Dado um conjunto A, denotamos por $\wp(A)$ a álgebra de Boole dos subconjuntos de A. O espaço de Stone de $\wp(A)$, denotado por $\beta(A)$, é uma compactificação de Stone–Čech de A munido da topologia discreta[1]. O (conjunto subjacente ao) espaço topológico $\beta(A)$ é o conjunto de todos os ultrafiltros de $\wp(A)$. Cada elemento $a \in A$ é identificado com o ultrafiltro principal $\big\{S \in \wp(A) : a \in S\big\} \in \beta(A)$ gerado por $\{a\}$. Os ultrafiltros principais são pontos isolados[2] de $\beta(A)$ e portanto o subconjunto — identificado com A — de $\beta(A)$ formado pelos ultrafiltros principais é um aberto discreto. A diferença $\beta(A) \setminus A$, denotada também por $\beta(A)^*$, é o subconjunto fechado de $\beta(A)$ formado pelos ultrafiltros não principais. Dada uma função (automaticamente contínua) limitada $f : A \to \mathbb{R}$ então a (única[3]) extensão contínua $\bar{f} : \beta(A) \to \mathbb{R}$ de f a $\beta(A)$ é dada por[4]:

$$\bar{f}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} - \lim f, \quad \mathcal{U} \in \beta(A). \tag{1}$$

Recorde que $\mathcal{U} - \lim f$ é o limite do ultrafiltro:

$$f_*\mathcal{U} = \big\{V \in \wp(\mathbb{R}) : f^{-1}(V) \in \mathcal{U}\big\},$$

i.e., é o único $l \in \mathbb{R}$ tal que $f_*\mathcal{U}$ contém o conjunto das vizinhanças de l em $\mathbb{R}$. Como $\beta(A)^*$ é um subconjunto fechado do espaço normal $\beta(A)$, o Teorema de Tietze nos diz que as funções contínuas a valores reais definidas em $\beta(A)^*$ são precisamente as restrições das funções contínuas a valores reais definidas em $\beta(A)$; essas são da forma $\bar{f}$, onde $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função limitada. Denotando por $l_\infty(A)$ o espaço vetorial das funções limitadas $f : A \to \mathbb{R}$ e por $\hat{f}$ a restrição a $\beta(A)^*$ de $\bar{f}$ então $f \mapsto \hat{f}$ é uma sobrejeção linear de $l_\infty(A)$ sobre o espaço $C\big(\beta(A)^*\big)$ das funções contínuas a valores reais definidas em $\beta(A)^*$. O núcleo dessa sobrejeção linear é o espaço $c_0(A)$ formado pelas funções $f : A \to \mathbb{R}$ que tendem a zero no infinito, i.e., funções tais que o

[1] Veja as próximas três notas para uma demonstração.

[2] Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra de Boole então o seu espaço de Stone, $\mathrm{Stone}(\mathcal{B})$, é o conjunto dos ultrafiltros de $\mathcal{B}$ munido da seguinte topologia: os abertos básicos de $\mathrm{Stone}(\mathcal{B})$ são da forma $\big\{\mathcal{U} \in \mathrm{Stone}(\mathcal{B}) : b \in \mathcal{U}\big\}$, onde $b \in \mathcal{B}$. Se $\mathcal{B} = \wp(A)$ e $\beta(A) = \mathrm{Stone}(\mathcal{B})$ então $\big\{\mathcal{U} \in \beta(A) : \{a\} \in \mathcal{U}\big\}$ é portanto um aberto de $\beta(A)$. Mas se $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro de $\wp(A)$ então $\{a\} \in \mathcal{U}$ se e somente se $\mathcal{U}$ é o ultrafiltro principal gerado por $\{a\}$.

[3] Temos também que A é denso em $\beta(A)$. De fato, um aberto básico não vazio de $\beta(A)$ é da forma $\big\{\mathcal{U} \in \beta(A) : B \in \mathcal{U}\big\}$, onde $B \in \wp(A)$ é não vazio. Mas se $a \in B$ então o ultrafiltro principal $\mathcal{U}$ gerado por $\{a\}$ é tal que $B \in \mathcal{U}$.

[4] O limite $\mathcal{U} - \lim f$ do ultrafiltro $f_*\mathcal{U}$ existe (e é único, já que $\mathbb{R}$ é Hausdorff). De fato, como f é limitada, podemos escrever $f = i \circ f_0$, com $f_0 : A \to K$ e $i : K \to \mathbb{R}$ a aplicação inclusão de um compacto $K \subset \mathbb{R}$. Daí $(f_0)_*\mathcal{U}$ é um ultrafiltro no compacto K e portanto possui um limite $l \in K$. O ultrafiltro $f_*\mathcal{U} = i_*(f_0)_*\mathcal{U}$ possui então $i(l) = l$ como limite, já que a inclusão i é contínua. É claro que se $\mathcal{U}$ é o ultrafiltro principal gerado por $\{a\}$ então $\mathcal{U} - \lim f$ é $f(a)$, de modo que $\bar{f}$ estende f. Devemos verificar também que $\bar{f}$ é contínua. Sejam $\mathcal{U} \in \beta(A)$ e $l = \mathcal{U} - \lim f$. Se V é uma vizinhança fechada de l em $\mathbb{R}$ então $\big\{\mathcal{V} \in \beta(A) : f^{-1}(V) \in \mathcal{V}\big\}$ é uma vizinhança de $\mathcal{U}$ em $\beta(A)$ que é mapeada por $\bar{f}$ dentro de V. De fato, se tivéssemos $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} - \lim f \in \mathbb{R} \setminus V$ então $\mathbb{R} \setminus V$ seria uma vizinhança de $\mathcal{V} - \lim f$, de modo que $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus V) \in \mathcal{V}$, contradizendo $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}$.

conjunto[5]:

$$\{a \in A : |f(a)| \geq \varepsilon\} \tag{2}$$

é finito, para todo $\varepsilon > 0$. Assim, demonstramos o seguinte:

1. **Lema.** *Para $f \in l_\infty(A)$, se $\bar{f}$ denota a extensão contínua de f a $\beta(A)$ e $\hat{f}$ a restrição de $\bar{f}$ a $\beta(A)^*$ então a aplicação:*

$$l_\infty(A)/c_0(A) \ni f + c_0(A) \longmapsto \hat{f} \in C\big(\beta(A)^*\big)$$

é um isomorfismo linear. □

2. *Observação.* Se $\mu : \beta(A)^* \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $|\mu| \leq c$, para alguma constante dada $c \geq 0$ então podemos encontrar uma função $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $|f| \leq c$ e tal que $\hat{f} = \mu$. De fato, μ admite uma extensão contínua $\mu' : \beta(A) \to \mathbb{R}$ tal que[6] $|\mu'| \leq c$ e daí tomamos $f = \mu'|_A$.

A álgebra de Boole $\mathrm{Clop}\big(\beta(A)\big)$ de clopens do espaço de Stone $\beta(A)$ da álgebra de Boole $\wp(A)$ é isomorfa a $\wp(A)$; o isomorfismo é dado por[7]:

$$\wp(A) \ni B \longmapsto \beta(A;B) \overset{\text{def}}{=} \{\mathcal{U} \in \beta(A) : B \in \mathcal{U}\} \in \mathrm{Clop}\big(\beta(A)\big).$$

Recorde[8] que se F é um subconjunto fechado de um espaço Booleano (i.e., compacto, Hausdorff e zero-dimensional) X então os clopens de F são precisamente as interseções com F dos clopens de X; assim, os clopens de $\beta(A)^*$ são precisamente as interseções com $\beta(A)^*$ dos clopens de $\beta(A)$, i.e.:

$$\mathrm{Clop}\big(\beta(A)^*\big) = \{\beta(A;B)^* : B \in \wp(A)\},$$

onde:

$$\beta(A;B)^* = \beta(A;B) \setminus A.$$

---

[5] Devemos verificar que $f \in l_\infty(A)$ está em $c_0(A)$ se e somente se $\mathcal{U}-\lim f = 0$, para todo ultrafiltro não principal $\mathcal{U} \in \beta(A)^*$. Note que se $f \in c_0(A)$ então para toda vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}$ temos que o conjunto $f^{-1}(V)$ é cofinito em A e portanto pertence a qualquer ultrafiltro não principal $\mathcal{U} \in \beta(A)^*$, de modo que $\mathcal{U} - \lim f = 0$. Reciprocamente, se $\mathcal{U} - \lim f = 0$ para todo $\mathcal{U} \in \beta(A)^*$ então $f \in c_0(A)$: caso contrário, existiria $\varepsilon > 0$ tal que o conjunto (2) é infinito. A coleção formada por (2) e pelos conjuntos cofinitos em A possui então a propriedade da interseção finita e portanto está contida num ultrafiltro $\mathcal{U} \in \beta(A)$. Daí $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro não principal e $\mathcal{U} - \lim f \neq 0$.

[6] Note que a função $\mathfrak{r} : \mathbb{R} \to [-c, c]$ definida por $\mathfrak{r}(t) = t$ para $t \in [-c, c]$, $\mathfrak{r}(t) = c$ para $t \geq c$ e $\mathfrak{r}(t) = -c$ para $t \leq -c$ é contínua e a composição à esquerda com $\mathfrak{r}$ de uma extensão contínua arbitrária de μ a $\beta(A)$ nos dá uma extensão contínua de μ tomando valores em $[-c, c]$.

[7] Recorde que se $\mathcal{B}$ é uma álgebra de Boole então a aplicação que associa a cada $b \in \mathcal{B}$ o conjunto $\{\mathcal{U} \in \mathrm{Stone}(\mathcal{B}) : b \in \mathcal{U}\}$ é um isomorfismo de $\mathcal{B}$ sobre a álgebra de Boole $\mathrm{Clop}\big(\mathrm{Stone}(\mathcal{B})\big)$.

[8] É claro que a interseção com F de um clopen de X é um clopen de F. Reciprocamente, se G é um clopen de F então G é fechado em X e $G = U \cap F$, com U aberto em X. Cada $x \in G$ admite uma vizinhança clopen V_x contida em U. Como G é compacto, G pode ser coberto por um número finito de tais V_x e a união deles nos dá um clopen V em X tal que $G \subset V \subset U$, de modo que $G = V \cap F$.

Note que $\beta(A;B)\cap A = B$, de modo que:

$$\beta(A;B)^* = \beta(A;B)\setminus B.$$

Note também que a aplicação:

$$\wp(A)\ni B \longmapsto \beta(A;B)^* \in \mathrm{Clop}\big(\beta(A)^*\big)$$

é um homomorfismo sobrejetor de álgebras de Boole cujo núcleo[9] é o ideal $\mathrm{fin}_A\subset\wp(A)$ formado pelos subconjuntos finitos de A. Temos portanto um isomorfismo de álgebras de Boole dado por:

$$\wp(A)/\mathrm{fin}_A \ni B \bmod \mathrm{fin}_A \longmapsto \beta(A;B)^* \in \mathrm{Clop}\big(\beta(A)^*\big). \tag{3}$$

Se B é um subconjunto de A então temos um homomorfismo de álgebras de Boole sobrejetor:

$$r_{A,B} : \wp(A)\ni S \longmapsto S\cap B\in\wp(B)$$

que induz uma aplicação contínua injetora entre os correspondentes espaços de Stone[10]:

$$r^*_{A,B} : \beta(B)\longrightarrow\beta(A)$$

dada por:

$$r^*_{A,B}(\mathcal{V}) = r^{-1}_{A,B}(\mathcal{V}) = \big\{S\in\wp(A) : S\cap B\in\mathcal{V}\big\},$$

para todo $\mathcal{V}\in\beta(B)$. É fácil ver que a imagem de $r^*_{A,B}$ é precisamente o clopen $\beta(A;B)$ formado pelos ultrafiltros $\mathcal{U}\in\beta(A)$ tais que $B\in\mathcal{U}$; de fato, se $\mathcal{V}\in\beta(B)$ então $B\in r^*_{A,B}(\mathcal{V})$ e se $\mathcal{U}\in\beta(A)$ é um ultrafiltro tal que $B\in\mathcal{U}$ então $\mathcal{U}\cap\wp(B)\in\beta(B)$ e[11]:

$$r^*_{A,B}\big(\mathcal{U}\cap\wp(B)\big) = \mathcal{U}. \tag{4}$$

Assim $r^*_{A,B}$ é um homeomorfismo de $\beta(B)$ sobre o clopen $\beta(A;B)$ de $\beta(A)$. Observe que $\mathcal{V}$ é um ultrafiltro principal de $\wp(B)$ se e somente se $r^*_{A,B}(\mathcal{V})$ é um ultrafiltro principal de $\wp(A)$, de modo que $r^*_{A,B}$ restringe-se a um homeomorfismo do espaço $\beta(B)^*$ dos ultrafiltros não principais de $\wp(B)$ sobre o clopen $\beta(A;B)^*$ de $\beta(A)^*$. Denotamos por:

$$\rho_{A,B} : \beta(A;B)^*\longrightarrow\beta(B)^*$$

o homeomorfismo dado pela restrição da inversa de $r^*_{A,B}$. Em vista de (4), temos:

$$\rho_{A,B}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}\cap\wp(B), \tag{5}$$

[9]Se $B\in\wp(A)$ é finito e $\mathcal{U}\in\beta(A)$ é um ultrafiltro com $B\in\mathcal{U}$ então $\mathcal{U}$ é principal; de fato, caso contrário $A\setminus\{b\}\in\mathcal{U}$ para todo $b\in B$ e daí $B\cap\bigcap_{b\in B}\big(A\setminus\{b\}\big)=\emptyset\in\mathcal{U}$. Logo $\beta(A;B)^*=\emptyset$. Se $B\in\wp(A)$ é infinito então a coleção formada por B e pelos conjuntos cofinitos em A possui a propriedade da interseção finita e portanto está contida em um ultrafiltro $\mathcal{U}\in\beta(A)$. Daí $\mathcal{U}$ não é principal e $B\in\mathcal{U}$, de modo que $\mathcal{U}\in\beta(A;B)^*\ne\emptyset$.

[10]Se $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ são álgebras de Boole e $\phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ é um homomorfismo então a aplicação $\phi^*:\mathrm{Stone}(\mathcal{B})\to\mathrm{Stone}(\mathcal{A})$ definida por $\phi^*(\mathcal{U})=\phi^{-1}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U}\in\mathrm{Stone}(\mathcal{B})$ é contínua. Temos que ϕ^* é injetora (e portanto um homeomorfismo sobre sua imagem) se ϕ é sobrejetora.

[11]De fato, se $\mathcal{U}\in\beta(A;B)$ e $S\in\mathcal{U}$ então $S\cap B\in\mathcal{U}\cap\wp(B)$, já que $B\in\mathcal{U}$. Além do mais, se $S\in\wp(A)$ e $S\cap B\in\mathcal{U}\cap\wp(B)$ então $S\in\mathcal{U}$, já que $S\cap B\subset S$.

para todo ultrafiltro não principal $\mathcal{U}$ de $\wp(A)$ tal que $B \in \mathcal{U}$. Segue então do Lema 1 que a aplicação:

$$l_\infty(B)/c_0(B) \ni f + c_0(B) \longmapsto \hat{f} \circ \rho_{A,B} \in C\big(\beta(A;B)^*\big)$$

é um isomorfismo linear.

3. **Lema.** *Se $B \subset C \subset A$, $g : C \to \mathbb{R}$ é uma função limitada e $f = g|_B$ então $\hat{g} \circ \rho_{A,C}$ é uma extensão de $\hat{f} \circ \rho_{A,B}$.*

Demonstração. Se $\mathcal{U} \in \beta(A;B)^*$ (de modo que $\mathcal{U} \in \beta(A;C)^*$ também) então, por (1) e (5), temos:

$$(\hat{g} \circ \rho_{A,C})(\mathcal{U}) = \big(\mathcal{U} \cap \wp(C)\big) - \lim g, \quad (\hat{f} \circ \rho_{A,B})(\mathcal{U}) = \big(\mathcal{U} \cap \wp(B)\big) - \lim f.$$

Se $i : B \to C$ denota a aplicação inclusão então:

$$i_*\big(\mathcal{U} \cap \wp(B)\big) \stackrel{\text{def}}{=} \big\{S \in \wp(C) : i^{-1}(S) \in \mathcal{U} \cap \wp(B)\big\} = \mathcal{U} \cap \wp(C),$$

já que $B \in \mathcal{U}$. Como $f = g \circ i$, temos:

$$f_*\big(\mathcal{U} \cap \wp(B)\big) = g_* i_*\big(\mathcal{U} \cap \wp(B)\big) = g_*\big(\mathcal{U} \cap \wp(C)\big).$$

Então:

$$\big(\mathcal{U} \cap \wp(B)\big) - \lim f = \big(\mathcal{U} \cap \wp(C)\big) - \lim g. \qquad \square$$

4. **Proposição.** *Sejam A um conjunto e U um aberto de $\beta(A)^*$ que é um conjunto F_σ (i.e., uma união enumerável de fechados de $\beta(A)^*$). Então toda função contínua limitada $\lambda : U \to \mathbb{R}$ admite uma extensão contínua $\lambda' : \beta(A)^* \to \mathbb{R}$.*

Demonstração. Podemos escrever $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$, com cada U_n um clopen[12] de $\beta(A)^*$. Trocando U_n por $U_n \setminus \big(\bigcup_{i<n} U_i\big)$ podemos supor que os clopens U_n são dois a dois disjuntos. Já que (3) é um isomorfismo de álgebras de Boole, podemos encontrar subconjuntos B_n de A tais que $U_n = \beta(A;B_n)^*$ e tais que os elementos $B_n \bmod \mathrm{fin}_A$ de $\wp(A)/\mathrm{fin}_A$ são dois a dois disjuntos. Trocando B_n por $B_n \setminus \big(\bigcup_{i<n} B_i\big)$ podemos supor que os conjuntos B_n são dois a dois disjuntos. Seja $\lambda : U \to \mathbb{R}$ uma função contínua limitada e seja $c \geq 0$ tal que $|\lambda| \leq c$. Em vista da Observação 2 (aplicada à função $\mu = (\lambda|_{U_n}) \circ \rho_{A,B_n}^{-1}$) existe uma função $f_n : B_n \to \mathbb{R}$ tal que $|f_n| \leq c$ e tal que:

$$\lambda|_{U_n} = \hat{f}_n \circ \rho_{A,B_n}.$$

Seja $g : A \to \mathbb{R}$ uma função limitada que estende todas as funções f_n. Em vista do Lema 3 (com $B = B_n$, $C = A$), $\hat{g} = \hat{g} \circ \rho_{A,A}$ estende $\hat{f}_n \circ \rho_{A,B_n}$, para todo $n \in \omega$ e portanto $\hat{g}$ estende λ. $\square$

5. **Corolário.** *Sob as hipóteses da Proposição 4, o fecho de U em $\beta(A)^*$ é uma compactificação de Stone–Čech de U.* $\square$

[12] Se $U = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ com cada F_n fechado em $\beta(A)^*$ então podemos, por compacidade, cobrir F_n com um número finito de clopens de $\beta(A)^*$ contidos em U e portanto existe um clopen U_n de $\beta(A)^*$ com $F_n \subset U_n \subset U$.