1. **Definição.** Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole e seja κ um cardinal. Uma família $(a_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ em $\mathcal{B}$ é dita *separada à direita* se para todo $\alpha \in \kappa$, a_α não é menor ou igual a uma disjunção finita[1] de elementos de $\big\{a_\beta : \beta < \alpha\big\}$.

Note que se $(a_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ é separada à direita então $\alpha \mapsto a_\alpha$ é uma função injetora e em particular $\kappa \le |\mathcal{B}|$.

2. **Definição.** O *grau hereditário de Lindelöf* de uma álgebra de Boole $\mathcal{B}$ é o supremo do conjunto dos cardinais κ tais que existe uma família separada à direita $(a_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ em $\mathcal{B}$.

3. **Definição.** Seja X um espaço topológico e seja κ um cardinal. Uma família $(x_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ em X é dita *separada à direita* se para todo $\alpha \in \kappa$, x_α não pertence ao fecho do conjunto $\big\{x_\beta : \beta > \alpha,\ \beta \in \kappa\big\}$.

Note que se $(x_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ é separada à direita então $\alpha \mapsto x_\alpha$ é uma função injetora e em particular $\kappa \le |X|$.

4. **Definição.** O *grau hereditário de Lindelöf* de um espaço topológico X é o supremo do conjunto dos cardinais κ tais que existe uma família separada à direita $(x_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ em X.

5. **Lema.** *Seja κ um cardinal. Seja X um espaço topológico compacto e seja $(U_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ uma família na álgebra de clopens de X. Então $(U_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ é separada à direta na álgebra de clopens de X se e somente se para todo $\alpha \in \kappa$ temos que U_α não está contido em $\bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$.*

Demonstração. Como U_α é compacto e cada U_β, $\beta < \alpha$, é aberto, note que $U_\alpha \subset \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$ se e somente se U_α está contido numa união finita de elementos de $\big\{U_\beta : \beta < \alpha\big\}$. $\square$

6. **Proposição.** *Seja κ um cardinal. Seja X um espaço topológico compacto e zero-dimensional. Seja $\mathcal{B}$ a sua álgebra de clopens. Então existe uma família separada à direita $(x_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ em X se e somente se existe uma família separada à direita $(U_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ em $\mathcal{B}$.*

Demonstração. Seja $(x_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ uma família separada à direita em X. Dado $\alpha \in \kappa$, temos que x_α não pertence ao fecho do conjunto $\big\{x_\beta : \beta > \alpha,\ \beta \in \kappa\big\}$; como X é zero-dimensional, x_α pertence a um clopen U_α que é disjunto desse conjunto. Afirmamos que a família $(U_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ é separada à direita em $\mathcal{B}$. De fato, para todos $\alpha, \beta \in \kappa$, temos que:

$$\alpha < \beta \Longrightarrow x_\beta \notin U_\alpha.$$

Logo, dado $\alpha \in \kappa$, temos que x_α não pertence a $\bigcup_{\gamma<\alpha} U_\gamma$, donde U_α não está contido em $\bigcup_{\gamma<\alpha} U_\gamma$.

Reciprocamente, seja $(U_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ uma família separada à direita em $\mathcal{B}$. Em vista do Lema 5, para cada $\alpha \in \kappa$, U_α não está contido em $\bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$ e

[1] É conveniente permitir disjunções vazias (cujo resultado é 0). Isso é o mesmo que exigir $a_0 \neq 0$.

portanto existe $x_\alpha \in U_\alpha$ tal que $x_\alpha \notin \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$. Afirmamos que a família $(x_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ é separada à direita em X. De fato, note que dados quaisquer $\alpha, \beta \in \kappa$, temos:

$$\beta < \alpha \Longrightarrow x_\alpha \notin U_\beta.$$

Daí, para $\alpha \in \kappa$, U_α é uma vizinhança de x_α disjunta de $\{x_\gamma : \gamma > \alpha,\ \gamma \in \kappa\}$. Logo x_α não pertence ao fecho de $\{x_\gamma : \gamma > \alpha,\ \gamma \in \kappa\}$ □

7. **Corolário.** *O grau hereditário de Lindelöf de uma álgebra de Boole é igual ao grau hereditário de Lindelöf do seu espaço de Stone.* □