjunto de:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(F_n) = f^{-1}(\mathbb{R}\setminus F) = X \setminus f^{-1}(F).$$

Logo $A = f^{-1}(F)$ e $A \in \mathcal{A}$.

6. **Lema.** *Seja K um espaço Booleano (i.e., compacto, Hausdorff e zero-dimensional). Se $C(K)$ denota o espaço de Banach das funções contínuas $f : K \to \mathbb{R}$ munido da norma do supremo então o conjunto das funções simples e contínuas $f : K \to \mathbb{R}$ é denso em $C(K)$.*

Demonstração. Seja $f : K \to \mathbb{R}$ uma função contínua e seja $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in K$, existe um clopen U_x em K contendo x tal que $f(U_x)$ tem diâmetro menor do que ε. Um número finito dos conjuntos U_x, digamos U_{x_i}, $i = 1, \ldots, k$, cobre K. Sejam:

$$A_1 = U_{x_1}, \qquad A_i = U_{x_i} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} U_{x_j}, \quad i = 2, \ldots, k.$$

Daí $A_1, \ldots, A_k$ formam uma partição de K em clopens e $f(A_i)$ tem diâmetro menor do que ε, para todo $i = 1, \ldots, k$. Defina uma função simples g em K fazendo com que, para cada $i = 1, \ldots, k$ tal que A_i é não vazio, a restrição de g a A_i seja constante e igual a algum elemento de $f(A_i)$. Daí g é simples, contínua e $\|f - g\|_{\sup} \le \varepsilon$. □