Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra de Boole e $x \in \mathcal{B}$, denotamos por $\langle x \rangle$ o ideal principal gerado por $x$:

$$\langle x \rangle = \big\{ b \in \mathcal{B} : b \leq x \big\}.$$

1. **Teorema.** *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole tal que para todo $x \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$, o ideal $\langle x \rangle$ contém uma anti-cadeia não enumerável. Então, dada uma seqüência*[1] $(a_n)_{n\in\omega}$ *em $\mathcal{B} \setminus \{0\}$, existe uma seqüência $(b_n)_{n\in\omega}$ em $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ de elementos dois a dois disjuntos tal que $b_n \leq a_n$, para todo $n \in \omega$.*

*Demonstração.* Dado um subconjunto $X$ de $\mathcal{B}$ e um elemento $a \in \mathcal{B}$, denote por $X(a)$ o conjunto dos elementos de $X$ que não são disjuntos de $a$:

$$X(a) = \big\{ x \in X : x \wedge a \neq 0 \big\}.$$

Nós vamos mostrar que existe uma anti-cadeia $X \subset \mathcal{B} \setminus \{0\}$ tal que $X(a_n)$ é infinito, para todo $n \in \omega$. Uma vez que $X$ tenha sido obtido, terminamos a demonstração do teorema da seguinte forma: definimos uma seqüência $(x_n)_{n\in\omega}$ em $X$ recursivamente escolhendo, para cada $n \in \omega$, $x_n \in X(a_n)$ tal que $x_n \notin \big\{ x_i : i < n \big\}$. Tomando $b_n = x_n \wedge a_n$ obtemos a seqüência $(b_n)_{n\in\omega}$ desejada.

Passemos à demonstração da existência de $X$: o nosso plano é construir uma seqüência crescente $(X_n)_{n\in\omega}$ de anti-cadeias $X_n \subset \mathcal{B} \setminus \{0\}$ tal que, para todo $n \in \omega$, valem as duas seguintes condições:

(i) para todo $m \in \omega$, ou $X_n(a_m) = \emptyset$ ou $X_n(a_m)$ é não enumerável;
(ii) se $n \geq 1$ então $X_n(a_{n-1})$ é não enumerável.

Tome $X_0 = \emptyset$. Assumindo que uma anti-cadeia $X_n$ satisfazendo (i) e (ii) tenha sido definida, vamos definir uma anti-cadeia $X_{n+1} \supset X_n$ da seguinte forma. Se $X_n(a_n)$ é não enumerável, tomamos simplesmente $X_{n+1} = X_n$. Senão, temos $X_n(a_n) = \emptyset$. Isso significa que $X_n \subset \langle a_n' \rangle$. Como $a_n \neq 0$, o ideal $\langle a_n \rangle$ contém uma anti-cadeia não enumerável $Y$. Note que $X_n \cup Y$ é uma anti-cadeia. Seja $Z \subset Y$ a união de todos os conjuntos da forma $Y(a_m)$, $m \in \omega$, que forem enumeráveis:

$$Z = \bigcup \big\{ Y(a_m) : m \in \omega,\ Y(a_m) \text{ é enumerável} \big\}.$$

Evidentemente $Z$ é enumerável e:

$$Y_0 = Y \setminus Z$$

é não enumerável. Tome $X_{n+1} = X_n \cup Y_0$. Daí $X_{n+1}$ é uma anti-cadeia contendo $X_n$. Temos que $X_{n+1}(a_n) = Y_0$ é não enumerável. Para concluir a construção, falta verificar que, para todo $m \in \omega$, ou $X_{n+1}(a_m) = \emptyset$ ou $X_{n+1}(a_m)$ é não enumerável. Dado $m \in \omega$, se $Y(a_m)$ é não enumerável, então também $Y_0(a_m)$ é não enumerável, já que a diferença entre $Y(a_m)$ e $Y_0(a_m)$ está contida em $Z$, que é enumerável. Nesse caso $X_{n+1}(a_m)$ é não enumerável, já que contém $Y_0(a_m)$. Se $Y(a_m)$ é enumerável então $Y(a_m)$ está

[1] O resultado também vale para uma seqüência finita. Note que não estamos supondo que os $a_n$ sejam distintos, então podemos completar qualquer seqüência finita $(a_i)_{i<n}$ até uma seqüência infinita $(a_i)_{i\in\omega}$ fazendo $a_i = 1$ para $i \geq n$.

contido em $Z$, donde $Y(a_m)$ é disjunto de $Y_0$ e portanto $Y_0(a_m) = \emptyset$. Nesse caso $X_{n+1}(a_m) = X_n(a_m)$ e, por (i), temos que $X_n(a_m) = \emptyset$ ou $X_n(a_m)$ é não enumerável.

Uma vez completada a construção dos $X_n$, tome $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$. Daí $X$ é uma anti-cadeia e, para todo $n \in \omega$, temos $X(a_n) \supset X_{n+1}(a_n)$ e portanto $X(a_n)$ é não enumerável (e em particular infinito). □

Se $\overline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra de Boole, $\mathcal{A}$ é uma subálgebra de $\overline{\mathcal{A}}$ e $x \in \overline{\mathcal{A}}$, denotamos por $\mathcal{A}[x]$ a subálgebra de $\overline{\mathcal{A}}$ gerada por $\mathcal{A} \cup \{x\}$. Recorde que:

$$\mathcal{A}[x] = \big\{(y \wedge x) \vee (z \wedge x') : y, z \in \mathcal{A}\big\}.$$

Se $\mathcal{B}$ é uma outra álgebra de Boole e $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um homomorfismo então, dado $b \in \mathcal{B}$, existe no máximo um homomorfismo $\tilde{h} : \mathcal{A}[x] \to \mathcal{B}$ que estende $h$ e tal que $\tilde{h}(x) = b$. Temos que uma tal extensão $\tilde{h}$ existe se e somente se vale que:

$$h(a) \le b,$$

para todo $a \in \langle x\rangle \cap \mathcal{A}$ e:

$$h(a) \le b',$$

para todo $a \in \langle x'\rangle \cap \mathcal{A}$. Temos o seguinte:

2. **Lema** (critério de injetividade da extensão)**.** *Sejam $\overline{\mathcal{A}}$, $\mathcal{B}$ álgebras de Boole, $\mathcal{A}$ uma subálgebra de $\overline{\mathcal{A}}$, $x \in \overline{\mathcal{A}}$, $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo e $\tilde{h} : \mathcal{A}[x] \to \mathcal{B}$ um homomorfismo que estende $h$. Seja $b = \tilde{h}(x)$. Considere os seguintes ideais de $\mathcal{A}$:*

$$I = \langle x\rangle \cap \mathcal{A}, \quad J = \langle x'\rangle \cap \mathcal{A},$$
$$K = \big\{i \vee j : i \in I,\ j \in J\big\}$$

*e seja $U = \mathcal{A} \setminus K$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *$\tilde{h}$ é injetor;*
(ii) *$h$ é injetor e para todo $u \in U$ temos que $h(u)$ não é menor ou igual a $b$ nem menor ou igual a $b'$.*

*Demonstração.* Assuma que $\tilde{h}$ seja injetor. Então obviamente $h$ é injetor também. Seja $u \in U$. Se tivéssemos $h(u) \le b$ então $\tilde{h}(u) \le \tilde{h}(x)$ e, como $\tilde{h}$ é um isomorfismo sobre sua imagem, segue que $u \le x$. Daí $u \in I \subset K$, contradizendo $u \in U$. Similarmente, não podemos ter $h(u) \le b'$. Agora assuma (ii) e vamos mostrar que $\tilde{h}$ é injetor. Seja $a \in \mathcal{A}[x]$ com $\tilde{h}(a) = 0$. Devemos mostrar que $a = 0$. Podemos escrever:

$$a = (y \wedge x) \vee (z \wedge x'),$$

com $y, z \in \mathcal{A}$. Daí:

$$\tilde{h}(a) = \big(h(y) \wedge b\big) \vee \big(h(z) \wedge b'\big) = 0,$$

donde:

$$h(y) \wedge b = 0, \quad h(z) \wedge b' = 0.$$

De $h(y) \wedge b = 0$ vem $h(y) \leq b'$ e, por (ii), não podemos ter $y \in U$. Assim $y \in K$ e podemos escrever $y = i \vee j$, com $i, j \in \mathcal{A}$, $i \leq x$ e $j \leq x'$. Mas:

$$0 = h(y) \wedge b = \big(h(i) \wedge b\big) \vee \big(h(j) \wedge b\big) = h(i) \wedge b = h(i),$$

já que $h(j) \leq b'$ e $h(i) \leq b$. Como $h$ é injetor, segue que $i = 0$ e portanto $y = j$, donde $y \wedge x = 0$. Um argumento similar partindo de $h(z) \wedge b' = 0$ nos dá $z \wedge x' = 0$, donde $a = 0$. $\square$

Vejamos agora algumas propriedades de $\wp(\omega)/\mathrm{fin}$.

3. **Lema** (propriedade de separação enumerável)**.** *Sejam $(x_n)_{n\in\omega}$, $(y_n)_{n\in\omega}$ seqüências em $\wp(\omega)/\mathrm{fin}$ tais que $x_n \leq y_m$, para todos $n, m \in \omega$. Então existe $z \in \wp(\omega)/\mathrm{fin}$ tal que $x_n \leq z$ e $z \leq y_n$, para todo $n \in \omega$.*

*Demonstração.* Para cada $n \in \omega$, sejam $X_n, Y_n \in \wp(\omega)$ representantes de $x_n$, $y_n$, respectivamente. Para cada $n \in \omega$, seja:

$$\widetilde{X}_n = X_n \cap \Big(\bigcap_{m \leq n} Y_m\Big).$$

Como $x_n \wedge \big(\bigwedge_{m\leq n} y_m\big) = x_n$, temos que $\widetilde{X}_n$ também é um representante de $x_n$. Note que:

$$n \geq m \Longrightarrow \widetilde{X}_n \subset Y_m,$$

para todos $n, m \in \omega$. Sejam:

$$Z = \bigcup_{n\in\omega} \widetilde{X}_n$$

e $z \in \wp(\omega)/\mathrm{fin}$ a classe de $Z \in \wp(\omega)$. Obviamente temos $x_n \leq z$, para todo $n \in \omega$. Seja $m \in \omega$. Para mostrar que $z \leq y_m$, devemos mostrar que o conjunto $Z \setminus Y_m$ é finito. Temos:

$$Z \setminus Y_m = \bigcup_{n\in\omega} (\widetilde{X}_n \setminus Y_m).$$

Como $\widetilde{X}_n \subset Y_m$ para $n \geq m$, temos:

$$Z \setminus Y_m = \bigcup_{n<m} (\widetilde{X}_n \setminus Y_m).$$

Mas, como $x_n \leq y_m$, temos que o conjunto $\widetilde{X}_n \setminus Y_m$ é finito para todo $n$ e portanto $Z \setminus Y_m$ é finito. $\square$

4. **Corolário.** *Sejam $(x_n)_{n\in\omega}$, $(y_n)_{n\in\omega}$ seqüências[2] em $\wp(\omega)/\mathrm{fin}$ tais que:*

$$x_n \wedge y_m = 0,$$

*para todos $n, m \in \omega$. Então existe $z \in \wp(\omega)/\mathrm{fin}$ tal que $x_n \leq z$ e $y_n \leq z'$, para todo $n \in \omega$.*

*Demonstração.* Aplique o lema para as seqüências $(x_n)_{n\in\omega}$ e $(y'_n)_{n\in\omega}$. $\square$

[2] O resultado também vale para seqüências finitas, pois podemos completar qualquer seqüência finita até uma seqüência infinita acrescentando uma infinidade de zeros.

5. **Lema.** *Uma anti-cadeia infinita enumerável em* $\wp(\omega)/\mathrm{fin}$ *não é maximal, i.e., se* $(x_n)_{n\in\omega}$ *é uma seqüência de elementos não nulos dois a dois disjuntos em* $\wp(\omega)/\mathrm{fin}$ *então existe* $y \in \wp(\omega)/\mathrm{fin}$ *não nulo tal que* $x_n \wedge y = 0$*, para todo* $n \in \omega$*.*

*Demonstração.* Para cada $n \in \omega$, seja $X_n \in \wp(\omega)$ um representante de $x_n$. Para cada $n \in \omega$, defina:

$$\widetilde{X}_n = X_n \setminus \Big(\bigcup_{i<n} X_i\Big).$$

Como $x_n \wedge \big(\bigvee_{i<n} x_i\big)' = x_n$, temos que $\widetilde{X}_n$ também é um representante de $x_n$. Além do mais, os conjuntos $\widetilde{X}_n$, $n \in \omega$, são dois a dois disjuntos (e infinitos, já que $x_n \neq 0$). Seja $Y \subset \omega$ um conjunto que contém exatamente um elemeno de cada $\widetilde{X}_n$ e seja $y \in \wp(\omega)/\mathrm{fin}$ a classe de $Y$. Daí $Y$ é infinito, de modo que $y \neq 0$. Além do mais, para todo $n \in \omega$ temos que $Y \cap \widetilde{X}_n$ é unitário, donde $y \wedge x_n = 0$. □

6. **Corolário.** *Seja* $\mathcal{C} \subset \wp(\omega)/\mathrm{fin}$ *uma coleção enumerável com a propriedade da interseção finita, i.e., dados* $n \geq 1$ *e* $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{C}$ *então* $\bigwedge_{i=1}^n x_i \neq 0$*. Então* $\mathcal{C}$ *possui uma cota inferior não nula.*

*Demonstração.* Se $\mathcal{C}$ é vazia o resultado é trivial. Senão, escreva:

$$\mathcal{C} = \big\{x_n : n \in \omega\big\}.$$

(Os $x_n$ podem não ser distintos.) Para cada $n \in \omega$, seja:

$$y_n = \bigwedge_{i\leq n} x_i,$$

de modo que $(y_n)_{n\in\omega}$ é uma seqüência decrescente de elementos não nulos. Como $y_n \leq x_n$ para todo $n \in \omega$, é suficiente mostrar que $\big\{y_n : n \in \omega\big\}$ possui uma cota inferior não nula. Seja:

$$\mathcal{E} = \{y_0'\} \cup \big\{y_n \wedge y_{n+1}' : n \in \omega\big\}.$$

Temos que $\mathcal{E} \setminus \{0\}$ é uma anti-cadeia. Se tivermos $y_n > y_{n+1}$ apenas para um número finito de índices $n \in \omega$ então a seqüência $(y_n)_{n\in\omega}$ é eventualmente constante e portanto $\big\{y_n : n \in \omega\big\}$ possui uma cota inferior não nula. Senão, temos que $\mathcal{E}$ é infinito enumerável e portanto o lema nos diz que existe $z \in \wp(\omega)/\mathrm{fin}$ não nulo tal que $z \wedge e = 0$ para todo $e \in \mathcal{E}$, i.e.:

$$z \wedge y_0' = 0, \quad z \wedge (y_n \wedge y_{n+1}') = 0,\ n \in \omega.$$

Segue (por indução em $n$) que $z \leq y_n$, para todo $n \in \omega$. □

7. **Lema.** *Se* $x \in \wp(\omega)/\mathrm{fin}$ *é não nulo então o ideal* $\langle x\rangle$ *contém uma anti-cadeia de cardinalidade* $2^{\aleph_0}$*.*

*Demonstração.* Seja $X \in \wp(\omega)$ um representante de $x$. Então $X$ é um conjunto infinito enumerável. Logo existe[3] uma família $(X_\alpha)_{\alpha \in 2^{\aleph_0}}$ de subconjuntos infinitos de $X$ tais que $X_\alpha \cap X_\beta$ é finito sempre que $\alpha \neq \beta$. Se $x_\alpha$ denota a classe de $X_\alpha$ então $\{x_\alpha : \alpha \in 2^{\aleph_0}\}$ é uma anti-cadeia de cardinalidade $2^{\aleph_0}$ contida em $\langle x \rangle$. $\square$

8. **Lema.** *A álgebra* $\wp(\omega)/\mathrm{fin}$ *não tem átomos.*

*Demonstração.* Dado $x \in \wp(\omega)/\mathrm{fin}$ não nulo então um representante $X$ de $x$ é um subconjunto infinito de $\omega$ e portanto podemos escrever $X = Y \cup Z$, com $Y \cap Z = \emptyset$ e $Y$, $Z$ infinitos. Se $y$, $z$ denotam, respectivamente, as classes de $Y$ e $Z$ então $x = y \vee z$, $y \wedge z = 0$, $y \neq 0$ e $z \neq 0$. $\square$

9. **Teorema.** *Sejam* $\overline{\mathcal{A}}$ *uma álgebra de Boole,* $\mathcal{A}$ *uma subálgebra enumerável de* $\overline{\mathcal{A}}$, $\mathcal{B} = \wp(\omega)/\mathrm{fin}$ *e* $x \in \overline{\mathcal{A}}$. *Se* $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *é um homomorfismo injetor então* $h$ *estende-se a um homomorfismo injetor de* $\mathcal{A}[x]$ *em* $\mathcal{B}$.

*Demonstração.* Em vista do critério usual para existência de extensões de homomorfismos de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{A}[x]$ e do Lema 2, nós devemos mostrar que existe $b \in \mathcal{B}$ satisfazendo as seguintes condições ($I$, $J$, $K$ e $U$ são definidos como no enunciado do Lema 2):

(a) $b$ é cota superior de $h(I)$ e $b'$ é cota superior de $h(J)$;
(b) para todo $u \in U$, $h(u)$ não é menor ou igual a $b$ nem menor ou igual a $b'$.

Daí $h$ se estenderá de modo único a um homomorfismo $\tilde{h} : \mathcal{A}[x] \to \mathcal{B}$ tal que $\tilde{h}(x) = b$ e essa extensão será ainda injetora.

Passemos então à prova da existência de $b \in \mathcal{B}$ satisfazendo (a) e (b). Para cada $u \in U$, considere o conjunto:

$$\mathcal{C}_u = \{h(u \wedge k') : k \in K\} = \{h(u) \wedge h(k)' : k \in K\}.$$

Como o ideal $K$ é fechado por disjunções finitas, segue que $\mathcal{C}_u$ é fechado por conjunções finitas. Além do mais, para $k \in K$ não podemos ter $u \wedge k' = 0$ (pois $K$ é um ideal, de modo que $u \wedge k' = 0$ implica $u \leq k$ e $u \in K$). Como $h$ é injetor, segue que todos os elementos de $\mathcal{C}_u$ são não nulos. Assim, $\mathcal{C}_u$ (é enumerável e) tem a propriedade da interseção finita e portanto o Corolário 6 nos dá uma cota inferior não nula $c_u \in \mathcal{B}$ para $\mathcal{C}_u$. Em vista do Lema 7, a álgebra $\mathcal{B}$ satisfaz a hipótese do Teorema 1 e portanto, já que $U$ é enumerável, existe uma família $(z_u)_{u \in U}$ de elementos dois a dois disjuntos não nulos de $\mathcal{B}$ tal que $z_u \leq c_u$, para todo $u \in U$. Assim, $z_u$ também é uma cota inferior não nula para $\mathcal{C}_u$; isso significa que:

$$z_u \leq h(u),$$

para todo $u \in U$ e que:

$$z_u \wedge h(k) = 0, \tag{1}$$

[3]Aquele truque de considerar seqüências de racionais que tendem a cada irracional.

para todos $u \in U$, $k \in K$. Como $\mathcal{B}$ não tem átomos (Lema 8), podemos escrever cada $z_u$ como $z_u = x_u \vee y_u$, com $x_u \wedge y_u = 0$ e $x_u, y_u \neq 0$. Considere os seguintes subconjuntos enumeráveis de $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{E} = h(I) \cup \big\{x_u : u \in U\big\}, \quad \mathcal{F} = h(J) \cup \big\{y_u : u \in U\big\}.$$

Afirmamos que todo elemento de $\mathcal{E}$ é disjunto de todo elemento de $\mathcal{F}$. De fato, como todo elemento de $I$ é disjunto de todo elemento de $J$, segue que todo elemento de $h(I)$ é disjunto de todo elemento de $h(J)$. Além do mais, segue de (1) (e de $I, J \subset K$) que todo elemento de $h(I)$ é disjunto de todo $y_u$, $u \in U$, e que todo elemento de $h(J)$ é disjunto de todo $x_u$, $u \in U$. Finalmente, como $z_u \wedge z_v = 0$ para $u, v \in U$ distintos e como $x_u \wedge y_u = 0$ para todo $u \in U$, segue que $x_u \wedge y_v = 0$, para todos $u, v \in U$. Em vista do Corolário 4, existe $b \in \mathcal{B}$ tal que $b$ é uma cota superior de $\mathcal{E}$ e $b'$ é uma cota superior de $\mathcal{F}$. Segue então que $b$ é uma cota superior de $h(I)$ e $b'$ é uma cota superior de $h(J)$, i.e., (a) vale. Mostremos que (b) vale. Seja $u \in U$. Se fosse $h(u) \leq b$ então:

$$y_u \leq z_u \leq h(u) \leq b,$$

e $y_u \leq b'$, pois $y_u \in \mathcal{F}$. Isso contradiz $y_u \neq 0$. Similarmente, não pode ser $h(u) \leq b'$, senão $x_u \leq b'$ e $x_u \leq b$. Isso completa a demonstração. $\square$

10. **Teorema.** *Seja $\mathcal{A} \neq \{0\}$ uma álgebra de Boole cujo cardinal $|\mathcal{A}|$ é menor ou igual a $\aleph_1$ e seja $\mathcal{B} = \wp(\omega)/\mathrm{fin}$. Então existe um homomorfismo injetor $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.*

*Demonstração.* Escreva:

$$\mathcal{A} = \big\{a_\alpha : \alpha < \aleph_1\big\}.$$

(Os $a_\alpha$ podem não ser distintos.) Para cada $\alpha < \aleph_1$, seja $\mathcal{A}_\alpha$ a subálgebra de $\mathcal{A}$ gerada por $\big\{a_\beta : \beta < \alpha\big\}$. Daí $\mathcal{A}_0 = \{0, 1\}$, $\mathcal{A}_{\alpha+1} = \mathcal{A}_\alpha[a_\alpha]$ para todo $\alpha \in \aleph_1$ e $\mathcal{A}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta$, para todo ordinal limite $\alpha \in \aleph_1$. Evidentemente, cada subálgebra $\mathcal{A}_\alpha$ é enumerável e $\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha<\aleph_1} \mathcal{A}_\alpha$. Usando o Teorema 9 construímos facilmente, usando recursão, uma família $(h_\alpha)_{\alpha<\aleph_1}$ de homomorfismos injetores $h_\alpha : \mathcal{A}_\alpha \to \mathcal{B}$, de modo que $h_\beta$ estende $h_\alpha$ sempre que $\alpha \leq \beta$. A união de todos os $h_\alpha$ nos dá um homomorfismo injetor $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. $\square$

11. **Corolário.** *Seja $\mathcal{A} \neq \{0\}$ uma álgebra de Boole cujo cardinal $|\mathcal{A}|$ é menor ou igual a $\aleph_1$. Se $\mathcal{A}$ é completa então $\mathcal{A}$ é um retrato de $\mathcal{B} = \wp(\omega)/\mathrm{fin}$.*

*Demonstração.* Seja $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo injetor. Como $\mathcal{A}$ é completa, o homomorfismo $h^{-1} : h(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ estende-se a um homomorfismo $r : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Temos que $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um inverso à direita para $r$. $\square$