Dados $B \in \wp(\omega)$ e $\mathcal{E} \subset \wp(\omega)$, dizemos que B é *bom* para $\mathcal{E}$ se para todo $k \in \omega$ o conjunto:

$$\big\{E \in \mathcal{E} : E \cap B \subset k\big\}$$

é finito. Para $B \in \wp(\omega)$, denotamos por $[B] \in \wp(\omega)/\mathrm{fin}$ a classe de equivalência de B.

Nós queremos demonstrar a seguinte:

1. **Proposição.** *Existem famílias $(A_\alpha)_{\alpha\in\aleph_1}$, $(B_\alpha)_{\alpha\in\aleph_1}$ em $\wp(\omega)$ tais que:*
   (a) *se $\alpha, \beta \in \aleph_1$ e $\alpha < \beta$ então $[A_\alpha] < [A_\beta]$ e $[B_\alpha] < [B_\beta]$;*
   (b) *$A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$, para todo $\alpha \in \aleph_1$;*
   (c) *para todo $\alpha \in \aleph_1$, B_α é bom para $\big\{A_\beta : \beta < \alpha\big\}$.*

Precisamos de alguns lemas.

2. **Lema.** *Dados $B, C \in \wp(\omega)$ e $\mathcal{E} \subset \wp(\omega)$, se B é bom para $\mathcal{E}$ e $[B] \le [C]$ então C é bom para $\mathcal{E}$.*

Demonstração. Seja $F \subset \omega$ um conjunto finito tal que $B \subset C \cup F$. Dado $k \in \omega$, seja $l \in \omega$ tal que $k \cup F \subset l$. É claro que:

$$\big\{E \in \mathcal{E} : E \cap C \subset k\big\} \subset \big\{E \in \mathcal{E} : E \cap B \subset l\big\}$$

e portanto $\big\{E \in \mathcal{E} : E \cap C \subset k\big\}$ é finito. □

Dados $B \in \wp(\omega)$ e $\mathcal{E} \subset \wp(\omega)$, dizemos que B é *quase-incompatível* com $\mathcal{E}$ se $[B] \wedge [E] = 0$ (i.e., se $B \cap E$ é finito) para todo $E \in \mathcal{E}$.

3. **Lema.** *Sejam $(\mathcal{E}_k)_{k\in\omega}$ uma seqüência de subconjuntos enumeráveis de $\wp(\omega)$ e $\mathcal{E} = \bigcup_{k\in\omega} \mathcal{E}_k$. Suponha*[1] *que para quaisquer $k \in \omega$, $E \in \mathcal{E}_k$ e para todo subconjunto finito $\mathcal{F}$ de $\bigcup_{i<k} \mathcal{E}_i$ o conjunto $E \setminus \big(\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F\big)$ seja infinito. Se $B \in \wp(\omega)$ é bom para $\mathcal{E}_k$ para todo $k \in \omega$ então existe $C \in \wp(\omega)$ que é quase-incompatível com $\mathcal{E}$ e tal que $B \cup C$ é bom para $\mathcal{E}$.*

Demonstração. Suponha $\mathcal{E} \neq \emptyset$ (senão o resultado é trivial). Seja $\phi : \omega \to \mathcal{E}$ uma função sobrejetora. Para cada $k \in \omega$ seja $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{E}$ a interseção de $\bigcup_{i<k} \mathcal{E}_i$ com a imagem de $\phi|_k$. Daí $\mathcal{F}_k$ é um subconjunto finito de $\bigcup_{i<k} \mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{k+1}$ para todo $k \in \omega$ e $\mathcal{E} = \bigcup_{k\in\omega} \mathcal{F}_k$. Para $k \in \omega$ defina também:

$$\mathcal{G}_k = \big\{E \in \mathcal{E}_k : E \cap B \subset k\big\},$$

de modo que $\mathcal{G}_k$ é um subconjunto finito de $\mathcal{E}_k$. Para cada $E \in \mathcal{G}_k$ o conjunto $E \setminus \big(\bigcup_{F\in\mathcal{F}_k} F\big)$ é infinito e portanto possui um elemento $x_E \ge k$. Sejam:

$$C_k = \big\{x_E : E \in \mathcal{G}_k\big\} \in \wp(\omega), \quad k \in \omega,$$

e $C = \bigcup_{k\in\omega} C_k$. Temos então que C_k é finito e é disjunto de todo $F \in \mathcal{F}_k$. Dado $F \in \mathcal{E}$ temos que existe $l \in \omega$ tal que $F \in \mathcal{F}_k$ para todo $k \ge l$ e portanto o conjunto:

$$F \cap C = \bigcup_{k\in\omega} (F \cap C_k) = \bigcup_{k<l} (F \cap C_k)$$

[1] Essa hipótese implica em particular que os conjuntos $\mathcal{E}_k$ são dois a dois disjuntos. De fato, se $i < k$, $E \in \mathcal{E}_k$ e $F \in \mathcal{E}_i$ então $E \setminus F$ é infinito e, em particular, $E \neq F$.

é finito. Isso mostra que C é quase-incompatível com $\mathcal{E}$. Vamos mostrar que $B \cup C$ é bom para $\mathcal{E}$. Dado $k \in \omega$, temos:

$$\big\{E \in \mathcal{E} : E \cap (B \cup C) \subset k\big\} = \bigcup_{l \in \omega} \big\{E \in \mathcal{E}_l : E \cap (B \cup C) \subset k\big\}.$$

Para todo $l \in \omega$ o conjunto:

$$\big\{E \in \mathcal{E}_l : E \cap (B \cup C) \subset k\big\} \tag{1}$$

está contido no conjunto finito $\big\{E \in \mathcal{E}_l : E \cap B \subset k\big\}$. A demonstração estará completa se verificarmos que o conjunto (1) é vazio para $l \geq k$. Suponha que existam $l \geq k$ e $E \in \mathcal{E}_l$ com $E \cap (B \cup C) \subset k$. Daí $E \cap B \subset k \subset l$ e portanto $E \in \mathcal{G}_l$. Temos $x_E \geq l \geq k$, $x_E \in E$ e $x_E \in C_l \subset C$. Daí $x_E \in E \cap (B \cup C)$ e $x_E \notin k$, uma contradição. □

Temos agora um lema simples a respeito de ordinais enumeráveis.

4. **Lema.** *Se α é um ordinal limite enumerável então existe uma seqüência estritamente crescente de ordinais $(\alpha_k)_{k \in \omega}$ tal que $\alpha = \bigcup_{k \in \omega} \alpha_k$.*

Demonstração. Como $\alpha \neq \emptyset$ é enumerável, existe uma função sobrejetora $\phi : \omega \to \alpha$. Construa a seqüência $(\alpha_k)_{k \in \omega}$ por recursão fazendo $\alpha_0 = \phi(0)$ e α_{k+1} igual ao sucessor de $\alpha_k \cup \phi(k+1)$, para todo $k \in \omega$. Daí $\alpha_k \geq \phi(k)$ para todo $k \in \omega$ e portanto $\alpha = \bigcup_{k \in \omega} \alpha_k$. □

Agora precisamos de alguns lemas simples sobre álgebras de Boole. Dois subconjuntos $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ de uma álgebra de Boole $\mathcal{B}$ serão ditos *incompatíveis* se $e \wedge f = 0$ para todos $e \in \mathcal{E}$, $f \in \mathcal{F}$. Se $b \in \mathcal{B}$ e $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ diremos também que b é *incompatível* com $\mathcal{E}$ se $b \wedge e = 0$ para todo $e \in \mathcal{E}$.

5. **Lema.** *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole com a propriedade de separação enumerável. Se $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ são subconjuntos incompatíveis enumeráveis de $\mathcal{B}$ então $\mathcal{F}$ possui uma cota superior $b \in \mathcal{B}$ que é incompatível com $\mathcal{E}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}' = \big\{f' : f \in \mathcal{F}\big\}$. Como $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ são incompatíveis, temos que $\mathcal{E} \leq \mathcal{F}'$. Como $\mathcal{B}$ possui a propriedade de separação enumerável, existe $b \in \mathcal{B}$ que é uma cota superior para $\mathcal{E}$ e uma cota inferior para $\mathcal{F}'$. Daí b' é uma cota superior para $\mathcal{F}$ que é incompatível com $\mathcal{E}$. □

6. *Observação.* Recorde que se uma álgebra de Boole $\mathcal{B}$ possui a propriedade forte de separação enumerável, se $\mathcal{E}$ é um subconjunto enumerável dirigido para cima sem maior elemento de $\mathcal{B}$ e se $b \in \mathcal{B}$ é uma cota superior de $\mathcal{E}$ então existe uma cota superior b_0 de $\mathcal{E}$ tal que $b_0 < b$.

7. **Lema.** *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole sem átomos. Dados $x, y \in \mathcal{B}$, se $x \wedge y = 0$ e $x \vee y < 1$ então existem $x_1, y_1 \in \mathcal{B}$ com $x < x_1$, $y < y_1$, $x_1 \wedge y_1 = 0$ e $x_1 \vee y_1 < 1$.*

Demonstração. Como $(x \vee y)' > 0$ e $\mathcal{B}$ não tem átomos, existe $z \in \mathcal{B}$ com $0 < z < (x \vee y)'$. Novamente, como $\mathcal{B}$ não tem átomos, podemos escrever $z = t \vee w$ com $t \wedge w = 0$ e $t, w > 0$. Basta tomar então $x_1 = x \vee t$ e $y_1 = y \vee w$. □

Demonstração da Proposição 1. Nós construiremos as famílias

$$(A_\alpha)_{\alpha\in\aleph_1}, \quad (B_\alpha)_{\alpha\in\aleph_1}$$

por recursão em α fazendo com que as condições (a), (b) e (c) sejam satisfeitas e fazendo também com que $[A_\alpha] \vee [B_\alpha] < 1$ (i.e., $\omega \setminus (A_\alpha \cup B_\alpha)$ seja infinito) para todo $\alpha \in \aleph_1$. Como base da recursão, podemos tomar simplesmente $A_0 = B_0 = \emptyset$. Dado $\alpha \in \aleph_1$, se os conjuntos A_β e B_β estão definidos para $\beta \leq \alpha$, vamos definir os conjuntos $A_{\alpha+1}$ e $B_{\alpha+1}$. Se $A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$ e $[A_\alpha] \vee [B_\alpha] < 1$ então, como $\wp(\omega)/\mathrm{fin}$ não tem átomos, o Lema 7 nos permite obter $X, Y \in \wp(\omega)$ tais que $[A_\alpha] < [X]$, $[B_\alpha] < [Y]$, $[X] \wedge [Y] = 0$ e $[X] \vee [Y] < 1$. Tomando $A_{\alpha+1} = X \setminus Y$ e $B_{\alpha+1} = Y$ então $[A_{\alpha+1}] = [X]$, $[B_{\alpha+1}] = [Y]$, de modo que $[A_\alpha] < [A_{\alpha+1}]$, $[B_\alpha] < [B_{\alpha+1}]$, $[A_{\alpha+1}] \vee [B_{\alpha+1}] < 1$ e $A_{\alpha+1} \cap B_{\alpha+1} = \emptyset$. Além do mais, se B_α é bom para $\big\{A_\beta : \beta < \alpha\big\}$ então o Lema 2 nos diz que $B_{\alpha+1}$ é bom para $\big\{A_\beta : \beta < \alpha\big\}$ e portanto $B_{\alpha+1}$ também é bom para:

$$\big\{A_\beta : \beta < \alpha + 1\big\} = \big\{A_\beta : \beta < \alpha\big\} \cup \{A_\alpha\}.$$

Finalmente, seja $\alpha \in \aleph_1$ um ordinal limite e suponha que os conjuntos A_β e B_β estejam definidos para $\beta < \alpha$. Vamos definir A_α e B_α. Supondo que:

$$\beta < \gamma \Longrightarrow [A_\beta] < [A_\gamma],\ [B_\beta] < [B_\gamma], \quad \beta, \gamma < \alpha \tag{2}$$

e que $A_\beta \cap B_\beta = \emptyset$ para todo $\beta < \alpha$ então:

$$\big\{[A_\beta] : \beta < \alpha\big\}, \quad \big\{[B_\beta] : \beta < \alpha\big\}$$

são subconjuntos incompatíveis, enumeráveis, dirigidos para cima e sem maior elemento da álgebra de Boole $\wp(\omega)/\mathrm{fin}$. Como $\wp(\omega)/\mathrm{fin}$ possui a propriedade de separação enumerável, o Lema 5 nos dá $B \in \wp(\omega)$ tal que $[A_\beta] \wedge [B] = 0$ e $[B_\beta] < [B]$, para todo $\beta < \alpha$. Pelo Lema 4 existe uma seqüência estritamente crescente $(\alpha_k)_{k\in\omega}$ de ordinais tal que $\alpha = \bigcup_{k\in\omega} \alpha_k$; obviamente podemos supor $\alpha_0 = 0$, de modo que:

$$\alpha = \bigcup_{k\in\omega} \big\{\beta : \alpha_k \leq \beta < \alpha_{k+1}\big\}$$

é uma partição de α. Para cada $k \in \omega$ seja:

$$\mathcal{E}_k = \big\{A_\beta : \alpha_k \leq \beta < \alpha_{k+1}\big\} \subset \wp(\omega).$$

Segue de (2) que a hipótese do Lema 3 a respeito dos conjuntos $\mathcal{E}_k$ é satisfeita: de fato, dados $k \in \omega$, $E \in \mathcal{E}_k$ e um subconjunto finito $\mathcal{F}$ de $\bigcup_{i<k} \mathcal{E}_i$ então $E = A_\beta$ para algum β tal que $\alpha_k \leq \beta < \alpha_{k+1}$ e $\big[\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F\big] = [A_\gamma]$ para algum $\gamma < \alpha_k$. Daí $[A_\gamma] < [A_\beta]$ e $E \setminus \big(\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F\big)$ é infinito. Se B_β é bom para $\big\{A_\gamma : \gamma < \beta\big\}$ para todo $\beta < \alpha$ então $B_{\alpha_{k+1}}$ é bom para $\mathcal{E}_k$ para todo $k \in \omega$ e portanto, pelo Lema 2, temos que B é bom para $\mathcal{E}_k$ para todo $k \in \omega$. O Lema 3 nos dá então um conjunto $C \in \wp(\omega)$ que é quase-incompatível com:

$$\mathcal{E} = \bigcup_{k\in\omega} \mathcal{E}_k = \big\{A_\beta : \beta < \alpha\big\}$$

e tal que $B \cup C$ é bom para $\mathcal{E}$. Como B também é quase-incompatível com $\mathcal{E}$, tomando $B_\alpha = B \cup C$ temos que B_α é quase-incompatível com $\mathcal{E}$ e bom para $\mathcal{E}$. O fato que B_α é quase-incompatível com $\mathcal{E}$ nos diz que $[\omega \setminus B_\alpha] = [B_\alpha]'$ é uma cota superior para $\big\{[A_\beta] : \beta < \alpha\big\}$ e, já que $\wp(\omega)/\mathrm{fin}$ possui a propriedade forte de separação enumerável, a Observação 6 nos dá $A \in \wp(\omega)$ tal que $[A_\beta] < [A] < [B_\alpha]'$ para todo $\beta < \alpha$. Daí $[A] \wedge [B_\alpha] = 0$ e $[A] \vee [B_\alpha] < 1$. Tomando $A_\alpha = A \setminus B_\alpha$ então $[A_\alpha] = [A]$, de modo que $[A_\beta] < [A_\alpha]$ para todo $\beta < \alpha$, $[A_\alpha] \vee [B_\alpha] < 1$ e $A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$. Isso completa a demonstração. $\square$

8. **Proposição.** *Se $(A_\alpha)_{\alpha\in\aleph_1}$, $(B_\alpha)_{\alpha\in\aleph_1}$ são famílias como no enunciado da Proposição 1 então não existe $C \in \wp(\omega)$ tal que $[C]$ é cota superior de $\big\{[A_\alpha] : \alpha \in \aleph_1\big\}$ e $[C]$ é incompatível com $\big\{[B_\alpha] : \alpha \in \aleph_1\big\}$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que exista C como no enunciado. Para todo $\alpha \in \aleph_1$ temos que $A_\alpha \setminus C$ e $B_\alpha \cap C$ são finitos e portanto:

$$\aleph_1 = \bigcup_{k\in\omega} \Gamma_k,$$

onde:

$$\Gamma_k = \big\{\alpha \in \aleph_1 : A_\alpha \setminus C \subset k,\ B_\alpha \cap C \subset k\big\}.$$

Daí existe $k \in \omega$ tal que Γ_k não é enumerável. Sendo Γ_k um conjunto bem-ordenado não enumerável, existe $\alpha \in \Gamma_k$ tal que $\big\{\beta \in \Gamma_k : \beta < \alpha\big\}$ é infinito. Mas se $\alpha, \beta \in \Gamma_k$ então $A_\beta \setminus C \subset k$ e $B_\alpha \cap C \subset k$, donde $A_\beta \cap B_\alpha \subset (A_\beta \setminus C) \cup (B_\alpha \cap C) \subset k$. Isso mostra que:

$$\big\{\beta \in \Gamma_k : \beta < \alpha\big\} \subset \big\{\beta < \alpha : A_\beta \cap B_\alpha \subset k\big\},$$

donde $\big\{\beta < \alpha : A_\beta \cap B_\alpha \subset k\big\}$ é infinito, contradizendo o fato que B_α é bom para $\big\{A_\beta : \beta < \alpha\big\}$. $\square$