Se $\overline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra de Boole, $\mathcal{A}$ é uma subálgebra de $\overline{\mathcal{A}}$ e $x \in \overline{\mathcal{A}}$, denotamos por $\mathcal{A}[x]$ a subálgebra de $\overline{\mathcal{A}}$ gerada por $\mathcal{A} \cup \{x\}$. Recorde que:

$$\mathcal{A}[x] = \big\{(a_1 \wedge x) \vee (a_2 \wedge x') : a_1, a_2 \in \mathcal{A}\big\}.$$

Se $\mathcal{B}$ é uma outra álgebra de Boole e $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um homomorfismo então, dado $b \in \mathcal{B}$, existe no máximo um homomorfismo $\tilde{h} : \mathcal{A}[x] \to \mathcal{B}$ que estende h e tal que $\tilde{h}(x) = b$. Temos que uma tal extensão $\tilde{h}$ existe se e somente se vale que:

$$h(a) \le b,$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ tal que $a \le x$ e:

$$b \le h(a),$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ tal que $x \le a$. Temos o seguinte:

1. **Lema** (critério de injetividade da extensão)**.** *Sejam $\overline{\mathcal{A}}$, $\mathcal{B}$ álgebras de Boole, $\mathcal{A}$ uma subálgebra de $\overline{\mathcal{A}}$, $x \in \overline{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$, $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo injetor e $b \in \mathcal{B}$. Temos que h pode ser estendido a um homomorfismo injetor $\tilde{h} : \mathcal{A}[x] \to \mathcal{B}$ tal que $\tilde{h}(x) = b$ se e somente se valem as seguintes condições:*

(i) *$h(a) < b$ para todo $a \in \mathcal{A}$ tal que $a < x$;*
(ii) *$b < h(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$ tal que $x < a$;*
(iii) *se $a \in \mathcal{A}$ não é comparável com x (i.e., não é o caso que $a \le x$ nem que $x \le a$) então $h(a)$ não é comparável com b.*

2. *Observação.* (atualização feita em 11/02/2013) Há uma demonstração muito mais simples do que a que aparece abaixo. Seja $\mathcal{A}'$ a imagem de h e seja $k : \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$ o inverso de h. As hipóteses (i), (ii) e (iii) implicam facilmente (usando o critério de extensibilidade explicado no início) que k estende-se a um homomorfismo $\tilde{k} : \mathcal{A}'[b] \to \overline{\mathcal{A}}$ com $\tilde{k}(b) = x$. Daí $\tilde{k} \circ \tilde{h}$ é a aplicação identidade de $\mathcal{A}[x]$ (pois coincide com a aplicação identidade em $\mathcal{A}$ e em x), donde $\tilde{h}$ é injetor.

Demonstração. Se a extensão $\tilde{h}$ como no enunciado existe então $\tilde{h}$ é um isomorfismo de álgebras de Boole sobre sua imagem e em particular um isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados. Segue então que as condições (i), (ii) e (iii) valem. Reciprocamente, se as condições (i), (ii) e (iii) valem então, já que (i) e (ii) valem, temos que h estende-se (de modo único) a um homomorfismo $\tilde{h} : \mathcal{A}[x] \to \mathcal{B}$ tal que $\tilde{h}(x) = b$. Resta demonstrar que $\tilde{h}$ é injetor. Seja $y \in \mathcal{A}[x]$ com $\tilde{h}(y) = 0$. Devemos mostrar que $y = 0$. Podemos escrever:

$$y = (a_1 \wedge x) \vee (a_2 \wedge x'),$$

com $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$. Temos:

$$\tilde{h}(y) = \big(h(a_1) \wedge b\big) \vee \big(h(a_2) \wedge b'\big) = 0,$$

donde:

$$h(a_1) \wedge b = 0, \quad h(a_2) \wedge b' = 0.$$

De $h(a_1) \wedge b = 0$ vem $b \leq h(a_1')$ e, de (iii), concluímos que x é comparável com a_1'. Mas, por (i), não pode ser $a_1' < x$ e portanto temos $x \leq a_1'$. Daí $a_1 \wedge x = 0$. Vamos agora mostrar que $a_2 \wedge x' = 0$, donde seguirá que $y = 0$. De $h(a_2) \wedge b' = 0$ vem $h(a_2) \leq b$. De (iii), segue que a_2 é comparável com x e de (ii) segue que não pode ser $x < a_2$. Logo $a_2 \leq x$ e daí $a_2 \wedge x' = 0$. $\square$

3. **Lema.** *Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra de Boole que satisfaz a propriedade forte de separação enumerável então para todo $x \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$ o ideal:*

$$\langle x \rangle = \big\{ b \in \mathcal{B} : b \leq x \big\}$$

contém uma anti-cadeia não enumerável.

Demonstração. Como $\mathcal{B}$ possui a propriedade forte de separação enumerável, segue que $\mathcal{B}$ não tem átomos e portanto existe uma seqüência $(x_n)_{n\in\omega}$ tal que $x_0 = x$, $x_{n+1} < x_n$ e $x_n \neq 0$ para todo $n \in \omega$. Daí:

$$\big\{ x_n \wedge x_{n+1}' : n \in \omega \big\} \tag{1}$$

é uma anti-cadeia infinita contida em $\langle x \rangle$. Pelo Lema de Zorn, a coleção de todas as anti-cadeias contidas em $\langle x \rangle$ que contém (1) possui um elemento maximal $\mathcal{C}$. Vamos mostrar que $\mathcal{C}$ é não enumerável. Suponha por absurdo que $\mathcal{C}$ seja (infinita e) enumerável. Escreva $\mathcal{C} = \big\{ c_n : n \in \omega \big\}$, com $c_n \wedge c_m = 0$ para $n, m \in \omega$, $n \neq m$. Defina $d_n = \bigvee_{i=0}^{n} c_i$, $n \in \omega$. Note que $d_n < x$, já que $d_n \leq x$ e $0 < c_{n+1} \leq x \wedge d_n'$. Daí $(x \wedge d_n')_{n\in\omega}$ é uma seqüência decrescente em $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ e, como $\mathcal{B}$ possui a propriedade forte de separação enumerável, temos que essa seqüência possui uma cota inferior não nula c. Daí $\mathcal{C} \cup \{c\}$ é uma anti-cadeia maior do que $\mathcal{C}$ contida em $\langle x \rangle$, contradizendo a maximalidade de $\mathcal{C}$. $\square$

4. **Corolário.** *Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra de Boole que satisfaz a propriedade forte de separação enumerável então, dada uma seqüência*[1] *$(a_n)_{n\in\omega}$ em $\mathcal{B} \setminus \{0\}$, existe uma seqüência $(b_n)_{n\in\omega}$ em $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ de elementos dois a dois disjuntos tal que $b_n \leq a_n$, para todo $n \in \omega$.*

Demonstração. Segue do lema e do Teorema 1 provado no texto "ResultadosBoole.pdf". $\square$

5. *Observação.* Se uma álgebra de Boole $\mathcal{B}$ possui a propriedade de separação enumerável e $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ são subconjuntos enumeráveis de $\mathcal{B}$ tais que todo elemento de $\mathcal{X}$ é disjunto de todo elemento de $\mathcal{Y}$ então existe uma cota superior b para $\mathcal{X}$ que é disjunta de todo elemento de $\mathcal{Y}$. De fato, se definimos:

$$\mathcal{Y}' = \big\{ y' : y \in \mathcal{Y} \big\}$$

então $\mathcal{X} \leq \mathcal{Y}'$ e se b separa $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}')$ então b é uma cota superior de $\mathcal{X}$ disjunta de todo elemento de $\mathcal{Y}$.

[1] O resultado também vale para uma seqüência finita. Note que não estamos supondo que os a_n sejam distintos, então podemos completar qualquer seqüência finita $(a_i)_{i<n}$ até uma seqüência infinita $(a_i)_{i\in\omega}$ fazendo $a_i = 1$ para $i \geq n$.

6. **Lema.** *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole que satisfaz a propriedade forte de separação enumerável. Sejam $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{U}$ subconjuntos enumeráveis de $\mathcal{B}$ tais que:*

(i) *$\mathcal{E}$ é dirigido para cima (i.e., $\mathcal{E}$ é não vazio e dois elementos de $\mathcal{E}$ possuem uma cota superior em $\mathcal{E}$);*
(ii) *$\mathcal{F}$ é dirigido para baixo (i.e., $\mathcal{F}$ é não vazio e dois elementos de $\mathcal{F}$ possuem uma cota inferior em $\mathcal{F}$);*
(iii) *$\mathcal{E} \le \mathcal{F}$;*
(iv) *se $u \in \mathcal{U}$, $e \in \mathcal{E}$ e $f \in \mathcal{F}$ então não é o caso que $u \le e \vee f'$.*

Então existe $b \in \mathcal{B}$ que separa $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ e tal que, para todo $u \in \mathcal{U}$, não é o caso que $u \le b$ nem que $u \le b'$.

Demonstração. Seja:

$$\mathcal{K} = \big\{ e \vee f' : e \in \mathcal{E},\ f \in \mathcal{F} \big\}.$$

Segue de (i) e (ii) que $\mathcal{K}$ é dirigido para cima. Seja dado $u \in \mathcal{U}$. Segue de (iv) que $u \wedge k' \neq 0$ para todo $k \in \mathcal{K}$ e, como $\mathcal{K}' = \big\{ k' : k \in \mathcal{K} \big\}$ é dirigido para baixo, segue que o conjunto $\{u\} \cup \mathcal{K}'$ possui a propriedade da interseção finita. Como $\mathcal{B}$ possui a propriedade forte de separação enumerável, temos que $\{u\} \cup \mathcal{K}'$ admite uma cota inferior não nula c_u. Pelo Corolário 4, podemos encontrar $z_u \le c_u$ não nulo de modo que $z_u \wedge z_v = 0$, para todos $u, v \in \mathcal{U}$ com $u \neq v$. Temos que z_u também é uma cota inferior de $\{u\} \cup \mathcal{K}'$, o que implica que $z_u \le u$ e que z_u é disjunto de todo elemento de $\mathcal{E}$ e de todo elemento de $\mathcal{F}' = \big\{ f' : f \in \mathcal{F} \big\}$. O fato que $\mathcal{B}$ possui a propriedade forte de separação enumerável implica que $\mathcal{B}$ não tem átomos e portanto podemos escrever $z_u = x_u \vee y_u$ com $x_u \wedge y_u = 0$ e x_u, y_u não nulos. Sejam:

$$\mathcal{X} = \mathcal{E} \cup \big\{ x_u : u \in \mathcal{U} \big\}, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{F}' \cup \{ y_u : u \in \mathcal{U} \big\}.$$

Temos que todo elemento de $\mathcal{X}$ é disjunto de todo elemento de $\mathcal{Y}$. De fato, segue de (iii) que todo elemento de $\mathcal{E}$ é disjunto de todo elemento de $\mathcal{F}'$. Além do mais, dado $u \in \mathcal{U}$ então $x_u \le z_u$ e portanto x_u é disjunto de todo elemento de $\mathcal{F}'$; similarmente, como $y_u \le z_u$, temos que y_u é disjunto de todo elemento de $\mathcal{E}$. Finalmente, dados $u, v \in \mathcal{U}$ então $x_u \wedge y_v = 0$ para $u \neq v$ pois $z_u \wedge z_v = 0$ e também $x_u \wedge y_u = 0$. Em vista da Observação 5 existe $b \in \mathcal{B}$ que é uma cota superior de $\mathcal{X}$ e que é disjunto de todo elemento de $\mathcal{Y}$. Daí b separa $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Dado $u \in \mathcal{U}$, vamos mostrar que nem $u \le b$ nem $u \le b'$. De fato, como $0 < y_u \le u$ e y_u é disjunto de b, segue que não temos $u \le b$. Similarmente, como $0 < x_u \le u$ e $x_u \le b$, não temos $u \le b'$. □

7. **Lema.** *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole que satisfaz a propriedade forte de separação enumerável. Sejam $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$ subconjuntos enumeráveis de $\mathcal{B}$ tais que:*

(i) *$\mathcal{E}$ é dirigido para cima;*
(ii) *$\mathcal{F}$ é dirigido para baixo;*
(iii) *$\mathcal{E} < \mathcal{F}$;*
(iv) *se $c \in \mathcal{C}$ e $e \in \mathcal{E}$ então não é o caso que $c \le e$;*

(v) *se* $c \in \mathcal{C}$ *e* $f \in \mathcal{F}$ *então não é o caso que* $f \leq c$.

Então existe $b \in \mathcal{B}$ *que separa estritamente* $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ *e que não é comparável com nenhum elemento de* $\mathcal{C}$.

Demonstração. Seja:

$$\mathcal{U} = \big\{u \in \mathcal{C} \cup \mathcal{C}' \cup \mathcal{E}' \cup \mathcal{F} : \text{para } e \in \mathcal{E},\ f \in \mathcal{F}, \text{ não vale que } u \leq e \vee f'\big\}.$$

As hipóteses do Lema 6 estão satisfeitas e portanto existe $b \in \mathcal{B}$ que separa $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ e tal que não vale $u \leq b$ nem $u \leq b'$, para todo $u \in \mathcal{U}$. Seja $c \in \mathcal{C}$ e vamos mostrar que b não é comparável com c. Se tivermos $c \leq b$ então não podemos ter $c \in \mathcal{U}$. Como $c \in \mathcal{C}$, existem $e \in \mathcal{E}$, $f \in \mathcal{F}$ tais que $c \leq e \vee f'$. Como também $c \leq b$, temos:

$$c \leq (e \vee f') \wedge b = e,$$

já que $e \leq b \leq f$. Mas isso contradiz (iv). Se tivermos $b \leq c$ então $c' \leq b'$, donde não pode ser $c' \in \mathcal{U}$. Como $c' \in \mathcal{C}'$, temos que existem $e \in \mathcal{E}$, $f \in \mathcal{F}$ com $c' \leq e \vee f'$. Como também $c' \leq b'$, temos:

$$c' \leq (e \vee f') \wedge b' = f',$$

já que $e \leq b \leq f$. Daí $f \leq c$, contradizendo (v). Assim, b não é comparável com nenhum elemento de $\mathcal{C}$. Resta verificar que $b \notin \mathcal{E}$ e $b \notin \mathcal{F}$. Suponha que $b \in \mathcal{E}$. Como $b' \leq b'$, temos que $b' \notin \mathcal{U}$ e, como $b' \in \mathcal{E}'$, existem $e \in \mathcal{E}$, $f \in \mathcal{F}$ com $b' \leq e \vee f'$. Daí:

$$b' = b' \wedge (e \vee f') = f',$$

já que $e \leq b \leq f$. Assim $b = f$, donde $b \in \mathcal{E} \cap \mathcal{F}$, contradizendo (iii). Suponha agora que $b \in \mathcal{F}$. Como $b \leq b$, não podemos ter $b \in \mathcal{U}$ e, como $b \in \mathcal{F}$, existem $e \in \mathcal{E}$, $f \in \mathcal{F}$ tais que $b \leq e \vee f'$. Daí:

$$b = b \wedge (e \vee f') = e,$$

já que $e \leq b \leq f$. Assim $b \in \mathcal{E} \cap \mathcal{F}$, contradizendo (iii). $\square$

Adendo acrescentado em 27/03/2018 — versão melhorada dos Lemas 6 e 7.

8. **Lema.** *Seja* $\mathcal{B}$ *uma álgebra de Boole que satisfaz a propriedade forte de separação enumerável. Sejam* $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ *subconjuntos enumeráveis de* $\mathcal{B}$ *tais que:*

(i) $\mathcal{E}$ *é dirigido para cima (i.e.,* $\mathcal{E}$ *é não vazio e dois elementos de* $\mathcal{E}$ *possuem uma cota superior em* $\mathcal{E}$*);*

(ii) $\mathcal{F}$ *é dirigido para baixo (i.e.,* $\mathcal{F}$ *é não vazio e dois elementos de* $\mathcal{F}$ *possuem uma cota inferior em* $\mathcal{F}$*);*

(iii) $\mathcal{E} \leq \mathcal{F}$*;*

(iv) *se* $u \in \mathcal{U}$ *e* $e \in \mathcal{E}$*, então não é o caso que* $u \leq e$*;*

(v) *se* $v \in \mathcal{V}$ *e* $f \in \mathcal{F}$*, então não é o caso que* $f \leq v$.

Então existe $b \in \mathcal{B}$ *que separa* $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ *e tal que, para todo* $u \in \mathcal{U}$*, não é o caso que* $u \leq b$ *e para todo* $v \in \mathcal{V}$*, não é o caso que* $b \leq v$.

Demonstração. Dado $u \in \mathcal{U}$, segue de (i) e (iv) que o conjunto enumerável

$$\big\{u \setminus e : e \in \mathcal{E}\big\} \tag{2}$$

tem a propriedade da interseção finita. Como $\mathcal{B}$ tem a propriedade forte da separação enumerável, existe uma cota inferior não nula x_u para (2). Similarmente, dado $v \in \mathcal{V}$, segue de (ii) e (v) que o conjunto enumerável

$$\big\{f \setminus v : f \in \mathcal{F}\big\}$$

possui a propriedade da interseção finita e portanto possui uma cota inferior não nula y_v. Usando o Corolário 4 obtemos então famílias $(p_u)_{u\in\mathcal{U}}$, $(q_v)_{v\in\mathcal{V}}$ com $0 < p_u \le x_u$, $0 < q_v \le y_v$ e $p_u \wedge q_v = 0$, para todos $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$. É fácil ver agora (usando (iii)) que qualquer elemento de

$$\mathcal{E} \cup \big\{q_v : v \in \mathcal{V}\big\} \tag{3}$$

é menor ou igual a qualquer elemento de:

$$\mathcal{F} \cup \big\{p_u' : u \in \mathcal{U}\big\}. \tag{4}$$

A conclusão é obtida tomando um separador $b \in \mathcal{B}$ de (3) e (4). □

Nova prova do Lema 7. Aplique o Lema 8 com $\mathcal{U} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F}$ e $\mathcal{V} = \mathcal{C} \cup \mathcal{E}$. □