Curso de Cálculo I

Daniel V. Tausk

Versão de 21 de junho de 2020

Sumário

CAPíTULO 1

Limite e continuidade

1. Definições e propriedades básicas

DEFINIÇÃO 1.1 (função contínua). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Dado $a \in D$, dizemos que f é *contínua no ponto* a se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D$, temos:

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Dizemos que f é *contínua* se for contínua em todo ponto $a \in D$.

Intuitivamente, f é contínua no ponto a se o valor de f em x é próximo do valor de f em a quando x é próximo de a.

DEFINIÇÃO 1.2 (ponto de acumulação). Seja $D \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um *ponto de acumulação* de D se para todo $r > 0$ existe $x \in D$ tal que $x \neq a$ e $|x - a| < r$.

Note que um ponto de acumulação de D pode pertencer ou não a D.

EXEMPLO 1.3. Se D é um intervalo (com mais de um ponto), então os pontos de acumulação de D são os pontos de D e mais as extremidades de D. Assim, digamos, se $D =]0, 3]$, então os pontos de acumulação de D são os pontos do intervalo fechado $[0, 3]$. Se D é o conjunto dos números racionais ou o conjunto dos números irracionais, então todo número real é um ponto de acumulação de D. Se D é o conjunto dos números inteiros, então D não possui pontos de acumulação.

DEFINIÇÃO 1.4 (ponto isolado). Seja $D \subset \mathbb{R}$. Um *ponto isolado* de D é um ponto $a \in D$ que não é ponto de acumulação de D.

Em outras palavras, a é um ponto isolado de D se a é um ponto de D e existe um $r > 0$ que *isola* a em D, isto é, a é o único ponto de D no intervalo $]a - r, a + r[$.

DEFINIÇÃO 1.5 (limite). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o *limite de f no ponto* a e escrevemos $L = \lim_{x\to a} f(x)$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$, temos:

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Intuitivamente, o limite de f no ponto a é (se existir) o valor L do qual $f(x)$ se aproxima à medida em que x tende a a, mas mantendo-se diferente de a. Em outras palavras, $f(x)$ tende a L quando x tende a a, mas sem chegar em a. A parte do "sem chegar" está codificada na definição rigorosa acima na desigualdade $0 < |x-a|$ que aparece no antecedente de (1.2). Essa desigualdade diz simplesmente que x deve ser diferente de a. Em outras palavras, $f(x)$ só precisa ficar próximo de L (a menos de uma margem de erro ε) quando x está próximo de a (a menos de uma margem de erro δ), mas se x for diferente de a. É necessário que a seja um ponto de acumulação de D, já que x só pode "se mover" por dentro de D e se a não é ponto de acumulação de D, então não é possível se aproximar de a sem chegar em a por dentro de D.

O fato que podemos usar o artigo definido "o" na Definição 1.5 (em vez do artigo indefinido "um") depende do teorema a seguir.

Teorema 1.6 (unicidade do limite). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D. Existe no máximo um $L \in \mathbb{R}$ tal que "L é o limite de f no ponto a", isto é, existe no máximo um $L \in \mathbb{R}$ tal que vale a condição: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$, temos:*

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

É por causa do Teorema 1.6 que podemos usar a notação $\lim_{x\to a} f(x)$ para o limite de f no ponto a, quando ele existir; se não fosse pela unicidade, essa notação seria ambígua. Nós vamos omitir a demonstração desse e de vários outros teoremas, mas vale a pena comentar que a hipótese de que a seja ponto de acumulação de D é crucial para o Teorema 1.6. Se a não fosse ponto de acumulação de D, então poderíamos encontrar um $\delta > 0$ que isola a de D, isto é, de modo que não há nenhum $x \in D$ satisfazendo o antecedente da implicação em (1.2). Nesse caso, *qualquer* número real L seria um limite de f em a, já que não haveria possíveis contra-exemplos para a implicação (1.2).

Comparando as definições de limite e continuidade, vê-se facilmente que vale o seguinte.

Teorema 1.7 (relação entre limite e continuidade). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in D$. Se a é um ponto de acumulação de D, então f é contínua no ponto a se, e somente se, o limite* $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe e é igual a $f(a)$.*

Demonstração. Note que colocando $L = f(a)$, as Definições 1.1 e 1.5 ficam idênticas, exceto que no antecedente da implicação (1.2) aparece

$$0 < |x-a| < \delta$$

em vez de $|x-a| < \delta$. Mas para $L = f(a)$ isso não faz diferença, já que se $|x-a| = 0$ então $x = a$ e portanto o consequente $|f(x) - L| < \varepsilon$ vale automaticamente, pois $|f(x) - L| = 0$. □

O que acontece se $a \in D$ não for um ponto de acumulação de D?

TEOREMA 1.8 (continuidade no ponto isolado). *Seja* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função com* $D \subset \mathbb{R}$ *e seja* $a \in D$. *Se* a *é um ponto isolado de* D, *então* f *é contínua no ponto* a.

DEMONSTRAÇÃO. Note que se $\delta > 0$ isola a em D, isto é, se a for o único ponto de $]a - \delta, a + \delta[\cap D$, então esse δ funciona para qualquer $\varepsilon > 0$ dado. De fato, nesse caso o único x que satisfaz o antecedente da implicação (1.1) é $x = a$ e para esse valor de x o consequente $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ vale automaticamente, já que $|f(x) - f(a)| = 0$. $\square$

Os próximos dois teoremas nos dão exemplos bem simples de funções contínuas.

TEOREMA 1.9 (continuidade da função constante). *Para qualquer* $c \in \mathbb{R}$, *a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que é constante e igual a* c, *isto é, a função dada por*

$$f(x) = c,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, *é contínua.*

DEMONSTRAÇÃO. Dado um $\varepsilon > 0$, note que qualquer $\delta > 0$ serve, já que

$$|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon,$$

para quaisquer $x, a \in \mathbb{R}$. $\square$

TEOREMA 1.10 (continuidade da função identidade). *A* função identidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *isto é, a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, *é contínua.*

DEMONSTRAÇÃO. Dado um $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$. Daí

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon,$$

para quaisquer $x, a \in \mathbb{R}$. $\square$

DEFINIÇÃO 1.11 (soma e produto de funções). Se

$$f : D \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g : D \to \mathbb{R}$$

são funções com o mesmo domínio D, definimos a *soma* $f + g$ e o *produto* fg das funções f e g como sendo as funções com domínio D definidas por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (fg)(x) = f(x)g(x),$$

para todo $x \in D$.

TEOREMA 1.12 (limite da soma e do produto). *Sejam*

$$f : D \to \mathbb{R} \quad e \quad g : D \to \mathbb{R}$$

funções com $D \subset \mathbb{R}$ *e seja* $a \in \mathbb{R}$ *um ponto de acumulação de* D. *Se os limites* $\lim_{x\to a} f(x)$ *e* $\lim_{x\to a} g(x)$ *existem, então os limites* $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$ *e* $\lim_{x\to a}(fg)(x)$ *também existem e:*

$$\lim_{x\to a}(f + g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x), \quad \lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x).$$

COROLÁRIO 1.13 (continuidade da soma e do produto). *Sejam*

$$f : D \to \mathbb{R} \quad e \quad g : D \to \mathbb{R}$$

funções com $D \subset \mathbb{R}$ *e seja* $a \in D$*. Se* f *e* g *são contínuas no ponto* a*, então* $f + g$ *e* fg *também são contínuas no ponto* a*.*

DEMONSTRAÇÃO. Se a é ponto isolado de D, o resultado é trivial, por causa do Teorema 1.8. Por outro lado, se a é um ponto de acumulação de D usamos o Teorema 1.12 como segue:

$$\lim_{x \to a}(f + g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a),$$
$$\lim_{x \to a}(fg)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x) = f(a)g(a). \qquad \square$$

DEFINIÇÃO 1.14 (polinômio). Uma *função polinomial* (ou simplesmente *polinômio*) é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, em que os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ são fixados.

COROLÁRIO 1.15. *Toda função polinomial é contínua.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta notar que toda função polinomial pode ser obtida das funções identidade e de funções constantes fazendo somas e produtos. $\square$

DEFINIÇÃO 1.16 (quociente de funções). Se $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$ são funções com o mesmo domínio D e se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in D$, podemos definir o quociente $\frac{f}{g}$ como sendo a função com domínio D definida por

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

para todo $x \in D$.

TEOREMA 1.17 (limite do quociente). *Sejam* $f : D \to \mathbb{R}$ *e* $g : D \to \mathbb{R}$ *funções com* $D \subset \mathbb{R}$*. Suponha que* $g(x) \neq 0$*, para todo* $x \in D$*. Seja* $a \in \mathbb{R}$ *um ponto de acumulação de* D*. Se os limites* $\lim_{x \to a} f(x)$ *e* $\lim_{x \to a} g(x)$ *existem e se* $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$*, então o limite* $\lim_{x \to a} \big(\frac{f}{g}\big)(x)$ *também existe e:*

$$\lim_{x \to a} \Big(\frac{f}{g}\Big)(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}.$$

COROLÁRIO 1.18. *Sejam* $f : D \to \mathbb{R}$ *e* $g : D \to \mathbb{R}$ *funções com* $D \subset \mathbb{R}$*. Suponha que* $g(x) \neq 0$*, para todo* $x \in D$*. Dado* $a \in D$*, se* f *e* g *são contínuas no ponto* a*, então* $\frac{f}{g}$ *é contínua no ponto* a*.*

DEMONSTRAÇÃO. Similar à prova do Corolário 1.13. $\square$

Na prática, a hipótese de que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in D$ não é realmente necessária no Teorema 1.17 e no Corolário 1.18: essa hipótese só está lá porque, sem ela, não podemos definir a função quociente $\frac{f}{g}$ com o mesmo domínio D que as funções f e g tinham. No entanto, não há problema se g se anula em alguns pontos: podemos simplesmente considerar as *restrições* das funções f e g ao conjunto dos pontos $x \in D$ tais que $g(x) \neq 0$ antes de formar o quociente e aplicar o Teorema 1.17 e o Corolário 1.18. Restrições de função são discutidas na próxima seção.

2. Restrição de função

Definição 2.1 (restrição). Sejam A e B conjuntos, $f : A \to B$ uma função e S um subconjunto de A. A *restrição de f a S*, denotada por $f|_S$, é a função com domínio S e contradomínio B que possui nos pontos de S o mesmo valor que a função f possui nesses pontos, isto é

$$(f|_S)(x) = f(x),$$

para todo $x \in S$.

Em outras palavras, restringir uma função $f : A \to B$ para o conjunto S significa diminuir o domínio de f de A para S, isto é, jogar fora do domínio de f os pontos que não estão em S.

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D. Como vimos, o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ é (se existir) o número real do qual $f(x)$ se aproxima quando x tende a a, sem chegar, mantendo-se dentro do domínio D de f, evidentemente. Se S é um subconjunto de D e a for um ponto de acumulação de S, podemos considerar também o limite em a da restrição $f|_S$. Esse seria o número real do qual $f(x)$ se aproxima quando x tente a a, sem chegar, *mas mantendo-se apenas dentro de S*. Em outras palavras, quando tomamos o limite de $f|_S$, os valores que f assume em pontos fora de S são desconsiderados. Temos que se $f(x)$ se aproxima de L quando x tende a a com $x \in D$ então $f(x)$ também se aproxima de L quando x tende a a apenas por dentro de S. É o que diz o próximo resultado.

Teorema 2.2 (limite da restrição). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Sejam S um subconjunto de D e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de S. Nesse caso, a também é ponto de acumulação de D. Além do mais, se f possui limite no ponto a, então $f|_S$ também possui limite no ponto a e o limite de $f|_S$ no ponto a é igual ao limite de f no ponto a.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, o mesmo $\delta > 0$ que existe em virtude do fato que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, nos mostra que $\lim_{x\to a}(f|_S)(x) = L$. □

Corolário 2.3 (continuidade da restrição). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Sejam S um subconjunto de D e $a \in S$. Se f é contínua no ponto a, então $f|_S$ é contínua no ponto a.*

Demonstração. Se a é um ponto isolado de S, o resultado é trivial. Se a é ponto de acumulação de S, temos:

$$\lim_{x\to a}(f|_S)(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a) = (f|_S)(a). \qquad \square$$

Exemplo 2.4 (função de Dirichlet). Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dado $a \in \mathbb{R}$ qualquer, podemos usar o Teorema 2.2 para mostrar que o limite de f em a não existe. Fazemos assim: o limite de $f(x)$ quando x tende a a por valores racionais é igual a 1. Melhor dizendo: a restrição $f|_\mathbb{Q}$ de f a $\mathbb{Q}$ é a função constante e igual a 1 (restrita a $\mathbb{Q}$). Essa função é contínua e portanto:

$$\lim_{x\to a}(f|_\mathbb{Q})(x) = 1.$$

Note que aqui é relevante que a é ponto de acumulação de $\mathbb{Q}$, caso contrário não poderíamos considerar esse limite de $f|_\mathbb{Q}$ em a. Similarmente, o limite de $f(x)$ quando x tende a a por valores irracionais é igual a 0, isto é:

$$\lim_{x\to a}(f|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}})(x) = 0.$$

Se o limite de f em a existisse, isto é, se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ para algum $L \in \mathbb{R}$, então o Teorema 2.2 nos daria que:

$$\lim_{x\to a}(f|_\mathbb{Q})(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a}(f|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}})(x) = L.$$

Daí $L = 0$ e $L = 1$, o que é uma contradição.

Um caso particular importante de limites de restrições de uma função f são os limites laterais, pela esquerda ou pela direita. No limite pela direita em a, tomamos o limite da restrição de f apenas ao subconjunto do domínio formado pelos pontos que são maiores do que a. Similarmente, no limite pela esquerda em a, consideramos a restrição de f apenas ao subconjunto do domínio formado pelos pontos que são menores do que a.

Definição 2.5 (limites laterais). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in \mathbb{R}$. Se a é um ponto de acumulação de $]a, +\infty[\cap D$, então o *limite à direita* de f em a, denotado por $\lim_{x\to a^+} f(x)$, é definido como o limite no ponto a da restrição de f a $]a, +\infty[\cap D$. Similarmente, se a é um ponto de acumulação de $]-\infty, a[\cap D$, então o *limite à esquerda* de f em a , denotado por $\lim_{x\to a^-} f(x)$, é definido como o limite no ponto a da restrição de f a $]-\infty, a[\cap D$.

A recíproca do Teorema 2.2 não vale em geral: se o limite de f em a é L, então o limite de $f|_S$ em a é L, mas se o limite de $f|_S$ em a é L, pode ser que o limite de f em a não exista: se existir deverá ser igual a L, evidentemente, pelo Teorema 2.2. Mas pode não existir. Por exemplo, se f é a função de Dirichlet, então $\lim_{x\to a} f(x)$ não existe, apesar do fato que

$\lim_{x\to a}(f|_{\mathbb{Q}})(x) = 1$. Quando x se aproxima de a por valores racionais, $f(x)$ se aproxima de (na verdade é igual a) 1. Mas quando x se aproxima de a sem restrições, $f(x)$ assume valores 0 e valores 1 e não há um valor limite. Há um caso importante, no entanto, em que a recíproca do Teorema 2.2 vale: é o caso em que S contém todos os pontos de D que são próximos de a, exceto talvez pelo próprio ponto a. Aqui "próximo" quer dizer, "com distância menor do que r", para algum $r > 0$ apropriado. Esse é o conteúdo do próximo teorema.

Teorema 2.6 (o limite de f em a só depende dos valores que $f(x)$ assume para x perto, mas diferente, de a). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D. Seja S um subconjunto de D com a seguinte propriedade: existe $r > 0$ tal que para todo $x \in D$:*

$$0 < |x - a| < r \Longrightarrow x \in S.$$

Nesse caso, a também é um ponto de acumulação de S. Além do mais, f possui limite no ponto a se, e somente se, $f|_S$ possui limite no ponto a. Em virtude do Teorema 2.2, esses dois limites são iguais se existirem.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, se tomamos o $\delta > 0$ que existe em virtude do fato que $\lim_{x\to a}(f|_S)(x)$ existe, então $\delta' = \min\{\delta, r\}$ nos mostra que o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. Basta notar que se $x \in D$ e se $0 < |x - a| < \delta'$ então $0 < |x - a| < r$ e portanto $x \in S$, pela nossa hipótese. □

Exemplo 2.7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x < 2 \text{ e } x \neq 0, \\ 13, & \text{se } x = 0, \\ x^3, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Vamos determinar o limite de f no ponto 0. Como para x perto de 0, mas diferente de 0, temos que $f(x) = x^2 + 1$, concluímos que:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^2 + 1) = 0^2 + 1 = 1,$$

já que o polinômio $g(x) = x^2 + 1$ é uma função contínua. É o Teorema 2.6 que nos permite justificar esse raciocínio informal rigorosamente: para isso, tomamos $S = \left]-\infty, 2\right[\setminus \{0\}$ e $a = 0$. Nesse caso, a hipótese do Teorema 2.6 está satisfeita: todo x próximo de a, mas diferente de a, está em S. Mais especificamente, se $x \neq a$ dista de a menos do que $r = 2$, então x está em S. Como $f|_S = g|_S$, em que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = x^2 + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\lim_{x\to 0}(f|_S)(x) = \lim_{x\to 0}(g|_S)(x) = \lim_{x\to 0}(x^2 + 1) = 1.$$

O Teorema 2.6 nos diz então que $\lim_{x\to 0} f(x)$ também existe e é igual a 1.

Para finalizar, apresentamos um resultado que permite obter o limite de f num ponto a a partir do limite no ponto a de várias restrições de f. Digamos que o domínio D de f seja a união de um número finito de conjuntos

$$D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_n$$

e que todas as restrições $f|_{D_i}$ tenham o mesmo limite L no ponto a. Nesse caso, f terá também limite L no ponto a. Em outras palavras, se consideramos várias maneiras pelas quais x pode tender a a (x tendendo a a por dentro de D_1, x tendendo a a por dentro de D_2, etc) e se $f(x)$ tende a L para qualquer uma delas, então concluímos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, desde que essas várias maneiras de x tender a a esgotem todas as possibilidades (isto é, desde que D seja igual a $D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$).

Teorema 2.8. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D. Sejam D_1, D_2, ..., D_n subconjuntos de D tais que*

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n \tag{2.1}$$

e tais que a seja ponto de acumulação de D_i, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Se para um certo $L \in \mathbb{R}$ os limites em a de $f|_{D_i}$ existem e são iguais a L para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, então o limite de f em a existe e é igual a L.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, se $\delta_i > 0$ existe em virtude do fato que

$$\lim_{x\to a} (f|_{D_i})(x) = L,$$

então $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ nos mostra que $\lim_{x\to a} f(x) = L$. □

Observação 2.9. Usando o Teorema 2.6, vemos que no Teorema 2.8 em vez de supor (2.1) é suficiente supor que existe $r > 0$ tal que, para todo $x \in D$:

$$0 < |x - a| < r \Longrightarrow x \in D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n.$$

Em outras palavras, não é necessário que todo ponto de D esteja coberto por $D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$, mas apenas que os pontos de D próximos de a, mas diferentes de a, estejam cobertos por $D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$.

Exemplo 2.10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ x^2, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Como $\mathbb{R} = D_1 \cup D_2$ com $D_1 = \mathbb{Q}$ e $D_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e como

$$\lim_{x\to 3} (f|_{D_1})(x) = \lim_{x\to 3} (2x + 3) = 9, \quad \lim_{x\to 3} (f|_{D_2})(x) = \lim_{x\to 3} x^2 = 9,$$

o Teorema 2.8 nos diz que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 9$$

também.

O seguinte caso particular do Teorema 2.8 é muito importante.

Teorema 2.11 (relação entre limite e limites laterais). *Seja* $f : D \to \mathbb{R}$ *com* $D \subset \mathbb{R}$ *e seja* $a \in \mathbb{R}$. *Suponha que* a *seja ponto de acumulação de* $D \cap \,]a, +\infty[$ *e de* $D \cap \,]-\infty, a[$. *Temos que o limite* $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe e é igual a* $L \in \mathbb{R}$ *se, e somente se, ambos os limites laterais* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *e* $\lim_{x\to a^-} f(x)$ *existem e são iguais a* L.

Demonstração. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então os limites laterais são também iguais a L, pelo Teorema 2.2. Para obter a recíproca, simplesmente[1] usamos o Teorema 2.8 com $D_1 = D \cap \,]-\infty, a[$ e $D_2 = D \cap \,]a, +\infty[$. □

Exemplo 2.12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & \text{se } x > 2, \\ x^3, & \text{se } x \le 2. \end{cases}$$

Temos:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(x^2 + 4) = 2^2 + 4 = 8 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8,$$

e portanto $\lim_{x\to 2} f(x) = 8$, pelo Teorema 2.11.

3. Mais exemplos de limites

Os limites muito fáceis de calcular são aqueles que podem ser calculados usando diretamente os teoremas sobre limites de soma, produto e quociente de funções (Teoremas 1.12 e 1.17) e mais a continuidade de certas funções "básicas" (Teoremas 1.9 e 1.10) que podem ser combinadas para formar funções mais complicadas. Por exemplo, considere a função

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 2},$$

com domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Vamos calcular $\lim_{x\to 1} f(x)$. Usando os teoremas sobre limite de soma e produto e os teoremas sobre a continuidade das funções identidade e da função constante, obtemos

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 3x) = \lim_{x\to 1} x \lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1}(-3) \lim_{x\to 1} x = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -2,$$
$$\lim_{x\to 1}(x + 2) = \lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 2 = 1 + 2 = 3,$$

e aí usando o teorema sobre o limite do quociente (Teorema 1.17) vem:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{\lim_{x\to 1}(x^2 - 3x)}{\lim_{x\to 1}(x + 2)} = -\frac{2}{3}.$$

Alternativamente, podemos justificar esse resultado de forma mais direta assim: como polinômios são funções contínuas (Corolário 1.15) e como o

[1] A rigor, temos $D_1 \cup D_2 = D \setminus \{a\}$, enquanto o Teorema 2.8 pede que $D_1 \cup D_2 = D$. Mas, veja a Observação 2.9.

quociente de funções contínuas é contínua (Corolário 1.18), então a função f é contínua. Portanto:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = -\frac{2}{3}.$$

Os limites mais interessantes, no entanto, são aqueles que não podem ser calculados diretamente da forma acima. Um caso comum é aquele em que queremos calcular o limite de um quociente

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

mas não podemos aplicar o Teorema 1.17 porque o limite $\lim_{x\to a} g(x)$ é zero. Nos casos interessantes, precisamos encontrar truques espertos para conseguir calcular o limite ou descobrir que ele não existe. Vejamos um exemplo simples.

Exemplo 3.1. Considere a função

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2x - 8}{x^2 - 3x + 2},$$

cujo domínio é o conjunto dos número reais x para os quais o denominador é não nulo. Como

$$\lim_{x\to 2} (x^2 - 3x + 2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0,$$

o Teorema 1.17 não se aplica. Note que também:

$$\lim_{x\to 2} (x^3 - x^2 + 2x - 8) = 2^3 - 2^2 + 2 \cdot 2 - 8 = 0.$$

Assim, $x = 2$ é uma raiz tanto do polinômio que aparece no numerador quanto do polinômio que aparece no denominador. Quando $x = 2$ é raiz de um polinômio, podemos dividir esse polinômio por $x - 2$ obtendo resto nulo. Fazendo essa divisão, obtemos:

$$x^3 - x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x^2 + x + 4) \quad \text{e} \quad x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1).$$

Daí:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+x+4)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+x+4}{x-1}.$$

Esse último limite é um daqueles limites muito fáceis que podem ser calculados diretamente, já que o limite do denominador não é zero. Daí:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{2^2 + 2 + 4}{2 - 1} = 10.$$

EXEMPLO 3.2 (um limite interessante que não existe). Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, para todo $x \neq 0$. Vejamos que o limite $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe. Note que a função seno se anula em qualquer ponto que seja um múltiplo inteiro de π. Daí, f se anula nos recíprocos dos múltiplos inteiros de π. Portanto, f se anula em todo ponto do conjunto:

$$A = \left\{ \frac{1}{k\pi} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

Sabemos também que a função seno vale 1 em qualquer ponto da forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Daí, f vale 1 em qualquer ponto do conjunto:

$$B = \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

Não é difícil ver que zero é um ponto de acumulação tanto de A como de B: qualquer intervalo $]-r, r[$, com $r > 0$, contém uma infinidade de pontos de A e uma infinidade de pontos de B. Podemos então considerar os limites em 0 das restrições de f ao conjunto A e ao conjunto B. Como essas restrições são funções constantes, temos:

$$\lim_{x \to 0} (f|_A)(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} (f|_B)(x) = 1.$$

Segue então do Teorema 2.2 que o limite $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe (como no Exemplo 2.4).

Um pouco mais para a frente (Seção 7) nós faremos uma breve revisão das funções trigonométricas e mostraremos que elas são contínuas. Antes disso, precisamos de mais algumas ferramentas que serão estudadas nas seções seguintes.

EXEMPLO 3.3. Sabemos que se os limites $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existem, então o limite $\lim_{x \to a} \big(f(x) + g(x)\big)$ também existe e é igual à soma dos limites $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$. Pode acontecer, no entanto, que o limite $\lim_{x \to a} \big(f(x) + g(x)\big)$ exista, mas os limites $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ não existam. Um exemplo simples é o seguinte: se pegamos uma função f qualquer tal que o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe e se tomamos $g = -f$, então $f + g = 0$ e daí obviamente $\lim_{x \to a} \big(f(x) + g(x)\big) = 0$. Por outro lado, se o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e o limite $\lim_{x \to a} g(x)$ não existe, então o limite $\lim_{x \to a} \big(f(x) + g(x)\big)$ não existe. De fato, se o limite $\lim_{x \to a} \big(f(x) + g(x)\big)$ existisse, chegaríamos na contradição que $\lim_{x \to a} g(x)$ existe também, já que $g = (f + g) + (-f)$.

4. O Teorema do Sanduíche (ou do confronto)

TEOREMA 4.1 (do sanduíche ou do confronto). *Sejam* $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ *e* $h : D \to \mathbb{R}$ *funções com* $D \subset \mathbb{R}$. *Suponha que*

$$f(x) \le g(x) \le h(x), \tag{4.1}$$

para todo $x \in D$. *Se* $a \in \mathbb{R}$ *é um ponto de acumulação de* D *e os limites* $\lim_{x\to a} f(x)$ *e* $\lim_{x\to a} h(x)$ *existem e são iguais ao mesmo valor* $L \in \mathbb{R}$, *então o limite* $\lim_{x\to a} g(x)$ *também existe e é igual a* L.

Os gráficos das funções f, g e h no Teorema 4.1 formam um sanduíche, sendo f e h os pães e g o recheio. Se tanto $f(x)$ como $h(x)$ tendem a L quando x tende a a, o recheio $g(x)$ que fica entre $f(x)$ e $h(x)$ não tem opção, senão tender a L também. Evidentemente, isso não é uma demonstração, mas uma ilustração: a demonstração de verdade é feita em termos da definição de limite e será omitida.

O resultado a seguir dá uma ferramenta útil para ser usada junto com o Teorema do Sanduíche.

TEOREMA 4.2. *Seja* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função com* $D \subset \mathbb{R}$ *e seja* $a \in \mathbb{R}$ *um ponto de acumulação de* D. *Temos que* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *se, e somente se,* $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. De acordo com a definição, $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ é a mesma coisa que dizer que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$:

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon.$$

Novamente, de acordo com a definição, $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$ é a mesma coisa que dizer que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$:

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow \big||f(x)| - 0\big| < \varepsilon.$$

Obviamente essas duas coisas são equivalentes, já que:

$$\big||f(x)| - 0\big| = |f(x) - 0|. \qquad \square$$

O teorema anterior simplesmente expressa a ideia de que um número está próximo de zero se, e somente se, o seu valor absoluto estiver próximo de zero. Note que isso não vale se trocarmos "zero" por outra coisa: por exemplo, um número cujo valor absoluto é próximo de 1 não precisa estar próximo de 1 (pode estar próximo de -1 em vez).

COROLÁRIO 4.3 (continuidade da função módulo). *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = |x|$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *é contínua.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $a > 0$, então:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a = f(a),$$

já que $f(x) = x$ para x próximo de a (o Teorema 2.6 justifica esse passo rigorosamente). Similarmente, se $a < 0$, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (-x) = -a = f(a),$$

já que $f(x) = -x$ para x próximo de a. Finalmente:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0),$$

pelo Teorema 4.2, já que $\lim_{x \to 0} x = 0$. □

Exemplo 4.4. O limite

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

não pode ser calculado diretamente usando o Teorema 1.12 que diz que o limite do produto é o produto dos limites, pois isso só é verdade quando os limites de ambos os fatores individualmente existem. Ocorre que o limite $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ não existe, como vimos no Exemplo 3.2. Sabemos, no entanto, que o seno de um número real está sempre no intervalo $[-1, 1]$ e daí segue que:

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \le |x|.$$

Assim:

$$-|x| \le x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \le |x|,$$

para todo $x \neq 0$. Como $\lim_{x \to 0} |x| = 0$ e $\lim_{x \to 0} \big(-|x|\big) = 0$, o Teorema do Sanduíche nos diz que $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

O Exemplo 4.4 ilustra uma situação comum em que se aplica o Teorema do Sanduíche: queremos calcular o limite de um produto, sendo que o limite de um dos fatores é nulo e o outro fator não fica muito grande. Vamos enunciar esse caso particular do Teorema do Sanduíche separadamente. Precisamos de uma definição.

Definição 4.5 (função limitada). Dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é *limitada superiormente* se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \le M$, para todo $x \in D$. Dizemos que f é *limitada inferiormente* se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \ge M$, para todo $x \in D$. Finalmente, dizemos que f é *limitada* se for ao mesmo tempo limitada superiormente e inferiormente.

É fácil ver que f é limitada se, e somente se, existe $M \ge 0$ tal que $|f(x)| \le M$, para todo $x \in D$. De fato, se $|f(x)| \le M$ para todo $x \in D$, então $-M \le f(x) \le M$ para todo $x \in D$ e portanto f é limitada inferiormente e superiormente. Reciprocamente, se f for limitada inferiormente e superiormente, então existem $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ com $M_1 \le f(x) \le M_2$ para todo $x \in D$. Podemos aí escolher $M \ge 0$ com $-M \le M_1 \le M_2 \le M$ e daí teremos $-M \le f(x) \le M$ para todo $x \in D$. Logo $|f(x)| \le M$, para todo $x \in D$.

COROLÁRIO 4.6 (do Teorema do Sanduíche). *Sejam*

$$f : D \to \mathbb{R} \quad e \quad g : D \to \mathbb{R}$$

funções com $D \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D. Se f é limitada e se $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to a}(fg)(x) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in D$. Temos então

$$|f(x)g(x)| \leq M|g(x)|$$

e portanto

$$-M|g(x)| \leq f(x)g(x) \leq M|g(x)|,$$

para todo $x \in D$. Como $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, o Teorema 4.2 nos dá:

$$\lim_{x\to a} M|g(x)| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} \big(-M|g(x)|\big) = 0.$$

A conclusão segue do Teorema do Sanduíche. □

OBSERVAÇÃO 4.7. Como o limite de uma função num ponto a só depende dos valores que a função assume perto do ponto a (Teorema 2.6), vemos que no Corolário 4.6 na verdade só é necessário supor que f seja limitada perto do ponto a. Mais precisamente, basta supor que exista $r > 0$ tal que a restrição de f a $D \cap \,]a - r, a + r[$ seja limitada. Similarmente, no Teorema do Sanduíche, basta assumir que a desigualdade (4.1) seja válida para $x \in D$ próximo de a, mas diferente de a. Mais precisamente, basta assumir que exista $r > 0$ tal que a desigualdade (4.1) seja satisfeita para todo $x \in D$ com $0 < |x - a| < r$.

EXEMPLO 4.8. A conclusão do Corolário 4.6 não vale em geral se a função f não for limitada. Por exemplo, se $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x$, para todo $x \neq 0$, então $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, mas:

$$\lim_{x\to 0}(fg)(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Note que f não é limitada em nenhum intervalo da forma $]-r, r[$.

5. Raízes n-ésimas e funções inversas

DEFINIÇÃO 5.1 (raiz n-ésima). Se x é um número real e n é um inteiro positivo ímpar, então o único número real y tal que $y^n = x$ é chamado a *raiz n-ésima* de x e é denotado por $\sqrt[n]{x}$. Se x é um número real maior ou igual a zero e se n é um inteiro positivo par, então o único número real maior ou igual a zero y tal $y^n = x$ é chamado a *raiz n-ésima* de x e é denotado por $\sqrt[n]{x}$.

Note que, se n é par e $x > 0$, então a equação $y^n = x$ possui duas soluções $y \in \mathbb{R}$ e a raiz n-ésima $\sqrt[n]{x}$ é, por definição, a única solução positiva dessa equação. A outra solução é $y = -\sqrt[n]{x}$.

Talvez você nunca tenha refletido sobre isso, mas como sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo inteiro positivo ímpar n existe um único $y \in \mathbb{R}$ tal que $y^n = x$? E como sabemos que para todo $x \geq 0$ e todo inteiro positivo par n existe um único $y \geq 0$ tal que $y^n = x$? Num curso rigoroso de Análise Matemática isso seria demonstrado a partir de uma lista de axiomas a respeito dos números reais. Esses axiomas são enunciados a respeito de propriedades elementares das operações de soma, produto (tais como associatividade, comutatividade, etc) e da relação de ordem (tais como a propriedade $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$). Além desses, há um axioma adicional — *o axioma da completude* — que é o axioma que expressa o fato que os números reais formam uma linha contínua, diferentemente dos números racionais, que possuem "buracos". O enunciado preciso desse axioma da completude é um pouco complicado e está fora do escopo do curso. Esse axioma é usado na demonstração da existência de uma solução y da equação $y^n = x$. A existência de solução para essa equação será obtida também mais adiante (veja Exemplo 10.7) como consequência do chamado Teorema do Valor Intermediário (Teorema 10.5). Porém, a demonstração do Teorema do Valor Intermediário também usa o axioma da completude e será omitida. A unicidade da solução é demonstrada mais facilmente usando apenas os axiomas que falam sobre as propriedades elementares das operações e da relação de ordem. Usando esses axiomas mostra-se que

$$y_1 < y_2 \Longrightarrow y_1^n < y_2^n, \quad \text{para quaisquer } y_1, y_2 \in \mathbb{R} \text{ se } n \geq 1 \text{ for ímpar} \tag{5.1}$$

e

$$y_1 < y_2 \Longrightarrow y_1^n < y_2^n, \quad \text{para quaisquer } y_1, y_2 \geq 0 \text{ se } n \geq 2 \text{ for par.} \tag{5.2}$$

De (5.1) segue que a equação $y^n = x$ não pode ter duas soluções distintas $y \in \mathbb{R}$ se n for ímpar e de (5.2) segue que a equação $y^n = x$ não pode ter duas soluções distintas $y \geq 0$ se n for par.

Teorema 5.2 (continuidade da raiz n-ésima). *Se n é um inteiro positivo ímpar, então a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \sqrt[n]{x},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, é contínua. Se n é um inteiro positivo par, então a função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sqrt[n]{x},$$

para todo $x \geq 0$ é contínua.

O Teorema 5.2 pode ser demonstrado produzindo um $\delta > 0$ apropriado para cada $\varepsilon > 0$ dado, mas nós vamos omitir essa demonstração, como fizemos com as demonstrações dos teoremas sobre os limites de soma, produto e quociente. O Teorema 5.2 também é consequência de um teorema sobre continuidade de funções inversas, que estudaremos agora.

DEFINIÇÃO 5.3 (função injetora). Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Dizemos que f é *injetora* se f leva elementos distintos de A em elementos distintos de B, isto é, se para quaisquer $a_1, a_2 \in A$, vale que:

$$a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$

Dito de outro modo, f é injetora se para quaisquer $a_1, a_2 \in A$ vale que:

$$f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2.$$

DEFINIÇÃO 5.4 (conjunto imagem e função sobrejetora). Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. O *conjunto imagem* de f, denotado por $\mathrm{Im}(f)$, é o conjunto dos elementos do contradomínio B que são da forma $f(a)$, para algum a em A. A função f é dita *sobrejetora* se a sua imagem coincide com o seu contradomínio B, isto é, se para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Note que uma função $f : A \to B$ é injetora se, e somente se, para todo b pertencente à imagem de f existe um único $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

DEFINIÇÃO 5.5 (função bijetora, função inversa). Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Dizemos que $f : A \to B$ é *bijetora* se f for injetora e sobrejetora. Equivalentemente, f é bijetora se para todo $b \in B$ existe um único $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Se f for bijetora, podemos definir a *função inversa* de f como sendo a função $f^{-1} : B \to A$ dada assim: para cada $b \in B$, $f^{-1}(b)$ é o único elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

OBSERVAÇÃO 5.6. Normalmente ninguém dá muita bola para o contradomínio das funções, tanto que nem há uma notação padrão para a "restrição do contradomínio" (diferentemente da restrição de domínio, estudada na Seção 2). No entanto, sobrejetividade é uma propriedade que depende completamente da escolha do contradomínio: por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, não é sobrejetora, pois sua imagem é $[0, +\infty[$ e o seu contradomínio é $\mathbb{R}$. Porém, se restringimos o contradomínio de f trocando $\mathbb{R}$ por $[0, +\infty[$ obtemos uma função sobrejetora. Normalmente, usa-se a mesma notação para uma função f e para variantes de f que diferem apenas pelo contradomínio: o contradomínio de f pode ser alterado livremente para qualquer conjunto que contenha a imagem de f e continuamos tratando a função com o contradomínio alterado como se fosse[2] a mesma função. Assim, se $f : A \to B$ é uma função injetora, mas não necessariamente sobrejetora, denotamos por $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to A$ a função inversa da função bijetora $f : A \to \mathrm{Im}(f)$.

[2]Mas, afinal de contas, quando mudamos o contradomínio de uma função obtemos uma função diferente ou não? Isso depende da convenção utilizada para a definição de função: a definição usual de função em livros de teoria de conjuntos é que uma função é um conjunto de pares ordenados satisfazendo certas condições. De acordo com essa definição, funções possuem domínio e imagem, mas não contradomínio. Mas pode-se alterar essa definição de modo a incluir o contradomínio como parte da função.

EXEMPLO 5.7. Seja n um inteiro positivo e considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^n,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Se n é ímpar, então a função f é bijetora e a sua função inversa f^{-1} é justamente a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(y) = \sqrt[n]{y},$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Se n é par, então a função f não é injetora, já que $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. No entanto, a restrição de f ao intervalo $[0, +\infty[$ é injetora e sua imagem é o intervalo $[0, +\infty[$. Assim, se restringimos tanto o domínio quanto o contradomínio de f para $[0, +\infty[$, obtemos uma função bijetora $f|_{[0,+\infty[} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ cuja função inversa é a função $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ dada por

$$g(y) = \sqrt[n]{y},$$

para todo $y \geq 0$.

TEOREMA 5.8 (continuidade da função inversa). *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e injetora cujo domínio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Temos que a função inversa $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{R}$ é também contínua.*

O Teorema 5.8 é um tanto difícil de demonstrar. É de longe o teorema mais difícil de demonstrar dentre todos que enunciamos até agora[3]. Apesar de ser difícil de demonstrar, é um resultado bastante plausível: para uma função cujo domínio é um intervalo, continuidade significa intuitivamente que o gráfico da função pode ser desenhado sem tirar o lápis do papel. O gráfico de f^{-1} é simplesmente a reflecção do gráfico de f na diagonal $y = x$, isto é, trocamos cada ponto (x, y) do gráfico pelo ponto (y, x). Assim, se o gráfico de f pode ser desenhado sem tirar o lápis do papel, o gráfico de f^{-1} também pode.

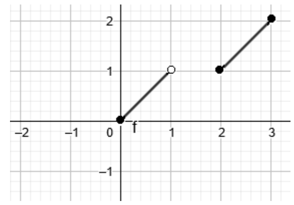
Notamos que a continuidade da função raiz n-ésima (Teorema 5.2) é uma consequência do Teorema 5.8, em vista do que vimos no Exemplo 5.7 acima.

EXEMPLO 5.9 (o Teorema 5.8 não vale se I não for um intervalo). Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ com domínio $D = [0, 1[\cup [2, 3]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ x - 1, & \text{se } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

O gráfico de f está ilustrado na figura a seguir.

[3] O roteiro da demonstração é o seguinte: primeiro usamos o Teorema do Valor Intermediário (Teorema 10.5) para mostrar que f tem que ser monótona (Definição 8.21). Daí segue que f^{-1} também é monótona (Teorema 8.23) e do Teorema 8.24 segue a continuidade de f^{-1}.



Temos que a função f é contínua, apesar do fato que seu gráfico aparenta ter um pulo. Mas não é o gráfico que pula, é o domínio. Para ver que f é mesmo contínua, note que para todo $a \in [0, 1[$ temos (usando o Teorema 2.6):

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a = f(a)$$

e que para todo $a \in [2, 3]$ temos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(x - 1) = a - 1 = f(a).$$

A função f é injetora e a sua imagem é o intervalo $[0, 2]$. A função inversa $f^{-1} : [0, 2] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y < 1, \\ y + 1, & \text{se } 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

Temos que os limites laterais

$$\lim_{y\to 1^-} f^{-1}(y) = \lim_{y\to 1} y = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 1^+} f^{-1}(y) = \lim_{y\to 1}(y + 1) = 2$$

são diferentes, donde o limite $\lim_{y\to 1} f^{-1}(y)$ não existe e a função f^{-1} é descontínua no ponto 1.

6. Composição de funções e o método de substituição de variáveis

Suponha que nós queiramos calcular o limite:

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2 + 16}.$$

Parece razoável raciocinar assim: sabemos que $\lim_{x\to 3}(x^2+16) = 25$. Assim, quando x tende a 3, temos que $y = x^2+16$ tende a 25. Como a raiz quadrada é uma função contínua (Teorema 5.2), sabemos que quando y tende a 25, $\sqrt{y}$ tende a $\sqrt{25} = 5$. Logo:

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2 + 16} = 5.$$

Esse cálculo está de fato correto, mas nenhum dos teoremas que vimos até agora pode ser usado para justificá-lo. As únicas ferramentas que temos até agora para combinar funções mais simples e obter funções mais complicadas são soma, produto e quociente. Para obter a função $h(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ a partir das funções $f(x) = x^2 + 16$ e $g(x) = \sqrt{x}$, precisamos de uma nova ferramenta: a composição de funções.

Definição 6.1 (composição de funções). Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. A *função composta* $g \circ f : A \to C$ é definida por:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big),$$

para todo $x \in A$.

Na definição de $g \circ f$ acima estamos pedindo que o contradomínio da função f seja exatamente igual ao domínio da função g. Mas, dentro do espírito de ignorar a diferença entre funções que diferem apenas pelo contradomínio (veja Observação 5.6), nós consideraremos as composições $g \circ f$ como bem-definidas sempre que a imagem de f estiver contida no domínio de g; essa é a condição necessária para que a expressão $g\big(f(x)\big)$ esteja bem-definida para todo x no domínio de f. Quando a imagem de f não está contida no domínio de g, nós não podemos definir a composição $g \circ f$, mas podemos considerar o conjunto

$$S = \big\{x \in A : f(x) \in B\big\}$$

formado pelos pontos x no domínio de f tais que $f(x)$ está no domínio de g e fazer a composição $g \circ f|_S$ de g com a restrição $f|_S$, já que a imagem de $f|_S$ está contida no domínio de g.

Exemplo 6.2. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ são as funções definidas por $f(x) = x^2 + 16$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = \sqrt{x}$, para todo $x \geq 0$, então a função composta $h = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função dada por

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 16},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

O nosso próximo resultado é um teorema que permite calcular limites de funções compostas, isto é, limites da forma

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to a} g\big(f(x)\big)$$

a partir de limites das funções f e g. Se sabemos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, isto é, se $y = f(x)$ tende a L quando x tende a a, parece razoável concluir que

$$\lim_{x \to a} g\big(f(x)\big) = \lim_{y \to L} g(y). \tag{6.1}$$

Isso está quase correto, mas há um detalhe técnico a ser considerado: em $\lim_{y \to L} g(y)$, y deve tender a L mas *mantendo-se diferente de* L. No entanto, quando $\lim_{x \to a} f(x) = L$, pode bem acontecer que $f(x)$ chegue no valor L antes que x chegue no valor a. É por cause desse detalhe — que raramente gera problemas em situações práticas — que o enunciado do teorema a seguir acaba ficando um pouco extenso.

TEOREMA 6.3 (limite da função composta). *Sejam*

$$f : D \to \mathbb{R} \quad e \quad g : E \to \mathbb{R}$$

funções com $D \subset \mathbb{R}$ e $E \subset \mathbb{R}$. Suponha que a imagem de f esteja contida no domínio E de g. Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D e suponha que $\lim_{x\to a} f(x)$ exista e seja igual a um certo $L \in \mathbb{R}$.

(a) *Se $f(x) \neq L$ para todo $x \in D$ com $x \neq a$, então L é um ponto de acumulação de E. Além do mais, se $\lim_{y\to L} g(y)$ existe, então $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x)$ também existe e é igual a $\lim_{y\to L} g(y)$.*

(b) *Se $L \in E$ e g é contínua no ponto L, então o limite $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)$ existe e é igual a $g(L)$.*

O Teorema 6.3 descreve duas situações em que podemos concluir que a igualdade (6.1) vale a partir do fato que $\lim_{x\to a} f(x) = L$. No item (a), assume-se que quando x tende a a sem chegar, $y = f(x)$ tende a L sem chegar, isto é, que $f(x) \neq L$ quando $x \neq a$. No item (b), permite-se que $y = f(x)$ atinja o valor L enquanto x tende a a sem chegar, mas requer-se que g seja contínua no ponto L. Isso faz com que $g(y)$ tenda a $g(L)$ quando y tende a L, mesmo permitindo que y atinja o valor L. Situações em que a igualdade (6.1) falha podem ocorrer, mas são um tanto exóticas, como ilustramos no exemplo a seguir.

EXEMPLO 6.4. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

para todo $x \neq 0$ e a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(y) = \begin{cases} y, & \text{se } y \neq 0, \\ 3, & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Como vimos no Exemplo 4.4, temos:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0,$$

isto é, quando x tende a zero, $y = f(x)$ também tende a zero. Dado que

$$\lim_{y\to 0} g(y) = \lim_{y\to 0} y = 0,$$

alguém poderia esperar que o limite $\lim_{x\to 0} g\big(f(x)\big)$ fosse igual a zero. Porém, esse limite não existe. De fato, quando x tende a zero através de valores para os quais $f(x) \neq 0$, temos $g\big(f(x)\big) = f(x)$ e aí $g\big(f(x)\big)$ tende a zero. No entanto, quando x tende a zero através de valores da forma $\frac{1}{k\pi}$, com $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, temos $f(x) = 0$ e $g\big(f(x)\big) = 3$. Mais precisamente, definindo os conjuntos A e B como no Exemplo 3.2, temos que 0 é ponto de acumulação de A e de B e

$$\lim_{x\to 0} \big((g \circ f)|_A\big)(x) = \lim_{x\to 0} 3 = 3, \quad \lim_{x\to 0} \big((g \circ f)|_B\big)(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0,$$

donde $\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)$ não existe. Note que nesse caso o Teorema 6.3 não pode ser aplicado para concluir que $\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x) = 0$. De fato, as hipóteses do item (a) não são satisfeitas porque $f(x) = 0$ para x da forma $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, e as hipóteses do item (b) não são satisfeitas porque g não é contínua no ponto 0.

EXEMPLO 6.5. Usando o Teorema 6.3 podemos mostrar que:

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2+16} = 5. \tag{6.2}$$

Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é a função dada por $f(x) = x^2+16$, para todo $x\in\mathbb{R}$, e $g:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ é a função dada por $g(y)=\sqrt{y}$, para todo $y\ge 0$, então:

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2+16} = \lim_{x\to 3} g\big(f(x)\big).$$

Como $\lim_{x\to 3} f(x) = 25$ e a função g é contínua, concluímos que:

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2+16} = g(25) = 5.$$

Na prática, o Teorema 6.3 pode ser interpretado como sendo a justificativa subjacente ao seguinte *método de substituição de variáveis*: queremos calcular o limite (6.2) e fazemos a substituição de variáveis $y = x^2+16$. Como $\lim_{x\to 3}(x^2+16) = 25$, quando x tende a 3 temos que y tende a 25 e portanto:

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2+16} = \lim_{y\to 25}\sqrt{y} = 5.$$

OBSERVAÇÃO 6.6. Como o limite $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)$ só depende dos valores que $g\circ f$ assume nos pontos $x\neq a$ que estão próximos de a (Teorema 2.6), temos que no item (a) do Teorema 6.3 é suficiente assumir que $f(x)\neq L$ para $x\neq a$ próximo de a. Mais precisamente, é suficiente assumir que exista $r>0$ tal que $f(x)\neq L$ para todo $x\in D$ com $0<|x-a|<r$.

EXEMPLO 6.7. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e se o limite $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)$ existe, não é necessariamente verdade que o limite $\lim_{y\to L} g(y)$ existe. Em outras palavras, sabendo-se que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e que $f(x)\neq L$ para $x\neq a$, podemos inferir que $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = \lim_{y\to L} g(y)$ quando sabemos que o limite $\lim_{y\to L} g(y)$ existe, mas não podemos inferir que o limite $\lim_{y\to L} g(y)$ existe sabendo que o limite $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)$ existe. Por exemplo, considere as funções $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{e} \quad g(y) = \frac{y}{|y|},$$

para todo $x\neq 0$ e todo $y\neq 0$. Temos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e

$$\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

mas o limite $\lim_{y\to 0} g(y)$ não existe, já que:

$$\lim_{y\to 0^+} g(y) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 0^-} g(y) = -1.$$

Observação 6.8. Suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e que L não pertence ao domínio de g, de modo que nem faz sentido perguntar se g é contínua no ponto L. Nesse caso, se não é verdade que $f(x) \neq L$ para todo x no domínio de f, então a imagem de f não está contida no domínio de g e nem faz sentido considerar a função composta $g\circ f$. Podemos, no entanto, considerar a composição $g \circ f|_S$, em que S é o conjunto dos pontos x pertencentes ao domínio de f tais que $f(x)$ pertence ao domínio de g. Se a for um ponto de acumulação de S, podemos considerar o limite $\lim_{x\to a}(g \circ f|_S)(x)$ e calculá-lo usando o item (a) do Teorema 6.3. De fato, para todo x no domínio de $f|_S$ temos que $f(x) \neq L$ e portanto as hipóteses do item (a) do Teorema 6.3 estão satisfeitas para as funções g e $f|_S$, desde que o limite $\lim_{y\to L} g(y)$ exista.

Como consequência do Teorema 6.3, obtemos que a composição de duas funções contínuas é contínua.

Corolário 6.9 (continuidade da função composta). *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : E \to \mathbb{R}$ funções com $D \subset \mathbb{R}$ e $E \subset \mathbb{R}$. Suponha que a imagem de f esteja contida no domínio E de g. Se para um certo $a \in D$ a função f é contínua no ponto a e a função g é contínua no ponto $f(a)$, então a função $g\circ f$ é contínua no ponto a. Em particular, se f e g são contínuas, então a função composta $g \circ f$ também é contínua.*

Demonstração. Se a é um ponto isolado de D, o resultado é trivial. Se a é um ponto de acumulação de D, usamos o item (b) do Teorema 6.3 obtendo:

$$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = g\big(f(a)\big),$$

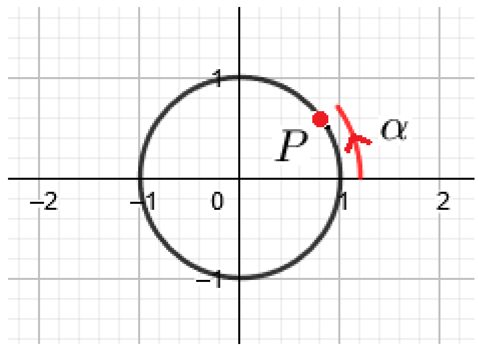
já que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ e g é contínua no ponto $L = f(a)$. □

7. Funções trigonométricas

Considere o círculo unitário de centro na origem dado pela equação:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Dado um número real $\alpha \geq 0$, nos movemos ao longo desse círculo partindo do ponto $(1, 0)$ no sentido "anti-horário" (isto é, no sentido em que entramos no quadrante $x > 0$, $y > 0$ logo após a partida) traçando um arco de comprimento α (veja figura).



Se P é o ponto em que chegamos após esse movimento, então o *cosseno* de α, denotado $\cos\alpha$, é definido como sendo a abscissa do ponto P e o *seno* de α, denotado $\operatorname{sen}\alpha$, é definido como sendo a ordenada do ponto P. Se $\alpha < 0$, nos movemos ao longo do círculo partindo do ponto $(1, 0)$ no sentido "horário" (isto é, no sentido em que entramos no quadrante $x > 0$, $y < 0$ logo após a partida) traçando um arco de comprimento $|\alpha|$. O cosseno e o seno de α são definidos então como sendo, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto P em que chegamos após esse movimento.

Observamos que essa definição para as funções seno e cosseno não é uma definição rigorosa, mas apenas uma descrição informal. Numa formulação rigorosa dessa definição seria necessário primeiro esclarecer o que é "se mover no círculo traçando um arco de comprimento α". Um tal formulação será possível no curso de Cálculo II quando se estuda a definição de comprimento de arco e de curvas parametrizadas pelo comprimento de arco. Neste curso, usaremos apenas essa definição informal de seno e cosseno e as várias identidades trigonométricas envolvendo essas funções (tais como a fórmula do seno e cosseno da soma) que são estudadas em cursos de trigonometria no colegial. Há, na verdade, abordagens mais convenientes para um tratamento rigoroso das funções seno e cosseno em que se ignora, a princípio, essa descrição geométrica clássica do significado de $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ e define-se cosseno e seno usando ferramentas mais sofisticadas (séries de potências ou equações diferenciais). Nessa abordagem, a relação com a descrição geométrica clássica é obtida *a posteriori*.

A partir dessa definição geométrica informal de seno e cosseno e de algumas identidades conhecidas sobre essas funções, nós vamos agora mostrar que as funções seno e cosseno são contínuas. Para mostrar a continuidade dessas funções, nós devemos verificar que

$$\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a, \tag{7.1}$$

para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Escrevendo $x = a + h$ com $h = x - a$ e usando a fórmula para o seno e o cosseno da soma, nós obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen} a \cos h + \cos a \operatorname{sen} h \\ &= \operatorname{sen} a \cos(x-a) + \cos a \operatorname{sen}(x-a) \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos(a+h) = \cos a \cos h - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} h \\ &= \cos a \cos(x-a) - \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(x-a). \end{aligned}$$

Daí:

$$\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = (\operatorname{sen} a)\Big(\lim_{h\to 0} \cos h\Big) + (\cos a)\Big(\lim_{h\to 0} \operatorname{sen} h\Big) \quad \text{e} \tag{7.2}$$

$$\lim_{x\to a} \cos x = (\cos a)\Big(\lim_{h\to 0} \cos h\Big) - (\operatorname{sen} a)\Big(\lim_{h\to 0} \operatorname{sen} h\Big) \tag{7.3}$$

em que a substituição de variáveis $h = x - a$ nos limites é justificada pelo item (a) do Teorema 6.3. Nós mostraremos daqui a pouco que:

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen} h = 0. \tag{7.4}$$

Assumindo esse fato por enquanto, obtemos:

$$\lim_{h\to 0} \cos h = \lim_{h\to 0} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 h} = \lim_{t\to 0} \sqrt{1 - t^2} = 1, \tag{7.5}$$

já que $\cos h = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 h}$ para h próximo de zero (mais precisamente, para $-\frac{\pi}{2} \le h \le \frac{\pi}{2}$). Na segunda igualdade em (7.5) nós usamos a substituição de variáveis $t = \operatorname{sen} h$, que é justificada pelo item (b) do Teorema 6.3; a justificativa dessa igualdade também usa (7.4) e a continuidade da função $f(t) = \sqrt{1 - t^2}$. Substituindo (7.4) e (7.5) em (7.2) e (7.3), nós completamos a demonstração de (7.1) e portanto a demonstração da continuidade das funções seno e cosseno. Ficou faltando agora apenas demonstrar (7.4). Para isso, nós precisamos do seguinte resultado auxiliar.

Teorema 7.1. *Se $x \ge 0$, então* $\operatorname{sen} x \le x$.

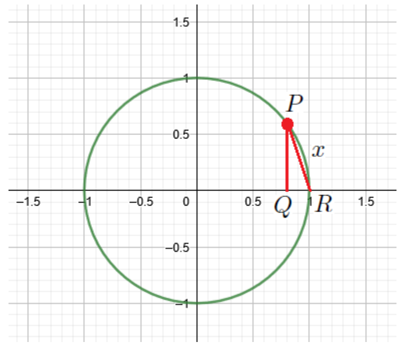
Demonstração. Podemos supor que $x \in [0, \pi]$, pois se $x > \pi$ então:

$$\operatorname{sen} x \le 1 < x.$$

Considere o ponto $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ no círculo unitário e os pontos

$$Q = (\cos x, 0) \quad \text{e} \quad R = (1, 0),$$

como ilustrado na figura a seguir.



Temos que $\operatorname{sen} x$ é igual à distância entre os pontos P e Q e que a distância entre os pontos P e Q é menor ou igual à distância entre os pontos P e R, pois um cateto de um triângulo retângulo é menor do que a hipotenusa desse triângulo retângulo. Mas a distância entre P e R é menor ou igual ao comprimento do arco de círculo PR, já que um segmento de reta é mais curto do que qualquer outra curva conectando suas extremidades. Como o comprimento do arco de círculo PR é justamente igual a x, a conclusão segue. $\square$

Corolário 7.2. *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, vale que $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$.*

Demonstração. Podemos supor que $|x| \leq \pi$, pois se $|x| > \pi$ então:

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1 < |x|.$$

Se $x \geq 0$, então $x \in [0, \pi]$ e daí:

$$|\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} x \leq x = |x|.$$

Por outro lado, se $x \leq 0$, então $x \in [-\pi, 0]$ e daí:

$$|\operatorname{sen} x| = -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(-x) \leq -x = |x|,$$

em que a desigualdade $\operatorname{sen}(-x) \leq -x$ segue do Teorema 7.1, já que $-x$ é maior ou igual a zero. $\square$

Corolário 7.3. *Vale que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$.*

Demonstração. Como $0 \leq |\operatorname{sen} x| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o Teorema do Sanduíche (Teorema 4.1) nos dá que $\lim_{x\to 0} |\operatorname{sen} x| = 0$. A conclusão segue do Teorema 4.2. $\square$

Agora a demonstração da continuidade das funções seno e cosseno está completa.

Teorema 7.4. *As funções seno e cosseno são contínuas.*

Demonstração. Segue de (7.2), (7.3), (7.5) e do Corolário 7.3. $\square$

DEFINIÇÃO 7.5 (tangente, cotangente, secante, cossecante). Dado $x \in \mathbb{R}$ com $\cos x \neq 0$, então a *tangente* de x é definida por

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

e a *secante* de x é definida por:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

Se $\operatorname{sen} x \neq 0$, então a *cotangente* de x é definida por

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

e a *cossecante* de x é definida por:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

TEOREMA 7.6. *As funções tangente, cotangente, secante e cossecante são contínuas.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Teorema 7.4 e do Corolário 1.18. □

DEFINIÇÃO 7.7 (funções trigonométricas inversas). A função *arcoseno*, denotada

$$\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right],$$

é a inversa da restrição da função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. A função *arcocosseno*, denotada

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi],$$

é a inversa da restrição da função cosseno ao intervalo $[0, \pi]$. A função *arcotangente*, denotada

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[,$$

é a inversa da restrição da função tangente ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. A função *arcocotangente*, denotada

$$\operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]0, \pi\right[,$$

é a inversa da restrição da função cotangente ao intervalo $]0, \pi[$. A função *arcosecante*, denotada

$$\operatorname{arcsec} : \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[\longrightarrow [0, \pi] \setminus \left\{\tfrac{\pi}{2}\right\}$$

é a inversa da restrição da função secante ao conjunto $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. A função *arcocossecante*, denotada

$$\operatorname{arccosec} : \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[\longrightarrow \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$$

é a inversa da restrição da função cossecante ao conjunto $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$.

Para justificar o fato que as funções trigonométricas inversas estão bem-definidas precisaríamos mostrar que as restrições das funções trigonométricas consideradas na Definição 7.7 são injetoras e que suas imagens são aquelas apresentadas na Definição 7.7 como domínios das respectivas funções inversas. Para as funções, seno, cosseno, tangente e cotangente a injetividade das restrições relevantes será discutida mais adiante no Exemplo 8.22 e suas imagens serão determinadas no Exemplo 10.9 depois que estudarmos o Teorema do Valor Intermediário. As funções secante e cossecante são simplesmente as composições da função $f(x) = \frac{1}{x}$ com as funções cosseno e seno, de modo que a injetividade e a imagem das restrições relevantes são obtidas a partir dos fatos correspondentes sobre as funções cosseno e seno.

TEOREMA 7.8 (continuidade das funções trigonométricas inversas). *As funções arcoseno, arcocosseno, arcotangente, arcocotangente, arcosecante e arcocossecante são contínuas.*

DEMONSTRAÇÃO. A continuidade das funções arcoseno, arcocosseno, arcotangente e arcocotangente segue do Teorema 5.8, já que são inversas de funções contínuas injetoras cujo domínio é um intervalo. A continuidade das funções arcosecante e arcocossecante segue das igualdades

$$\operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\tfrac{1}{x}\right) \quad \text{e} \quad \operatorname{arccosec} x = \operatorname{arcsen}\left(\tfrac{1}{x}\right),$$

válidas para todo $x \in \,]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. □

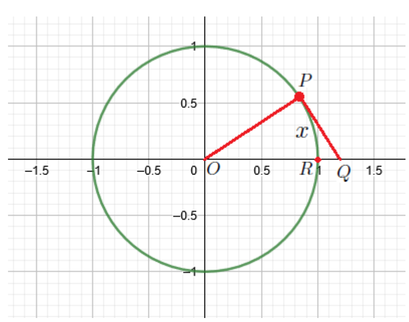
Nosso objetivo agora é calcular um limite muito importante envolvendo a função seno que usaremos muitas vezes mais adiante. Trata-se do limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Para calcular esse limite, precisamos antes demonstrar uma desigualdade.

TEOREMA 7.9. *Para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, vale que $x \leq \operatorname{tg} x$.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere o ponto $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ no círculo unitário, a origem $O = (0,0)$, o ponto $R = (1,0)$ e o ponto Q sobre o eixo das abscissas tal que o triângulo OPQ seja retângulo em P, como ilustrado na figura abaixo.



Denote por C a fatia do disco unitário delimitada pelos pontos O, P e R. Como C está contido no interior do triângulo OPQ, temos que a área de C é menor ou igual à área do triângulo OPQ, isto é:

$$\text{área}(C) \leq \text{área}(OPQ).$$

Vamos calcular essas áreas. Usando o fato que a área de uma fatia de um disco é proporcional ao seu ângulo central e que o disco unitário inteiro de área π corresponde a um ângulo central 2π, obtemos:

$$\text{área}(C) = \frac{1}{2}x.$$

Para calcular a área do triângulo retângulo OPQ, notamos que o lado OP mede 1 e o lado PQ mede $\operatorname{tg} x$, de modo que:

$$\text{área}(OPQ) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Daí $\frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$ e a conclusão segue. $\square$

A demonstração que demos acima do Teorema 7.9 só pode ser considerada uma demonstração rigorosa após um tratamento cuidadoso da noção de área, o qual só é possível após o desenvolvimento da teoria de integração. Mas, mesmo não podendo nesse momento ser tomada como uma demonstração rigorosa, acreditamos que ela fornece um argumento bem convincente[4].

TEOREMA 7.10 (limite fundamental do seno). *Vale que* $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então segue dos Teoremas 7.1 e 7.9 que:

$$\operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x.$$

Dividindo as três expressões por $\operatorname{sen} x > 0$, obtemos:

$$1 \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{\cos x}. \tag{7.6}$$

Como $\frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{-x}{\operatorname{sen}(-x)}$ e $\cos(-x) = \cos x$, concluímos que as desigualdades em (7.6) valem também para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$. Notando que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1,$$

segue do Teorema do Sanduíche (Teorema 4.1) que $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$. Daí:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}} = 1. \qquad \square$$

[4]Em cursos de Análise Matemática em que se usam definições das funções seno e cosseno em termos de séries de potências ou equações diferenciais, poderia-se demonstrar os Teoremas 7.1, 7.9 e 7.10 usando outras ferramentas (derivadas, por exemplo).

8. Limites no infinito e limites infinitos

Vamos agora estudar os *limites no infinito*, isto é, limites da forma:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x). \tag{8.1}$$

Em seguida, estudaremos os limites infinitos, isto é, limites $\lim_{x\to a} f(x)$ em que o valor do limite é $+\infty$ ou $-\infty$. Para estudar os limites no infinito, precisamos primeiramente entender quais as condições sobre o domínio da função f que nos permitem considerar os limites (8.1), isto é, a condição análoga àquela de que a seja um ponto de acumulação do domínio de f quando consideramos o limite $\lim_{x\to a} f(x)$.

Definição 8.1 (conjunto limitado). Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que D é *limitado superiormente* se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que D esteja contido em $]-\infty, M]$, isto é, tal que $x \leq M$, para todo $x \in D$. Se D não é limitado superiormente, dizemos que D é *ilimitado superiormente*. Dizemos que D é *limitado inferiormente* se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que D esteja contido em $[M, +\infty[$, isto é, tal que $x \geq M$, para todo $x \in D$. Se D não é limitado inferiormente, dizemos que D é *ilimitado inferiormente*. Dizemos que D é *limitado* se for ao mesmo tempo limitado inferiomente e superiormente. Equivalentemente, D é limitado se existe $M \geq 0$ tal que $D \subset [-M, M]$. Se D não for limitado, dizemos que D é *ilimitado*.

Recorde que na Definição 4.5 nós introduzimos o conceito de função limitada inferiormente ou superiormente. As Definições 4.5 e 8.1 estão relacionadas da seguinte forma: uma função f é limitada superiormente se, e somente se, a sua imagem é um conjunto limitado superiormente. Similarmente, f é limitada inferiormente se, e somente se, a sua imagem é um conjunto limitado inferiormente e f é limitada se, e somente se, a sua imagem é um conjunto limitado.

Note que para que consigamos fazer x tender a $+\infty$ com x dentro de D, a condição que D deve satisfazer é precisamente a condição de ser ilimitado superiormente. Similarmente, para que consigamos fazer x tender a $-\infty$ com x dentro de D, o conjunto D deve ser ilimitado inferiormente. Isso motiva a definição abaixo.

Definição 8.2 (ponto de acumulação no infinito). Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que $+\infty$ *é um ponto de acumulação de* D se D for ilimitado superiormente. Dizemos que $-\infty$ *é um ponto de acumulação de* D se D for ilimitado inferiormente.

Estamos prontos agora para adaptar a definição de limite (Definição 1.5) para o caso em que $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Definição 8.3 (limites no infinito). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Se $+\infty$ é um ponto de acumulação de D, dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o *limite de f em $+\infty$* e escrevemos $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in D$, temos:

$$x > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se $-\infty$ é um ponto de acumulação de D, dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o *limite de f em $-\infty$* e escrevemos $L = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in D$, temos:

$$x < M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Vamos definir agora o que significa o valor de um limite $\lim_{x\to a} f(x)$ ser igual a $+\infty$ ou $-\infty$. Consideramos primeiro o caso em que a é finito.

Definição 8.4 (limites infinitos). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D. Dizemos que o *limite de f no ponto a é $+\infty$* e escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ se para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$, temos:

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) > M.$$

Dizemos que o *limite de f no ponto a é $-\infty$* e escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ se para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$, temos:

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) < M.$$

Há ainda uma outra possibilidade: tanto x tende a (mais ou menos) infinito, como o valor do limite é (mais ou menos) infinito.

Definição 8.5 (limites infinitos no infinito). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Se $+\infty$ é um ponto de acumulação de D, dizemos que o *limite de f em $+\infty$ é $+\infty$* e escrevemos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $N \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in D$, temos:

$$x > N \Longrightarrow f(x) > M.$$

Se $+\infty$ é um ponto de acumulação de D, dizemos que o *limite de f em $+\infty$ é $-\infty$* e escrevemos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ se para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $N \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in D$, temos:

$$x > N \Longrightarrow f(x) < M.$$

Se $-\infty$ é um ponto de acumulação de D, dizemos que o *limite de f em $-\infty$ é $+\infty$* e escrevemos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ se para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $N \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in D$, temos:

$$x < N \Longrightarrow f(x) > M.$$

Se $-\infty$ é um ponto de acumulação de D, dizemos que o *limite de f em $-\infty$ é $-\infty$* e escrevemos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ se para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $N \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in D$, temos:

$$x < N \Longrightarrow f(x) < M.$$

Nós precisamos agora enunciar as generalizações dos vários teoremas que estudamos até agora para o contexto de limites no infinito e de limites infinitos. Para isso, será conveniente introduzir alguma terminologia.

DEFINIÇÃO 8.6 (reta estendida). A *reta estendida*, denotada por

$$[-\infty, +\infty],$$

é o conjunto obtido adicionando ao conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais dois elementos distintos que não pertencem a $\mathbb{R}$ e que são denotados por $+\infty$ e $-\infty$. Para $a, b \in [-\infty, +\infty]$, nós escrevemos $a \le b$ quando ou $b = +\infty$, ou $a = -\infty$ ou $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \le b$ (no sentido usual em que o símbolo $\le$ é usado para números reais). Nós escrevemos $a < b$ se $a \le b$ e $a \ne b$.

Não há nada de especial a respeito desses novos elementos $+\infty$ e $-\infty$: eles podem ser pensados como meros símbolos e sua natureza é irrelevante.

Começamos generalizando o teorema sobre a unicidade do limite (Teorema 1.6) para o caso de limites no infinito e limites infinitos.

TEOREMA 8.7 (unicidade do limite com infinitos). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in [-\infty, +\infty]$ um ponto de acumulação de D. Existe no máximo um $L \in [-\infty, +\infty]$ tal que "L é o limite de f em a".*

Agora consideramos os limites no infinito de uma função constante e da função identidade.

TEOREMA 8.8 (função constante e identidade). *Se $c \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função constante e igual a c, isto é, $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = c.$$

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função identidade, isto é, $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Para generalizar o teorema sobre o limite da soma e do produto (Teorema 1.12) para o caso de limites infinitos é conveniente estender para $[-\infty, +\infty]$ as operações usuais de soma e produto da reta real.

DEFINIÇÃO 8.9 (operações na reta estentida). As operações de soma e produto da reta real $\mathbb{R}$ são estendidas para $[-\infty, +\infty]$ como segue:

$$\begin{aligned}
a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty, &\quad \text{para } a \in \,]-\infty, +\infty];\\
a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty, &\quad \text{para } a \in [-\infty, +\infty[;\\
a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty, &\quad \text{para } a \in \,]0, +\infty];\\
a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty, &\quad \text{para } a \in \,]0, +\infty];\\
a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty, &\quad \text{para } a \in [-\infty, 0[;\\
a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty, &\quad \text{para } a \in [-\infty, 0[.
\end{aligned}$$

As somas $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$ e os produtos $0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty) \cdot 0$ são deixados indefinidos.

TEOREMA 8.10 (limites de soma e produto, com infinitos). *Sejam*

$$f : D \to \mathbb{R} \quad e \quad g : D \to \mathbb{R}$$

funções com $D \subset \mathbb{R}$ *e seja* $a \in [-\infty, +\infty]$ *um ponto de acumulação de* D. *Suponha que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = L_2,$$

com $L_1, L_2 \in [-\infty, +\infty]$. *Se a soma* $L_1 + L_2$ *estiver bem-definida, então*

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = L_1 + L_2$$

e se o produto $L_1 L_2$ *estiver bem-definido, então:*

$$\lim_{x \to a} (fg)(x) = L_1 L_2.$$

Passemos agora ao caso de limites de quocientes. Como $\frac{f}{g}$ é igual ao produto de f por $\frac{1}{g}$, basta estudar o limite de quocientes da forma $\frac{1}{g}$.

TEOREMA 8.11 (limite do quociente, com infinitos). *Seja* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função com* $D \subset \mathbb{R}$ *e seja* $a \in [-\infty, +\infty]$ *um ponto de acumulação de* D. *Suponha que* $f(x) \neq 0$ *para todo* $x \in D$ *e que:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \in [-\infty, +\infty].$$

Se $L \in \mathbb{R}$ *e* $L \neq 0$, *então:*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}.$$

Se $L = +\infty$ *ou* $L = -\infty$, *então:*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Se $L = 0$, *temos dois casos: se* $f(x) > 0$ *para todo* $x \in D$, *então*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

e se $f(x) < 0$ *para todo* $x \in D$ *então:*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Passamos agora a enunciar as generalizações dos teoremas envolvendo limites de restrições de funções (Seção 2) para o caso de limites no infinito e limites infinitos. Não há nenhuma mudança relevante nos enunciados desses teoremas, exceto pelo enunciado do Teorema 2.6 para $a = \pm\infty$ que requer algum cuidado. Começamos listando num enunciado só os resultados que não requerem alterações significativas.

Teorema 8.12 (limites de restrições, com infinitos). *Temos que:*

(i) *o Teorema 2.2 continua válido se trocamos em seu enunciado* $a \in \mathbb{R}$ *por* $a \in [-\infty, +\infty]$ *e se permitimos que o limite de* f *em* a *esteja em* $[-\infty, +\infty]$.

(ii) *O Teorema 2.8 continua válido se trocamos* $a \in \mathbb{R}$ *e* $L \in \mathbb{R}$ *em seu enunciado por* $a \in [-\infty, +\infty]$ *e* $L \in [-\infty, +\infty]$.

(iii) *O Teorema 2.6 continua válido se permitimos que os limites de* f *ou de* $f|_S$ *no ponto* $a \in \mathbb{R}$ *estejam em* $[-\infty, +\infty]$.

Exemplo 8.13 (limite da função seno no infinito). O limite

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$$

não existe. De fato, temos que $+\infty$ é um ponto de acumulação do conjunto

$$A = \big\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\big\}$$

e que o limite em $+\infty$ da restrição da função seno ao conjunto A é igual zero. Por outro lado, $+\infty$ é também um ponto de acumulação do conjunto

$$B = \big\{\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\big\}$$

e o limite em $+\infty$ da restrição da função seno ao conjunto B é igual a 1. Se o limite $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ existisse e fosse igual a um certo $L \in [-\infty, +\infty]$, seguiria do item (i) do Teorema 8.12 que $L = 0$ e $L = 1$, o que nos dá uma contradição. De forma similar, vê-se que os limites

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sen} x, \quad \lim_{x\to+\infty} \cos x \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \cos x$$

não existem.

O Teorema 2.6, que diz que o limite de f no ponto a só depende dos valores de $f(x)$ para $x \neq a$ próximo de a, precisa de uma pequena adaptação no seu enunciado caso $a = +\infty$ ou $a = -\infty$. Em vez de $0 < |x - a| < r$, que era a condição que dizia que x era próximo de a e diferente de a, devemos dizer que x é maior do que uma determinada constante se $a = +\infty$ e que x é menor do que uma determinada constante se $a = -\infty$.

Teorema 8.14 (o limite de f em a só depende dos valores que $f(x)$ assume para x perto de a, para $a = \pm\infty$). *Seja* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função com* $D \subset \mathbb{R}$ *e seja* $a \in \{-\infty, +\infty\}$ *um ponto de acumulação de* D. *Seja* S *um subconjunto de* D. *Para* $a = +\infty$, *suponha que existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que para todo* $x \in D$:

$$x > M \Longrightarrow x \in S.$$

Para $a = -\infty$, *suponha que existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que para todo* $x \in D$:

$$x < M \Longrightarrow x \in S.$$

Nesse caso, a *também é um ponto de acumulação de* S. *Além do mais, para qualquer* $L \in [-\infty, +\infty]$, *temos que* f *possui limite* L *no ponto* a *se, e somente se,* $f|_S$ *possui limite* L *no ponto* a.

Observação 8.15. Como sempre, os teoremas que dizem que o limite de f num ponto a só depende dos valores de $f(x)$ para $x \neq a$ próximo de a (mais especificamente, o item (iii) do Teorema 8.12 e o Teorema 8.14) podem ser usados para flexibilizar hipóteses de outros teoremas (veja, por exemplo, as Observações 2.9, 4.7 e 6.6).

A Definição 2.5 de limites laterais não faz sentido se $a = +\infty$ ou $a = -\infty$: se $a = +\infty$, não faz sentido falar em x tender a a pela direita e se $a = -\infty$ não faz sentido falar em x tender a a pela esquerda. Porém, para $a \in \mathbb{R}$, a Definição 2.5 continua idêntica se permitimos que o valor L do limite esteja em $[-\infty, +\infty]$. O Teorema 2.11 que relaciona o limite de uma função num ponto com os limites laterias continua válido para limites infinitos, mas mantendo o ponto a em $\mathbb{R}$, evidentemente.

Teorema 8.16. *O Teorema 2.11 continua válido se trocamos em seu enunciado $L \in \mathbb{R}$ por $L \in [-\infty, +\infty]$.*

O Teorema do Sanduíche (Teorema 4.1) continua válido para limites infinitos e limites no infinito, sem alterações. O seu Corolário 4.6 continua válido para limites no infinito.

Teorema 8.17 (do sanduíche, com infinitos). *O Teorema 4.1 continua válido se trocamos em seu enunciado $a \in \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$ por*

$$a \in [-\infty, +\infty] \quad e \quad L \in [-\infty, +\infty].$$

O Corolário 4.6 continua válido se trocamos em seu enunciado $a \in \mathbb{R}$ por $a \in [-\infty, +\infty]$.

Uma outra versão do Teorema do Sanduíche é também possível para limites infinitos: uma versão do sanduíche com "um único pão", em que esse pão tende a $\pm\infty$.

Teorema 8.18 (do sanduíche, com um único pão). *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$ funções com $D \subset \mathbb{R}$. Suponha que*

$$f(x) \leq g(x), \tag{8.2}$$

para todo $x \in D$ e seja $a \in [-\infty, +\infty]$ um ponto de acumulação de D. Se

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,$$

então $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$. Se

$$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty,$$

então $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

O Teorema 4.2 que diz que o limite do módulo de uma função é nulo se, e somente se, o limite dessa função é nulo continua válido para limites no infinito.

Teorema 8.19. *O Teorema 4.2 continua válido se trocamos em seu enunciado $a \in \mathbb{R}$ por $a \in [-\infty, +\infty]$.*

Vejamos agora como fica o teorema sobre o limite de funções compostas (Teorema 6.3) para limites no infinito e limites infinitos.

TEOREMA 8.20 (limite da função composta, com infinitos). *O Teorema 6.3 continua válido se trocamos em seu enunciado* $a \in \mathbb{R}$ *e* $L \in \mathbb{R}$ *por*

$$a \in [-\infty, +\infty] \quad e \quad L \in [-\infty, +\infty]$$

e se no item (a) permitimos que $\lim_{y \to L} g(y)$ *pertença a* $[-\infty, +\infty]$.

Note que no item (a) do Teorema 6.3 a hipótese de que $f(x) \neq L$ para todo $x \in D$ com $x \neq a$ é automaticamente satisfeita se $L = +\infty$ ou $L = -\infty$. O item (b) do Teorema 6.3 não se aplica se $L = +\infty$ ou $L = -\infty$, já que nesse caso L não pode pertencer ao domínio de g.

Para finalizar a seção, apresentamos um resultado que nos permite calcular facilmente o limite de funções crescentes ou decrescentes. Usando esse resultado poderemos, por exemplo, justificar o fato que $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$. Antes de mais nada, uma definição.

DEFINIÇÃO 8.21 (função crescente, decrescente). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Dizemos que f é *crescente* se para todos $x_1, x_2 \in D$ vale que

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

e dizemos que f é *decrescente* se para todos $x_1, x_2 \in D$ vale que:

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Dizemos que f é *estritamente crescente* se para todos $x_1, x_2 \in D$ vale que

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

e dizemos que f é *estritamente decrescente* se para todos $x_1, x_2 \in D$ vale que:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Se f for ou crescente ou decrescente, dizemos que f é *monótona*.

EXEMPLO 8.22 (a função tangente é estritamente crescente no intervalo de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$). Temos que a restrição da função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ é estritamente crescente e que a restrição da função cosseno ao intervalo $[0, \pi]$ é estritamente decrescente. Esses fatos podem ser visualizados intuitivamente a partir da descrição geométrica dessas funções em termos de abscissas e ordenadas de pontos no círculo unitário. Usando esses fatos, vamos mostrar agora que a função tangente restrita ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ é estritamente crescente. Para isso, sejam $x_1, x_2 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ com $x_1 < x_2$. Se $x_1 \geq 0$, temos:

$$0 \leq x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 \leq \operatorname{sen} x_1 < \operatorname{sen} x_2,$$

$$0 \leq x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos x_1 > \cos x_2 > 0 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2},$$

e multiplicando essas desigualdades obtemos $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$. Se $x_2 \le 0$, temos

$$0 \le -x_2 < -x_1 < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \operatorname{tg}(-x_2) < \operatorname{tg}(-x_1) \Longrightarrow -\operatorname{tg} x_2 < -\operatorname{tg} x_1$$

e portanto $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$. Finalmente, se $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$, temos:

$$\operatorname{tg} x_1 < 0 < \operatorname{tg} x_2.$$

Isso completa a demonstração de que a restrição da função tangente ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ é estritamente crescente. Note que, como $\operatorname{cotg}(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, concluímos também que a restrição da função cotangente ao intervalo $]0, \pi[$ é estritamente decrescente.

Teorema 8.23 (inversa de função monótona). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Se f é estritamente crescente, então f é injetora e a função $f^{-1} : \operatorname{Im}(f) \to \mathbb{R}$ é também estritamente crescente. Se f é estritamente decrescente, então f é injetora e a função $f^{-1} : \operatorname{Im}(f) \to \mathbb{R}$ é também estritamente decrescente.*

Demonstração. Suponha que f é estritamente crescente. Sejam x_1 e x_2 elementos distintos do domínio D. Daí temos que ou $x_1 < x_2$ e portanto $f(x_1) < f(x_2)$, ou $x_2 < x_1$ e portanto $f(x_2) < f(x_1)$. Em qualquer caso, temos $f(x_1) \ne f(x_2)$, o que prova que f é injetora. Para mostrar que f^{-1} é estritamente crescente, sejam $y_1, y_2 \in \operatorname{Im}(f)$ com $y_1 < y_2$. Se $x_1 = f^{-1}(y_1)$ e $x_2 = f^{-1}(y_2)$, então $x_1 < x_2$: de fato, caso contrário, teríamos $x_2 \le x_1$ e daí $f(x_2) \le f(x_1)$, ou seja, $y_2 \le y_1$. O caso em que f é estritamente decrescente é tratado de forma análoga. □

Teorema 8.24 (continuidade de função monótona). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Se f é monótona e a imagem de f é um intervalo, então f é contínua.*

Podemos visualizar o que diz o Teorema 8.24 intuitivamente da seguinte forma: se f fosse monótona e descontínua, deveria haver um buraco na imagem de f (isto é, a imagem de f não poderia ser um intervalo) já que, sendo monótona, f não pode "voltar depois" para tampar esse buraco. Esse argumento dá uma boa plausibilidade para a validade do teorema, mas não é uma demonstração.

Teorema 8.25 (limite de uma função monótona na extremidade do domínio). *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função cujo domínio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo com mais de um ponto e cuja imagem $J = \operatorname{Im}(f)$ também é um intervalo. Denote por $a, c \in [-\infty, +\infty[$ as extremidades esquerdas de I e de J, respectivamente, e denote por $b, d \in]-\infty, +\infty]$ as extremidades direitas de I e de J, respectivamente. Se f é crescente, então:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \quad e \quad \lim_{x\to b} f(x) = d.$$

Se f é decrescente, então:

$$\lim_{x\to a} f(x) = d \quad e \quad \lim_{x\to b} f(x) = c.$$

Corolário 8.26. *Se n é um inteiro positivo ímpar, então*

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty \quad e \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty;$$

se n é um inteiro positivo par, então:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty.$$

Demonstração. Note que se n é um inteiro positivo ímpar então a função raiz n-ésima é uma função estritamente crescente cujo domínio e a imagem são iguais a $\mathbb{R}$ (por (5.1) e pelo Teorema 8.23). Se n é par, a função raiz n-ésima é uma função estritamente crescente cujo domínio e a imagem são iguais a $[0, +\infty[$ (por (5.2) e pelo Teorema 8.23). □

Exemplo 8.27 (limite da arcotangente). Usando o Teorema 8.25 vemos que:

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

De fato, a função arcotangente é uma função estritamente crescente cujo domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem é $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (pelo Exemplo 8.22 e pelo Teorema 8.23).

9. Mais exemplos de limites: indeterminações

Os teoremas que vimos na Seção 8 nos permitem calcular diversos limites sem dificuldade, apenas por aplicação direta daqueles resultados. Porém, os limites mais interessantes são aqueles que não podem ser calculados dessa forma direta e requerem algum truque esperto. Tipicamente, esses são os limites que envolvem alguma *forma indeterminada* ou *indeterminação*: tratam-se de situações em que não é possível inferir o valor do limite de uma certa expressão a partir dos valores dos limites de seus componentes. Por exemplo, no Teorema 8.10 vimos que se

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \in [-\infty, +\infty] \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = L_2 \in [-\infty, +\infty]$$

então sabemos qual é o resultado dos limites

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a}(fg)(x)$$

desde que as expressões $L_1 + L_2$ e $L_1 L_2$, respectivamente, estejam bem-definidas. Se $L_1 = +\infty$ e $L_2 = -\infty$ (ou se $L_1 = -\infty$ e $L_2 = +\infty$), nada pode se dizer *a priori* sobre o limite $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$; ele pode existir ou não e, caso exista, pode ter qualquer valor como resultado. Por exemplo, se $f(x) = x + c$ e $g(x) = -x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, em que $c \in \mathbb{R}$ é alguma constante fixada, então

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \tag{9.1}$$

e:

$$\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x) = c.$$

Se $f(x) = 2x$ e $g(x) = -x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então (9.1) vale e:

$$\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x) = +\infty;$$

se $f(x) = x$ e $g(x) = -2x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então (9.1) vale e:

$$\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x) = -\infty.$$

Finalmente, se $f(x) = x$ e $g(x) = -x + \operatorname{sen} x$, então (9.1) vale e o limite

$$\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x) = \lim_{x\to+\infty}\operatorname{sen} x$$

não existe (Exemplo 8.13). Para ver que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, note que $g(x) \le -x+1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e use o Teorema 8.18 (do sanduíche com um único pão). Em vista dessa situação, dizemos que as expressões

$$(+\infty) + (-\infty) \quad \text{e} \quad (-\infty) + (+\infty)$$

são *indeterminações*. As outras indeterminações (envolvendo produtos e quocientes) são:

$$(\pm\infty)\cdot 0, \quad 0\cdot(\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad \text{e} \quad \frac{0}{0}\cdot$$

Assim, por exemplo, se $L_1 = +\infty$ ou $L_1 = -\infty$ e se $L_2 = 0$, nada podemos afirmar *a priori* sobre o limite $\lim_{x\to a}(fg)(x)$. Similarmente, se $L_1 = 0$ e $L_2 = 0$, nada pode-se afirmar *a priori* sobre o limite $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. Para calcular o limite, é necessário então encontrar algum truque para *eliminar a indeterminação*. No Exemplo 3.1 nós calculamos um limite indeterminado da forma $\frac{0}{0}$ em que o numerador e o denominador eram polinômios. Como vimos naquele exemplo, se p e q são polinômios e se o limite $\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}$ com $a \in \mathbb{R}$ é uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, então $p(a) = q(a) = 0$ e nesse caso podemos fatorar os polinômios fazendo $p(x) = (x-a)\bar{p}(x)$ e $q(x) = (x-a)\bar{q}(x)$, em que os polinômios $\bar{p}$ e $\bar{q}$ são obtidos fazendo a divisão de p e q, respectivamente, por $x-a$. Daí:

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\bar{p}(x)}{\bar{q}(x)}.$$

Se o novo limite continuar sendo uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, podemos novamente cancelar um fator $x-a$ em cima e em baixo, repetindo esse processo até que a indeterminação seja eliminada.

Exemplo 9.1. Vamos calcular o limite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{-x^3+4x^2-5x+2}{x^3-3x^2+3x-1}. \tag{9.2}$$

Temos que tanto o numerador quanto o denominador tendem a zero quando $x \to 1$, o que significa que 1 é raiz de ambos os polinômios que aparecem nesse quociente. Fazendo uma divisão de polinômios, obtemos:

$$-x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = (x-1)(-x^2 + 3x - 2) \quad \text{e}$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)(x^2 - 2x + 1).$$

Logo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-x^3 + 4x^2 - 5x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{-x^2 + 3x - 2}{x^2 - 2x + 1}.$$

O novo limite continua sendo uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, isto é, 1 continua sendo raiz de ambos os polinômios que aparecem no quociente. Fazemos então uma nova fatoração

$$-x^2 + 3x - 2 = (x-1)(2-x), \quad x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

e obtemos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-x^2 + 3x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{2-x}{x-1}.$$

Nesse último limite, quando $x \to 1$, o numerador tende a 1 e o denominador tende a zero. No limite de um quociente, quando o numerador tende a um valor diferente de zero e o denominador tende a zero, para calcular o limite é necessário apenas analisar os sinais do numerador e do denominador. Para $x > 1$, temos $x - 1 > 0$ e portanto os Teoremas 8.10 e 8.11 nos dão:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2-x}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (2-x) \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty;$$

para $x < 1$, temos $x - 1 < 0$ e os mesmos teoremas nos dão:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2-x}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (2-x) \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = 1 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Concluímos então que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{-x^3 + 4x^2 - 5x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{-x^3 + 4x^2 - 5x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = -\infty,$$

de modo que o limite (9.2) não existe.

Exemplo 9.2. Vamos calcular o limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3 + 2x^2}.$$

Como quando $x \to 0$ o numerador tende a 1 e o denominador tende a zero, basta analisar o sinal do denominador. Temos

$$x^3 + 2x^2 = x^2(x+2)$$

de modo que $x^3 + 2x^2 \geq 0$ para $x \geq -2$ e $x^3 + 2x^2 \leq 0$ para $x \leq -2$. Como o valor do limite de $f(x)$ quando $x \to 0$ só depende do valor de $f(x)$ para $x \neq 0$ próximo de zero (item (iii) do Teorema 8.12) e como $x^3 + 2x^2 > 0$ para $x \neq 0$ próximo de zero, concluímos que (Teorema 8.11):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3 + 2x^2} = +\infty.$$

EXEMPLO 9.3 (limite de polinômio no infinito). Vamos calcular o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 2x^2 + x + 1).$$

Como $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$, vemos que esse limite contém uma indeterminação do tipo $(+\infty) + (-\infty)$ e portanto o seu cálculo não é imediato. Intuitivamente, pensamos que para x muito grande, x^3 é muito maior do que $2x^2$, de modo que o termo com x^3 é o termo dominante na expressão $x^3 - 2x^2 + x + 1$ para x grande. Daí, é de se esperar que:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 2x^2 + x + 1) = +\infty.$$

Para passar isso a limpo, fatoramos a expressão $x^3 - 2x^2 + x + 1$ colocando x^3 em evidência, como segue:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 2x^2 + x + 1) = \lim_{x\to+\infty} x^3\Big(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\Big).$$

Agora

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\Big) = 1$$

e $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, donde segue que:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 2x^2 + x + 1) = \lim_{x\to+\infty} x^3\Big(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\Big) = (+\infty)\cdot 1 = +\infty,$$

como queríamos demonstrar. Um raciocínio similar mostra que:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 2x^2 + x + 1) = -\infty.$$

Em geral, o limite de um polinômio não constante em $+\infty$ é igual a $+\infty$ se o seu coeficiente dominante for positivo e é igual a $-\infty$ se o seu coeficieinte dominante for negativo. Recorde que se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

é um polinômio com $a_n \neq 0$, então o *coeficiente dominante* de p é a_n e o *grau* de p é n. Se o grau de um polinômio não constante é par, então o seu limite em $-\infty$ é igual a $+\infty$ se o seu coeficiente dominante for positivo e é igual a $-\infty$ se o seu coeficiente dominante for negativo. Se o grau do polinômio for ímpar, então o seu limite em $-\infty$ é igual a $-\infty$ se o seu coeficiente dominante for positivo e é igual a $+\infty$ se o seu coeficiente dominante for negativo.

EXEMPLO 9.4 (limite de quocientes de polinômios no infinito). Vamos calcular o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3 + x + 1}{x^3 + x^2 - 1}.$$

Trata-se de uma indeterminação do tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Intuitivamente, quando x é muito grande, o termo com x^3 é dominante tanto no numerador quanto no denominador, de modo que o valor do quociente deve ser aproximadamente igual a $\frac{2x^3}{x^3} = 2$. Para passar isso a limpo, colocamos x^3 em evidência no numerador e no denominador, obtendo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+x+1}{x^3+x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\big(2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\big)}{x^3\big(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\big)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}} = 2.$$

Vamos agora calcular o limite:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2x+1}{x^2+5x+7}.$$

Colocamos x^3 em evidência no numerador e x^2 em evidência no denominador, obtendo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2x+1}{x^2+5x+7} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\big(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\big)}{x^2\big(1+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}\big)} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\big(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\big)}{1+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}} = -\infty.\end{aligned}$$

Utilizando essa estratégia de colocar o termo dominante em evidência é possível calcular o limite em $+\infty$ ou em $-\infty$ de qualquer quociente de polinômios.

Exemplo 9.5. Vamos calcular o limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \big(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\big).$$

Trata-se de uma indeterminação da forma $(+\infty)+(-\infty)$. O truque para eliminar a indeterminação é multiplicar e dividir a expressão da qual queremos calcular o limite pela soma das raízes quadradas, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \big(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\big) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\big(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\big)\big(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\big)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0,\end{aligned}$$

já que $\lim_{x\to+\infty} \big(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\big) = +\infty$.

10. Teoremas da Conservação do Sinal e do Valor Intermediário

Começamos estudando alguns resultados relacionando limites e desigualdades. O primeiro resultado que apresentamos é um resultado que fala sobre a estabilidade de desigualdades estritas: se uma desigualdade estrita

$$\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$$

vale no limite quando $x \to a$, então a desigualdade $f(x) < g(x)$ já tem que valer para x próximo (mas diferente) de a. Como consequência desse resultado obtemos o chamado Teorema da Conservação do Sinal, que diz que uma função contínua não pode mudar repentinamente de sinal.

TEOREMA 10.1 (estabilidade de uma desigualdade estrita). *Sejam*

$$f : D \to \mathbb{R} \quad e \quad g : D \to \mathbb{R}$$

funções com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in [-\infty, +\infty]$ um ponto de acumulação de D. Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = L_2,$$

com $L_1, L_2 \in [-\infty, +\infty]$. Se $L_1 < L_2$, então $f(x) < g(x)$ para todo $x \in D$ com $x \neq a$ e x próximo de a. Mais precisamente:

(i) *se $a \in \mathbb{R}$, então existe $r > 0$ tal que para todo $x \in D$:*

$$0 < |x - a| < r \Longrightarrow f(x) < g(x);$$

(ii) *se $a = +\infty$, então existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in D$:*

$$x > M \Longrightarrow f(x) < g(x);$$

(iii) *se $a = -\infty$, então existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in D$:*

$$x < M \Longrightarrow f(x) < g(x).$$

Não é difícil de demonstrar o Teorema 10.1 a partir da definição de limite, mas os casos em que L_1, L_2 são finitos e infinitos tem que ser tratados separadamente, o que acaba tornando a demonstração um pouco enfadonha.

COROLÁRIO 10.2 (teorema da conservação do sinal). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in D$. Suponha que f é contínua no ponto a. Se $f(a) > 0$, então $f(x) > 0$ para todo $x \in D$ próximo de a, isto é, existe $r > 0$ tal que para todo $x \in D$:*

$$|x - a| < r \Longrightarrow f(x) > 0.$$

Similarmente, se $f(a) < 0$, então existe $r > 0$ tal que para todo $x \in D$:

$$|x - a| < r \Longrightarrow f(x) < 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Se a é um ponto isolado de D, então existe $r > 0$ tal que a é o único ponto de D em $]a - r, a + r[$. Nesse caso, se $x \in D$ e $|x - a| < r$ então $x = a$ e portanto $f(x) = f(a)$. Se a é um ponto de acumulação de D, então $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ e a conclusão segue do Teorema 10.1 aplicado à função f e à função identicamente nula. $\square$

O próximo resultado nos diz que quando temos uma desigualdade da forma $f(x) \leq g(x)$, podemos tomar o limite quando $x \to a$ dos dois lados da desigualdade (desde que os limites existam, é claro) e a desigualdade se mantém.

COROLÁRIO 10.3 (desigualdades não estritas são mantidas no limite). *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$ funções com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in [-\infty, +\infty]$ um ponto de acumulação de D. Suponha que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = L_2,$$

com $L_1, L_2 \in [-\infty, +\infty]$. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in D$, então $L_1 \leq L_2$.

Demonstração. Supondo por absurdo que $L_1 > L_2$, o Teorema 10.1 nos daria $x \in D$ com $f(x) > g(x)$, contradizendo a hipótese. $\square$

Exemplo 10.4 (o Corolário 10.3 não é válido para desigualdades estritas). Nas condições do Corolário 10.3, se a desigualdade estrita $f(x) < g(x)$ for válida para todo $x \in D$, nem sempre será o caso que $L_1 < L_2$. Evidentemente, o Corolário 10.3 nos garante que $L_1 \leq L_2$, já que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in D$; mas pode ocorrer que $L_1 = L_2$, mesmo se $f(x) < g(x)$ para todo $x \in D$. Por exemplo, se $D =]0, +\infty[$ e as funções $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$ são definidas por

$$f(x) = 0 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

para todo $x > 0$, então $f(x) < g(x)$ para todo $x \in D$, mas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} g(x).$$

O resultado a seguir expressa a ideia intuitiva de que uma função contínua cujo domínio é um intervalo não pode "dar pulos": isto é, se uma tal função assume um valor y_1 e um valor y_2, então ela necessariamente assume todos os valores intermediários entre y_1 e y_2.

Teorema 10.5 (do valor intermediário). *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua cujo domínio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Se y_1 e y_2 são elementos da imagem de f e se $y_1 \leq y_2$, então todo o intervalo $[y_1, y_2]$ está contido na imagem de f. Portanto, a imagem de f também é um intervalo.*

A demonstração do Teorema do Valor Intermediário usa o axioma da completude (veja discussão logo após a Definição 5.1).

Como caso particular do Teorema do Valor Intermediário, temos que uma função contínua num intervalo não pode mudar de sinal sem se anular.

Corolário 10.6 (teorema do anulamento). *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua cujo domínio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Se existem $x_1, x_2 \in I$ com $f(x_1) \geq 0$ e $f(x_2) \leq 0$, então existe $x \in I$ com $f(x) = 0$.*

Usando o Teorema do Valor Intermediário podemos determinar com mais facilidade a imagem de funções contínuas cujo domínio é um intervalo e justificar alguns fatos que já mencionamos em seções anteriores.

Exemplo 10.7 (existência da raiz n-ésima). Se n é um inteiro positivo, então a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é contínua. Segue então do Teorema 10.5 que a imagem de f é um intervalo. Suponha que n é ímpar. Como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

esse intervalo deve ser ilimitado inferiormente e superiormente. Daí a imagem de f tem que ser $\mathbb{R}$. Isso prova que todo número real admite uma raiz n-ésima para n ímpar. Se n é par, temos $f(0) = 0$, $f(x) \geq 0$ para todo

$x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Usando novamente o Teorema 10.5 vemos então que a imagem de f é o intervalo $[0, +\infty[$. Isso prova que todo número real não negativo admite uma raiz n-ésima para n par.

Exemplo 10.8 (polinômio de grau ímpar é sobrejetor). Se $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial de grau ímpar cujo coeficiente dominante é positivo, então (Exemplo 9.3)

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty;$$

se o coeficiente dominante de p é negativo, temos:

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} p(x) = -\infty.$$

Em qualquer caso, como p é contínua, o Teorema do Valor Intermediário nos dá que a imagem de p é um intervalo que é ilimitado inferiormente e superiormente. Assim, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função sobrejetora. Em particular, todo polinômio de grau ímpar possui uma raiz real. Note que isso não é verdade em geral para polinômios de grau par.

Exemplo 10.9 (imagem das funções trigonométricas). Sabemos que as funções seno e cosseno são contínuas e que suas imagens estão contidas no intervalo $[-1, 1]$. Como $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos 0 = 1$ e $\cos\pi = -1$, o Teorema do Valor Intermediário nos dá que a imagem da função seno e da função cosseno são iguais ao intervalo $[-1, 1]$. Mais ainda: a imagem da restrição da função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ é igual a $[-1, 1]$ e a imagem da restrição da função cosseno ao intervalo $[0, \pi]$ é $[-1, 1]$. No caso da função tangente, temos:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = +\infty,$$

donde o Teorema do Valor Intermediário nos dá que a imagem da restrição da função tangente a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ é $\mathbb{R}$. Similarmente, a imagem da restrição da função cotangente ao intervalo $]0, \pi[$ é $\mathbb{R}$.

11. Potenciação e logaritmo

Nesta seção vamos estudar o significado da expressão a^b, em que a e b são números reais. Recorde que na expressão a^b dizemos que a é a *base* e b é o *expoente*. Começamos pelo caso em que o expoente b é um inteiro não negativo, depois consideramos o caso em que b é um inteiro qualquer, depois o caso em que b é racional e finalmente o caso em que b é real. Potências com expoente inteiro positivo já vinham aparecendo ao longo do curso, mas apresentamos agora uma definição formal para deixar a seção mais completa.

Definição 11.1 (potenciação com expoente natural). Se a é um número real e n é um inteiro positivo, definimos a^n como sendo o valor do produto $aa \cdots a$ em que o fator a aparece n vezes. Mais precisamente, definimos a^n recursivamente através das igualdades:

$$a^1 = a \qquad \text{e} \qquad a^{n+1} = a^n a, \quad \text{para todo inteiro } n \geq 1.$$

Nós definimos também $a^0 = 1$, para todo $a \in \mathbb{R}$ (de modo que a igualdade $a^{n+1} = a^n a$ também vale para $n = 0$).

Note que, de acordo com a definição acima, $0^0 = 1$. Como definições são livres — uma definição é meramente uma escolha de associação de um nome a uma coisa — não há algum sentido em que a expressão 0^0 possua um "valor correto": o valor dessa expressão depende da definição escolhida para a^b. No entanto, algumas escolhas de definições são mais úteis e convenientes do que outras e algumas escolhas de definições são mais compatíveis com noções informais que eram comumente associadas ao termo sendo definido e que estavam disponíveis antes da formulação da definição. Existem argumentos para justificar que $0^0 = 1$ é uma boa definição e outros argumentos que sugerem que seria melhor deixar a expressão 0^0 indefinida. Um motivo para deixar a expressão 0^0 indefinida é o fato que — como veremos adiante no Exemplo 13.5 — 0^0 é uma forma indeterminada para limites, isto é, se

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

não temos como saber *a priori* o valor do limite $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$. No entanto, isso não nos proíbe de atribuir um valor qualquer para 0^0. Se atribuímos um valor para 0^0, ocorrerá apenas que, se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = L_2,$$

não vai valer em geral que $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = L_1^{L_2}$ para $L_1 = 0$ e $L_2 = 0$. Argumentos para usar $0^0 = 1$ como definição normalmente são baseados no desejo de manter válidas em casos extremos certas fórmulas de análise combinatória[5]. A definição $0^0 = 1$ também é conveniente para se escrever polinômios de forma abreviada usando somatórios. De fato, é conveniente poder escrever um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ na forma abreviada $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, mas essa forma abreviada só dá o valor correto $p(0) = a_0$ em $x = 0$ se definimos $0^0 = 1$.

[5]Por exemplo, se A é um conjunto finito com m elementos e se B é um conjunto finito com n elementos, então existem n^m funções $f : A \to B$ (pois, para cada $a \in A$, temos n possíveis valores para $f(a)$). Se queremos que esse resultado seja válido para $n = m = 0$, isto é, quando os conjuntos A e B são vazios, devemos definir $0^0 = 1$ pois há uma única função f com domínio e contradomínio vazios.

Definição 11.2 (potenciação com expoente inteiro). Se a é um número real não nulo e se n é um inteiro positivo, definimos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Juntas, as Definições 11.1 e 11.2 nos dão o valor de a^n para qualquer $a \in \mathbb{R}$ e qualquer $n \in \mathbb{Z}$, exceto que deixamos a expressão a^n indefinida para $a = 0$ e $n < 0$. Não é difícil verificar que as igualdades

$$a^{n+m} = a^n a^m, \quad (a^n)^m = a^{nm}, \quad (ab)^n = a^n b^n, \tag{11.1}$$

valem para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ não nulos e quaisquer $n, m \in \mathbb{Z}$. Para $a = 0$ ou $b = 0$ essas igualdades valem se $n \geq 0$ e $m \geq 0$.

Definição 11.3 (potenciação com expoente racional). Se q é um número racional, então podemos escrever q de forma única como uma fração $\frac{m}{n}$ em que $m, n \in \mathbb{Z}$ são relativamente primos e $n \geq 1$. Nós definimos

$$a^q = \sqrt[n]{a^m} = \big(\sqrt[n]{a}\big)^m, \tag{11.2}$$

nos seguintes casos: (i) $a = 0$ e $q \geq 0$; (ii) $a > 0$; (iii) $a < 0$ e n ímpar.

Para $a \geq 0$, as igualdades em (11.2) valem também quando m e n não são relativamente primos (evidentemente, para $a = 0$ é necessário supor $m \geq 0$). Porém, para $a < 0$ essas igualdades não valem em geral se m e n não são relativamente primos. Por exemplo, se $q = \frac{1}{3}$, então

$$(-1)^q = \sqrt[3]{-1} = -1,$$

mas

$$\sqrt[6]{(-1)^2} = 1,$$

isto é, usando a representação $q = \frac{2}{6}$ obtemos um resultado diferente. Assim, para $a < 0$ é realmente relevante na Definição 11.3 supor que m e n sejam relativamente primos.

Os fatos mencionados acima bem como o resultado abaixo podem ser demonstrados usando as igualdades (11.1).

Teorema 11.4 (propriedades básicas da potenciação em que o expoente é racional). *Para $a \in \mathbb{R}$ e $q, r \in \mathbb{Q}$, as igualdades*

$$a^{q+r} = a^q a^r, \tag{11.3}$$

$$(a^q)^r = a^{qr}, \tag{11.4}$$

valem se as expressões a^q e a^r estiverem bem-definidas. Para $a, b \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{Q}$, a igualdade

$$(ab)^q = a^q b^q \tag{11.5}$$

vale se as expressões a^q e b^q estiverem bem-definidas.

No caso da igualdade (11.4) deve-se atentar ao fato de que há situações em que ambos os lados da igualdade estão bem-definidos mas a igualdade não vale, como por exemplo para $a = -1$, $q = 2$ e $r = \frac{1}{6}$.

Teorema 11.5 (propriedades da função potência com expoente racional fixo). *Seja $q \in \mathbb{Q}$ e considere a função f dada por $f(x) = x^q$, em que o domínio de f é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que a expressão x^q está bem-definida. Temos que a função f é contínua e:*

- *se $q > 0$, então a restrição de f a $[0, +\infty[$ é estritamente crescente e a sua imagem é $[0, +\infty[$;*
- *se $q < 0$, então a restrição de f a $]0, +\infty[$ é estritamente decrescente e a sua imagem é $]0, +\infty[$;*
- *se $q > 0$ e q é um quociente de inteiros ímpares, então $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma bijeção estritamente crescente;*
- *se $q < 0$ e q é um quociente de inteiros ímpares, então a restrição de f a $]-\infty, 0[$ é estritamente decrescente e a sua imagem é $]-\infty, 0[$;*
- *se $q > 0$ e q é um quociente de um inteiro par por um inteiro ímpar, então a restrição de f a $]-\infty, 0]$ é estritamente decrescente e a sua imagem é $[0, +\infty[$;*
- *se $q < 0$ e q é um quociente de um inteiro par por um inteiro ímpar, então a restrição de f a $]-\infty, 0[$ é estritamente crescente e a sua imagem é $]0, +\infty[$.*

Demonstração. A continuidade de f segue do Corolário 1.15, do Teorema 5.2 e do Corolário 6.9. As afirmações a respeito de crescimento e decrescimento estrito das restrições de f são obtidas de (5.1), (5.2) e do Teorema 8.23. Finalmente, as afirmações a respeito das imagens das restrições de f seguem do que foi discutido no Exemplo 10.7. □

Estamos prontos agora para tratar o caso de expoentes irracionais. Para isso, nós vamos usar o seguinte resultado que não vamos demonstrar.

Teorema 11.6. *Sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > 0$. Considere a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = a^x,$$

para todo $x \in \mathbb{Q}$. Temos que o limite

$$\lim_{x \to b} f(x) \tag{11.6}$$

existe e é finito. Se b é racional, o valor desse limite é a^b (em outras palavras, a função f é contínua).

Notamos que o Teorema 11.6 não vale se $a < 0$. Por exemplo, se $a = -1$, temos que $a^x = -1$ para todo x no conjunto

$$\left\{ \tfrac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1 \text{ e } m,\ n \text{ ímpares} \right\} \tag{11.7}$$

e que $a^x = 1$ para todo x no conjunto

$$\left\{ \tfrac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1,\ m \text{ par e } n \text{ ímpar} \right\}. \tag{11.8}$$

Ocorre que todo número real é ponto de acumulação tanto de (11.7) como de (11.8), isto é, para qualquer $b \in \mathbb{R}$ podemos fazer $x \to b$ tanto com x

em (11.7) como com x em (11.8). Segue daí que o limite $\lim_{x\to b}(-1)^x$ não existe. Mais geralmente, o limite (11.6) nunca existe se $a < 0$. Se $a = 0$, então o domínio da função f são só os racionais não negativos e o limite (11.6) sempre existe e é igual a zero se $b \geq 0$; note, porém, que para $a = 0$ temos $f(0) = 1$, de modo que f não é contínua no ponto zero.

Definição 11.7 (potenciação com expoente real). Dado $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ quaisquer, nós definimos a^b como sendo igual ao valor do limite (11.6), isto é, a^b é definido como sendo igual ao limite de a^x quando x tende a b por valores racionais. Para $a = 0$, nós definimos $a^b = 0$ se $b > 0$ e $a^b = 1$ se $b = 0$ (coerentemente com a Definição 11.1); a^b fica indefinido para $a = 0$ e $b < 0$. Para $a < 0$, nós definimos a^b apenas nos casos em que já estavam cobertos pela Definição 11.3, isto é, se $a < 0$ então a^b é deixado indefinido para b irracional e para b racional da forma $\frac{m}{n}$ com $m, n \in \mathbb{Z}$, m ímpar e $n \neq 0$ par.

Observamos que para $a, b \in \mathbb{R}$ vale que

$$a > 0 \Longrightarrow a^b \geq 0. \tag{11.9}$$

De fato, se b é racional isso segue diretamente da Definição 11.3 e se $b \in \mathbb{R}$ isso segue tomando o limite quando $q \to b$ com $q \in \mathbb{Q}$ dos dois lados da desigualdade $a^q \geq 0$ (Corolário 10.3). Veremos logo adiante que na verdade $a^b > 0$ para todo $a > 0$ e todo $b \in \mathbb{R}$ (Corolário 11.10).

Teorema 11.8 (continuidade da função exponencial com base fixa). *Dado um número real positivo a, temos que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é contínua.*

O Teorema 11.8 deve parecer bastante plausível, já que o seu enunciado diz que $a^b = \lim_{x\to b} a^x$ sempre que $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Note que quando x tende a b por valores racionais, temos que a^x tende a a^b pela própria definição de a^b. No entanto, para provar o teorema precisaríamos justificar que a^x também tende a a^b quando x tende a b por valores *reais*, o que não é tão imediato.

Teorema 11.9 (propriedades básicas da potenciação em que o expoente é real). *Se $a > 0$ e $b, c \in \mathbb{R}$, valem as igualdades:*

$$a^{b+c} = a^b a^c, \tag{11.10}$$

$$(a^b)^c = a^{bc}; \tag{11.11}$$

se $a \geq 0$, essas igualdades valem para $b \geq 0$ e $c \geq 0$. Se $a > 0$ e $b > 0$, então vale a igualdade:

$$(ab)^c = a^c b^c, \tag{11.12}$$

para qualquer $c \in \mathbb{R}$; se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, essa igualdade vale para $c \geq 0$.

Demonstração. Se $a = 0$, $b \geq 0$ e $c \geq 0$, a demonstração de (11.10) e (11.11) é obtida por uma análise de casos simples. Suponha $a > 0$. Para demonstrar (11.10), tomamos primeiro o limite quando $q \to b$ com $q \in \mathbb{Q}$ dos dois lados da igualdade (11.3), obtendo

$$a^{b+r} = a^b a^r,$$

para todo $r \in \mathbb{Q}$. Agora tomamos o limite quando $r \to c$ com $r \in \mathbb{Q}$ dos dois lados dessa última igualdade, obtendo (11.10); nesse segundo passo, para justificar que a^{b+r} tende a a^{b+c} quando $r \to c$ com $r \in \mathbb{Q}$, precisamos usar o Teorema 11.8, pois mesmo com $r \in \mathbb{Q}$ não é necessariamente verdade que $b + r \in \mathbb{Q}$. Note que de (11.10) obtemos $a^b a^{-b} = a^0 = 1$, de onde sai que $a^b \neq 0$ e portanto $a^b > 0$ por (11.9). Para demonstrar (11.11), tomamos primeiro o limite quando $q \to b$ com $q \in \mathbb{Q}$ dos dois lados da igualdade (11.4), obtendo

$$(a^b)^r = a^{br},$$

para todo $r \in \mathbb{Q}$; aqui usamos a continuidade da função potência com expoente racional r fixo (Teorema 11.5). Agora tomamos o limite quando $r \to c$ com $r \in \mathbb{Q}$ dos dois lados dessa última igualdade, obtendo (11.11). Novamente, o Teorema 11.8 é usado para justificar que a^{br} tende a a^{bc} quando $r \to c$ com $r \in \mathbb{Q}$. Finalmente, vamos demonstrar (11.12). Se $c \geq 0$, a demonstração da igualdade (11.12) para $a = 0$ ou $b = 0$ é obtida por uma análise de casos simples. Se $a > 0$ e $b > 0$, a igualdade (11.12) segue da igualdade (11.5) tomando o limite quando $q \to c$ com $q \in \mathbb{Q}$. □

Corolário 11.10. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se $a > 0$, então $a^b > 0$.*

Demonstração. De (11.10) segue que $a^b a^{-b} = a^0 = 1$ e portanto $a^b \neq 0$. A conclusão segue de (11.9). □

Teorema 11.11 (propriedades da função potência com expoente real fixo). *Se b é um número real positivo, então a função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^b$ para todo $x \geq 0$ é estritamente crescente, contínua e sua imagem é $[0, +\infty[$. Se b é um número real negativo, então a função $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^b$ para todo $x > 0$ é estritamente decrescente, contínua e sua imagem é $]0, +\infty[$.*

Demonstração. Suponha primeiro $b > 0$. Fixados $x_1, x_2 \geq 0$ com $x_1 \leq x_2$, o Teorema 11.5 nos dá

$$x_1^q \leq x_2^q,$$

para qualquer racional $q \geq 0$. Tomando o limite com $q \to b$ dos dois lados dessa desigualdade (Corolário 10.3), obtemos:

$$x_1^b \leq x_2^b,$$

o que prova que f é crescente. Usando (11.11) vemos que a função

$$g : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$$

definida por $g(x) = x^{\frac{1}{b}}$ para todo $x \geq 0$ é a função inversa da função

$$f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[\,,$$

donde segue que $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ é bijetora. Em particular, como f é crescente, concluímos que f é estritamente crescente e que sua imagem é $[0, +\infty[$. A continuidade de f segue então do Teorema 8.24. O caso $b < 0$ é tratado notando que

$$x^{-b} = (x^b)^{-1} = \frac{1}{x^b},$$

para todo $x > 0$ e todo $b \in \mathbb{R}$. □

Corolário 11.12. *Se $b > 0$, então:*

$$\lim_{x \to +\infty} x^b = +\infty.$$

Se $b < 0$, então:

$$\lim_{x \to +\infty} x^b = 0 \quad e \quad \lim_{x \to 0^+} x^b = +\infty.$$

Demonstração. Segue dos Teoremas 11.11 e 8.25. □

Teorema 11.13 (monotonicidade da função exponencial com base fixa). *Seja $a \neq 1$ um número real positivo e seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $a > 1$, então a função f é estritamente crescente e se $a < 1$, então a função f é estritamente decrescente.*

Demonstração. Suponha primeiro $a > 1$. Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 < x_2$, segue de (11.10) que:

$$a^{x_2} = a^{x_1} a^{x_2 - x_1}.$$

Usando o Teorema 11.11 com $b = x_2 - x_1 > 0$, obtemos:

$$1 < a \Longrightarrow 1^{x_2 - x_1} < a^{x_2 - x_1} \Longrightarrow 1 < a^{x_2 - x_1};$$

como $a^{x_1} > 0$ (Corolário 11.10), podemos multiplicar a última desigualdade acima dos dois lados por a^{x_1}, obtendo $a^{x_1} < a^{x_2}$ e concluindo a demonstração de que f é estritamente crescente. A demonstração do teorema no caso $a < 1$ é obtida notando que

$$a^x = \Big(\frac{1}{a}\Big)^{-x},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $a > 0$. □

Vamos agora estudar o crescimento da função exponencial $f(x) = a^x$ quando $a > 1$ e $x \to +\infty$. Veremos que não apenas $f(x)$ tende ao infinito quando x tende ao infinito, mas que $f(x)$ tende ao infinito mais rapidamente do que qualquer potência de x (veja a discussão após o Exemplo 13.2 na Seção 13). Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 11.14 (a exponencial cresce mais rápido do que qualquer potência). *Para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > 1$, vale que:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty. \tag{11.13}$$

Demonstração. Em primeiro lugar, observamos que é suficiente tratar o caso em que $b > 0$. De fato, se $b \leq 0$, então para todo $x > 1$ o Teorema 11.13 nos dá

$$b \leq 0 \Longrightarrow b < 1 \Longrightarrow 0 < x^b < x^1 = x \Longrightarrow \frac{a^x}{x^b} > \frac{a^x}{x},$$

e portanto (11.13) seguirá do Teorema do Sanduíche com um único pão (Teorema 8.18) se tivermos mostrado que $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$. Vamos agora tratar o caso $0 < b < 1$. Escreva $a = 1 + h$ com $h > 0$. Dado $x \geq 1$, seja n o inteiro positivo tal que $n \leq x < n + 1$ e note que

$$a^x \geq a^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh,$$

em que na última desigualdade usamos a expansão de $(1+h)^n$ pelo binômio de Newton. Como $n > x - 1$, obtemos

$$a^x \geq 1 + nh > 1 + (x - 1)h > (x - 1)h,$$

e daí

$$\frac{a^x}{x^b} > \frac{(x-1)h}{x^b}, \tag{11.14}$$

para todo $x \geq 1$. Usando o Corolário 11.12 nós calculamos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)h}{x^b} = \lim_{x\to+\infty} \Big(x^{1-b} - \frac{1}{x^b}\Big)h = +\infty,$$

e daí segue de (11.14) e do Teorema do Sanduíche com um único pão (Teorema 8.18) que (11.13) vale para $0 < b < 1$. Para tratar o caso $b \geq 1$, notamos primeiro que

$$\frac{a^x}{x^b} = \left(\frac{\big(a^{\frac{1}{2b}}\big)^x}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{2b},$$

para todo $x > 0$. Tomando $c = a^{\frac{1}{2b}} > 1^{\frac{1}{2b}} = 1$, o caso do teorema que já demonstramos nos dá

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{c^x}{x^{\frac{1}{2}}} = +\infty,$$

e a conclusão segue do Corolário 11.12. □

Corolário 11.15. *Se $a > 1$, então:*

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$$

Se $0 < a < 1$, então:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \quad e \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty.$$

Demonstração. Se $a > 1$, a igualdade $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ é simplesmente o caso particular do Teorema 11.14 com $b = 0$. Para calcular $\lim_{x\to-\infty} a^x$, usamos a substituição $y = -x$ como segue:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{y\to+\infty} a^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{a^y} = 0.$$

O caso $0 < a < 1$ é obtido notando que:

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $a > 0$. $\square$

Corolário 11.16. *Se $a > 0$ e $a \neq 1$, então a função $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ dada por $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é bijetora.*

Demonstração. A injetividade de f segue do Teorema 11.13 e a sobrejetividade segue do Teorema do Valor Intermediário (Teorema 10.5), da continuidade de f (Teorema 11.8) e do Corolário 11.15. $\square$

Definição 11.17 (logaritmo). Se $a \neq 1$ é um número real positivo, então a *função logaritmo de base a*, denotada $\log_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, é a função inversa da função $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ definida por $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ (veja o Corolário 11.16).

Teorema 11.18 (propriedades básicas do logarítmo). *Se $a > 0$ e $a \neq 1$, então:*

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c,$$

para quaisquer $b > 0$ e $c > 0$ e

$$\log_a(b^c) = c \log_a b,$$

para qualquer $b > 0$ e qualquer $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Usando o Teorema 11.9 obtemos

$$a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} a^{\log_a c} = bc \quad \text{e} \quad a^{c \log_a b} = \left(a^{\log_a b}\right)^c = b^c,$$

e a conclusão segue. $\square$

Teorema 11.19 (mudança de base no logaritmo). *Se $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 1$, então:*

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}.$$

Demonstração. Usando o Teorema 11.9 obtemos

$$b^{\log_b a \log_a c} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a c} = a^{\log_a c} = c,$$

donde $\log_b a \log_a c = \log_b c$ e a conclusão segue. $\square$

Teorema 11.20 (continuidade e monotonicidade do logaritmo). *Se a é maior do que 1, então a função*

$$\log_a :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \tag{11.15}$$

é estritamente crescente, contínua e bijetora. Se $0 < a < 1$, então a função (11.15) é estritamente decrescente, contínua e bijetora.

Demonstração. Segue dos Teoremas 11.13, 8.23, 11.8 e 5.8. $\square$

Corolário 11.21 (limites do logaritmo). *Se $a > 1$, então:*

$$\lim_{x\to 0}\log_a x = -\infty \quad e \quad \lim_{x\to+\infty}\log_a x = +\infty.$$

Se $0 < a < 1$, então:

$$\lim_{x\to 0}\log_a x = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to+\infty}\log_a x = -\infty.$$

Demonstração. Segue dos Teoremas 11.20 e 8.25. □

Vamos agora tratar de limites da forma $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, em que f é uma função positiva. Um truque útil para calcular esse tipo de limite é escrever

$$f(x)^{g(x)} = b^{g(x)\log_b f(x)}, \tag{11.16}$$

para algum $b > 1$ fixado qualquer.

Teorema 11.22 (limite de uma potenciação). *Sejam*

$$f : D \to \mathbb{R} \quad e \quad g : D \to \mathbb{R}$$

funções com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in [-\infty, +\infty]$ um ponto de acumulação de D. Suponha que para todo $x \in D$ tenhamos que $f(x) \geq 0$ e também que $g(x) \geq 0$ sempre que $f(x) = 0$ (o que garante que a expressão $f(x)^{g(x)}$ esteja bem-definida). Suponha também que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \in [0, +\infty] \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = L_2 \in [-\infty, +\infty].$$

Temos que:

- *se $0 < L_1 < +\infty$ e $L_2 \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = L_1^{L_2}$;*
- *se $L_1 = +\infty$ e $L_2 > 0$, então $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = +\infty$;*
- *se $L_1 = +\infty$ e $L_2 < 0$, então $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0$;*
- *se $L_1 = 0$ e $L_2 > 0$, então $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0$;*
- *se $L_1 = 0$ e $L_2 < 0$, então $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = +\infty$;*
- *se $L_1 > 1$ e $L_2 = +\infty$, então $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = +\infty$;*
- *se $L_1 > 1$ e $L_2 = -\infty$, então $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0$;*
- *se $L_1 < 1$ e $L_2 = +\infty$, então $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0$;*
- *se $L_1 < 1$ e $L_2 = -\infty$, então $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = +\infty$.*

Demonstração. Suponha primeiro que $f(x) > 0$, para todo $x \in D$. Nesse caso, escolhemos um $b > 1$ qualquer e podemos usar a igualdade (11.16). Daí a conclusão segue da continuidade da função logaritmo (Teorema 11.20), do Corolário 11.21, do Teorema 11.8 e do Corolário 11.15. Para tratar o caso geral, note primeiro que se $f(x) > 0$ para todo $x \in D$ com $x \neq a$ próximo[6] de a, então recaímos no caso que já foi tratado, já que o limite $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ só depende dos valores de $f(x)^{g(x)}$ para $x \in D$ com $x \neq a$ próximo de a. Se não é verdade que $f(x) > 0$ para todo $x \in D$

[6]O significado preciso dessa frase está explicado no enunciado do Teorema 10.1.

com $x \neq a$ próximo de a, então temos que a é um ponto de acumulação do conjunto:

$$D_1 = \{x \in D : f(x) = 0\}.$$

Nesse caso

$$L_1 = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (f|_{D_1})(x) = 0$$

e como $g(x) \geq 0$ para todo $x \in D_1$, segue do Corolário 10.3 que:

$$L_2 = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} (g|_{D_1})(x) \geq 0.$$

Note que o caso $L_1 = 0$ e $L_2 = 0$ não é contemplado por nenhum dos itens do enunciado e portanto podemos supor que $L_2 > 0$. Nós devemos mostrar agora que:

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = 0. \tag{11.17}$$

Como $L_2 > 0$, segue do Teorema 10.1 que $g(x) > 0$ para todo $x \in D$ com $x \neq a$ próximo de a. Se for verdade que $f(x) = 0$ para todo $x \in D$ com $x \neq a$ próximo de a, aí $f(x)^{g(x)} = 0$ para todo $x \in D$ com $x \neq a$ próximo de a e (11.17) segue. Se isso não for verdade, temos que a é um ponto de acumulação do conjunto:

$$D_2 = \{x \in D : f(x) > 0\}.$$

Daí temos que $f(x)^{g(x)}$ tende a zero quando $x \to a$ por dentro de D_1 (já que $f(x)^{g(x)} = 0$ para $x \in D_1$ com $x \neq a$ próximo de a) e que $f(x)^{g(x)}$ tende a zero quando $x \to a$ por dentro de D_2 (pelo caso que foi tratado no início da demonstração). Como $D = D_1 \cup D_2$, a igualdade (11.17) segue agora do item (ii) do Teorema 8.12. $\square$

Sob as condições do Teorema 11.22, nos casos

- $L_1 = 0$ e $L_2 = 0$,
- $L_1 = +\infty$ e $L_2 = 0$,
- $L_1 = 1$ e $L_2 = \pm\infty$

não é possível concluir nada sobre o limite $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ (só podemos garantir que, se esse limite existir, ele é não negativo, já que $f(x)^{g(x)} \geq 0$ para todo $x \in D$). Dizemos então que

$$0^0, \quad (+\infty)^0 \quad \text{e} \quad 1^{\pm\infty}$$

são indeterminações. Como sempre, esses são os casos interessantes em que é preciso trabalhar um pouco para calcular o valor do limite.

Observação 11.23. Existem outras abordagens para se definir a potenciação a^b com $a \in \,]0, +\infty[$ e $b \in \mathbb{R}$ usando ferramentas mais avançadas (séries de potências, equações diferenciais ou integração). Não temos essas ferramentas disponíveis agora, mas observamos que com essas ferramentas a demonstração dos resultados estudados nesta seção ficaria mais simples (veja Observação 12.5 adiante para mais detalhes).

12. O número e

O número e é uma constante irracional que aparece em diversas fórmulas importantes da Matemática, da Estatística e da Física, assim como o número π. Existem várias motivações possíveis para a introdução do número e, sendo que a mais simples envolve derivadas: o número e aparece na solução da equação diferencial $f' = f$. Como ainda não tratamos formalmente de derivadas no curso, nós motivaremos a definição de e agora através da ideia de *juros compostos continuamente*.

Recorde que se eu possuo um certo capital x e se eu invisto esse capital e obtenho um rendimento de, digamos, 20% de juros num determinado período, após esse periódo eu terei o montante inicial x e mais 20% de x, isto é, $x + 0{,}2x = 1{,}2x$. Chamando de j uma determinada taxa de juros (já dividida por 100, isto é, no exemplo em questão $j = 0{,}2$), então após um período o capital inicial x se transforma em $(1 + j)x$. O que ocorre se, em vez de me pagarem 20% de juros por um determinado período de investimento, me pagassem 10% de juros na primeira metade desse período e depois mais 10% de juros na segunda metade? Na primeira metade do período, o capital inicial x se multiplicaria por 1,1 e na segunda metade o novo capital $1{,}1x$ se multiplicaria novamente por 1,1, de modo que o capital final será $1{,}1^2x = 1{,}21x$. Assim, dois meios períodos com rendimento 10% correspondem a um período inteiro com um rendimento de 21%, não 20%. Estamos tratando aqui de *juros compostos*, isto é, juros incidem sobre juros: no segundo período, os 10% de juros não incidem apenas sobre o capital inicial x, mas também sobre o rendimento $0{,}1x$ obtido no primeiro período. O que acontece agora se, em vez de me pagarem 20% de juros por um determinado período, esse periódo fosse dividido em 10 partes e me pagassem 2% de juros em cada décimo de período? É fácil ver que, nesse caso, o capital inicial x seria multiplicado por 1,02 por 10 vezes, isto é, o capital final seria $1{,}02^{10}x$. Fazendo os cálculos explicitamente, vê-se que um juro de 2% em cada décimo de período corresponde a um rendimento no período todo de aproximadamente 21,899% (com três casas decimais de aproximação). Podemos continuar essa brincadeira, subdividindo o período completo em mais e mais subperíodos: podemos trocar a taxa de juros de 20% no período todo por uma taxa de 0,2% composta 100 vezes em 100 centésimos desse período. Nesse caso, o capital inicial se multiplica por $1{,}002^{100}$ e um cálculo explícito nos mostra que isso corresponde a um rendimento no período de cerca de 22,116% (com três casas decimais de aproximação). Como é de se esperar, quanto mais subdivisões se faz do periódo, maior o rendimento total. Mas o que acontece quando esse número de subdivisões tende ao infinito? Será que o rendimento também tende ao infinito? Vamos investigar essa questão abaixo.

Considere uma taxa de juros j que deveria incidir sobre um determinado período. Dado um inteiro positivo n, consideramos uma subdivisão desse período em n partes e deixamos uma taxa de juros $\frac{j}{n}$ incidir sobre o capital acumulado em cada um dos n subperíodos. Ao final do período todo, o capital inicial terá sido multiplicado por:

$$\left(1+\frac{j}{n}\right)^n.$$

A pergunta é: o que ocorre com essa expressão à medida em que n tende a $+\infty$? Para responder a essa pergunta, usaremos o seguinte resultado cuja demonstração será omitida.

Teorema 12.1 (limite que define e). *O limite*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \tag{12.1}$$

existe e é finito.

Definição 12.2 (o número e). O *número* e, também conhecido como *número de Euler*, é definido por:

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Sabe-se que e é um número irracional entre 2 e 3. Na verdade, assim como π, sabe-se que e é um *número transcendente*: isso significa que e (e π) não são raízes de um polinômio não nulo com coeficientes racionais. Note que, por exemplo, o número $\sqrt{2}$ é também irracional, mas não é transcendente, ele é *algébrico*: $\sqrt{2}$ é raiz de um polinômio não nulo com coeficientes racionais, a saber $p(x)=x^2-2$. As primeiras 15 casas decimais de e são:

$$e=2{,}718281828459045\ldots$$

É possível obter estimativas de e atribuindo valores pequenos a x na expressão $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, mas uma maneira muito melhor de obter estimativas de e é usar a série:

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\Big).$$

A teoria de séries não é estudada no curso de Cálculo I, mas veremos essa aproximação para o número e mais adiante quando estudarmos o polinômio de Taylor da função $f(x)=e^x$ (Exemplo 33.19). Usando essa série não é muito difícil de mostrar que e é um número irracional, mas a transcendência de e é consideravelmente mais difícil de demonstrar.

Exemplo 12.3 (juros compostos continuamente). Voltamos à nossa pergunta inicial sobre os juros compostos continuamente e calculamos agora o limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{j}{n}\right)^n.$$

Fazendo a substituição de variáveis $x=\frac{j}{n}$ em (12.1), obtemos:

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{j}{n}\right)^{\frac{n}{j}}.$$

Daí:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{j}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{j}{n}\right)^{\frac{n}{j}}\right]^j=e^j.$$

Note que no problema inicial de juros compostos só estávamos considerando valores inteiros de n, mas na verdade a igualdade acima também vale se no limite $n\to+\infty$ permitimos que n assuma qualquer valor real. A conclusão dessa análise é que uma taxa de juros j, quando *composta continuamente*, isto é, quando subdividida em uma taxa de juros $\frac{j}{n}$ incidindo em n subperíodos com n muito grande, corresponde a uma taxa de juros no período total de e^j-1. No exemplo que consideramos inicialmente de uma taxa de juros de 20% ($j=0{,}2$), vemos que a composição contínua corresponde a uma taxa de juros de aproximadamente 22,140% (com três casas decimais de aproximação).

DEFINIÇÃO 12.4 (logaritmo natural ou neperiano). O *logaritmo natural* ou *logaritmo neperiano*, denotado ln, é por definição o logaritmo com base e.

Como $e>1$, o Teorema 11.20 nos diz que a função $\ln:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ é estritamente crescente, contínua e bijetora. Além do mais, pelo Corolário 11.21:

$$\lim_{x\to0}\ln x=-\infty\quad\text{e}\quad\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty.$$

OBSERVAÇÃO 12.5. É possível dar uma demonstração do Teorema 12.1 em que se trata primeiro o caso em que x tende a zero através de valores da forma $\frac{1}{n}$ com n inteiro positivo[7], depois trata-se o caso em que x tende a zero por valores reais pela direita e finalmente o caso em que x tende a zero pela esquerda. Por outro lado, há um outro tipo de abordagem: primeiro desenvolve-se toda a teoria do Cálculo Diferencial, depois define-se a função $f(x)=e^x$ usando a série de potências $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ e usa-se as ferramentas do Cálculo Diferencial para demonstrar as suas propriedades. O logaritmo neperiano pode então ser definido como a função inversa de $f(x)=e^x$ (alternativamente, é possível definir o logaritmo neperiano usando integração da função $g(x)=\frac{1}{x}$ e depois define-se a função $f(x)=e^x$ como sendo a inversa do logaritmo neperiano). A partir daí pode-se obter de forma eficiente uma definição de a^b com $a>0$ e $b\in\mathbb{R}$ (fazendo $a^b=e^{b\ln a}$) e uma demonstração rápida das propriedades da potenciação. Uma vez que tenhamos tudo isso em mãos, o Teorema 12.1 fica bem fácil de demonstrar e obtém-se que $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ é igual ao número e que aparece como base da potência e^x que foi definida através da série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Num curso de Cálculo, queremos ter acesso a funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas tão cedo quanto possível para trabalhar com exemplos, enquanto demonstrações rigorosas de todos os teoremas não são uma prioridade. Porém, num curso de matemática rigorosa, em que as prioridades seriam invertidas, seria muito

[7] Usa-se aqui um teorema que diz que uma sequência crescente e limitada de números reais admite um limite finito.

mais eficiente desenvolver toda a teoria do Cálculo Diferencial antes de introduzir funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Calculamos agora dois limites importantes envolvendo exponencial e logaritmo que serão usados no futuro.

TEOREMA 12.6 (limites fundamentais de exponencial e logaritmo). *Temos que:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad e \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

DEMONSTRAÇÃO. Para calcular o primeiro limite, note simplesmente que

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln\Big((1+x)^{\frac{1}{x}}\Big)$$

para todo $x \neq 0$ tal que $1 + x > 0$ e portanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln\Big((1+x)^{\frac{1}{x}}\Big) = \ln e = 1,$$

pela definição de e e pela continuidade de ln. Para o cálculo do segundo limite, usamos a substituição de variáveis $y = e^x - 1$ o que nos dá $x = \ln(1+y)$ e:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}} = 1.$$ □

13. Mais exemplos de limites: todas as ferramentas juntas

Temos agora em mãos um conjunto de ferramentas razoavelmente poderoso para calcular limites e justificar esses cálculos rigorosamente. Vamos nesta seção usar essas ferramentas para trabalhar em mais alguns exemplos. Observamos que há ainda muitos limites relevantes cujo cálculo depende de resultados que veremos só mais adiante, como a regra de L'Hospital (Seção 32), cujo enunciado precisa de derivadas.

EXEMPLO 13.1. Vamos calcular o limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Trata-se de uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$. A indeterminação pode ser eliminada multiplicando o numerador e o denominador por $1 + \cos x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \Big(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big)^2 \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}.$$

Na última igualdade acima usamos o limite fundamental $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (Teorema 7.10).

Exemplo 13.2. Vamos calcular o limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-3x+2)}{x^2-1}.$$

Trata-se de uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$. Intuitivamente, podemos raciocinar assim: para x próximo de 1, temos que x^2-3x+2 é próximo de zero e portanto $\operatorname{sen}(x^2-3x+2)$ é próximo de x^2-3x+2 (pelo Teorema 7.10). Parece então razoável simplesmente trocar $\operatorname{sen}(x^2-3x+2)$ por x^2-3x+2 e depois calcular o limite fatorando os polinômios, usando a técnica ilustrada no Exemplo 3.1. Como justificar corretamente esse raciocínio intuitivo? Dividimos e multiplicamos a expressão dentro do limite por x^2-3x+2, como segue:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-3x+2)}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-3x+2)}{x^2-3x+2}\,\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-3x+2)}{x^2-3x+2}\,\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}.\end{aligned}$$

Usando a substituição de variáveis $y = x^2-3x+2$, obtemos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-3x+2)}{x^2-3x+2} = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1.$$

Assim:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-3x+2)}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Observamos que a justificativa rigorosa que nós usamos acima para a troca de $\operatorname{sen}(x^2-3x+2)$ por x^2-3x+2 não é uma mera formalidade e que esse tipo de raciocínio intuitivo pode de fato gerar resultados errados. Por exemplo, nós veremos mais adiante (no Exemplo 32.3 usando a regra de L'Hospital e no Exemplo 33.11 usando o polinômio de Taylor) que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

enquanto que a substituição ingênua de $\operatorname{sen} x$ por x nos levaria a pensar que esse limite é igual a zero.

Um limite indeterminado pode ser visualizado como uma disputa de forças, em que um termo ou fator tenta puxar o limite para um lado e outro termo ou fator tenta puxar o limite para o outro lado; para resolver o limite nós temos que saber quem ganha essa disputa. Por exemplo, se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $f(x)$ e $g(x)$ ficam ambos muito grandes quando x fica próximo de a. O limite

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

será também igual a $+\infty$ se $f(x)$ fica muito maior do que $g(x)$ para x perto de a. Por outro lado, se é $g(x)$ que fica muito maior do que $f(x)$ para x perto de a, então esse limite será igual a zero. Há também casos em que a disputa de forças é razoavelmente equilibrada e esse limite tem como resultado alguma constante positiva e finita c. Nesse caso, temos que $f(x)$ é aproximadamente igual a $cg(x)$, para x perto de a. Pode acontecer também de o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ ter algum comportamento oscilatório quando x se aproxima de a e aí o limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ nem existe. Vimos no Exemplo 9.4 algumas disputas desse tipo em que tanto f como g eram polinômios e x tendia a $\pm\infty$. No caso de polinômios, o termo mais relevante quando $x \to \pm\infty$ é o termo (não nulo) em que x aparece com a maior potência. Esse é o termo dominante. No Teorema 11.14, vimos que exponenciais da forma a^x com $a > 1$ crescem mais rápido do que qualquer potência de x (e portanto mais rápido do que qualquer polinômio) quando $x \to +\infty$. Formalmente, esse fato é expresso pela igualdade

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty,$$

válida para qualquer $a > 1$ e qualquer $b \in \mathbb{R}$. Nos exemplos a seguir nós veremos o resultado de mais algumas dessas disputas.

Exemplo 13.3 (logaritmo no infinito). Para qualquer $a > 1$ e qualquer $b > 0$, temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^b} = 0, \tag{13.1}$$

isto é, o logaritmo de x tende a infinito mais devagar do que qualquer potência de x com expoente positivo (se $b = 0$, então $x^b = 1$ e se $b < 0$, então x^b tende a zero quando $x \to +\infty$, de modo que nesses casos o limite em (13.1) é igual a $+\infty$). Para calcular o limite em (13.1) nós usamos a substituição de variáveis $y = \log_a x$ e obtemos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^b} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{(a^y)^b} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{a^{by}}.$$

Usando agora a substituição $z = by$, vem

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^b} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{a^{by}} = \lim_{z\to+\infty} \frac{z}{ba^z} = 0,$$

em que usamos o Teorema 11.14. Notamos que a igualdade (13.1) também vale para $0 < a < 1$, já que $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$.

Exemplo 13.4 (logaritmo perto de zero). Para qualquer $a > 1$ e qualquer $b > 0$, temos que:

$$\lim_{x\to 0} x^b \log_a x = 0. \tag{13.2}$$

Note que esse limite é uma indeterminação do tipo $0 \cdot (-\infty)$. O fato que esse limite é igual a zero nos diz que quem ganha a disputa é x^b. Para mostrar a igualdade (13.2), nós fazemos a substituição $y = \frac{1}{x}$ e obtemos

$$\lim_{x \to 0} x^b \log_a x = \lim_{y \to +\infty} \frac{-\log_a y}{y^b} = 0,$$

em que usamos o resultado mostrado no Exemplo 13.3. Note que como a expressão $x^b \log_a x$ só está bem-definida para $x > 0$, então o domínio da função cujo limite estamos calculando em (13.2) é $]0, +\infty[$. Em outras palavras, no limite em (13.2) temos que x está tendendo a zero por valores positivos e é por isso que $y = \frac{1}{x} \to +\infty$ quando x tende a zero. A igualdade (13.2) também vale no caso $0 < a < 1$, já que a igualdade (13.1) vale nesse caso.

Exemplo 13.5 (0^0 é uma forma indeterminada para limites). Temos que:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1.$$

De fato, para todo $x > 0$ vale que:

$$x^x = e^{x \ln x},$$

e a conclusão segue do fato que $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$ (Exemplo 13.4). No entanto, há exemplos em que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, mas $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ não é igual a 1. De fato, se

$$f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

são definidas por

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{e} \quad g(x) = x,$$

para todo $x > 0$, então $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$, mas $f(x)^{g(x)} = \frac{1}{e}$, para todo $x > 0$.

14. Máximos e mínimos: o Teorema de Weierstrass

O problema de encontrar pontos de máximo e mínimo de uma função é um dos grandes problemas da Matemática e possui um sem número de aplicações práticas. O Cálculo Diferencial nos dá ferramentas importantes para se encontrar pontos de máximo e mínimo que serão estudadas mais adiante no capítulo sobre derivadas. Aqui apenas enunciaremos um resultado simples que garante a existência de pontos de máximo e mínimo sob certas hipóteses. Começamos pelas definições precisas.

Definição 14.1 (máximos e mínimos). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, em que o domínio D é um conjunto qualquer. Dizemos que $x \in D$ é um *ponto de máximo* de f se $f(x) \geq f(t)$, para todo $t \in D$. Dizemos que $x \in D$ é um *ponto de máximo estrito* de f se $f(x) > f(t)$ para todo $t \in D$ com $t \neq x$. Dizemos que $x \in D$ é um *ponto de mínimo* de f se $f(x) \leq f(t)$, para todo $t \in D$. Dizemos que $x \in D$ é um *ponto de mínimo estrito* de f se $f(x) < f(t)$, para todo $t \in D$ com $t \neq x$.

Evidentemente, se uma função f possui um ponto de máximo, então ela é limitada superiormente. Similarmente, se ela possui um ponto de mínimo, então ela é limitada inferiormente.

EXEMPLO 14.2. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$, para todo $x \in \mathbb{R}$, não é nem limitada inferiormente nem limitada superiormente e portanto não possui nem ponto de máximo nem ponto de mínimo. Se $[a, b]$ é um intervalo limitado e fechado (em que $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$), então a restrição de f ao intervalo $[a, b]$ possui um ponto de mínimo estrito em a e um ponto de máximo estrito em b, já que f é estritamente crescente. A restrição de f ao intervalo semi-aberto $]a, b]$ possui um ponto de máximo estrito em b, mas não possui ponto de mínimo, apesar de ser limitada: de fato, nenhum $x \in]a, b]$ pode ser um ponto de mínimo de f, já que podemos sempre escolher um t com $a < t < x$ e aí vale que $f(t) < f(x)$. Similarmente, a restrição de f ao intervalo semi-aberto $[a, b[$ possui um ponto de mínimo estrito em a, mas não possui ponto de máximo, apesar de ser limitada. A restrição de f ao intervalo aberto $]a, b[$ não possui nem ponto de máximo nem ponto de mínimo, apesar de ser limitada.

EXEMPLO 14.3. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, possui um ponto de mínimo estrito em 0, mas não possui ponto de máximo, já que não é limitada superiormente.

EXEMPLO 14.4. Se uma função é constante, então todo ponto de seu domínio é ao mesmo tempo um ponto de máximo e um ponto de mínimo, mas nenhum deles é estrito (se o domínio possuir mais de um ponto).

EXEMPLO 14.5. Considere a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{cases}$$

Temos que f não possui nem ponto de máximo nem ponto de mínimo. De fato, o ponto 0 e o ponto 1 não são nem pontos de máximo nem de mínimo, já que $f\left(\frac{1}{3}\right) < f(0) = f(1) < f\left(\frac{2}{3}\right)$. Um ponto $x \in]0, 1[$ também não pode ser nem ponto de máximo nem de mínimo, já que escolhendo t e u com $0 < t < x < u < 1$, temos $f(t) < f(x) < f(u)$.

Vamos agora enunciar o resultado central da seção. A sua demonstração está fora do escopo de um curso de Cálculo.

TEOREMA 14.6 (de Weierstrass). *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$, então qualquer função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possui um ponto de máximo e um ponto de mínimo.*

COROLÁRIO 14.7. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$, então qualquer função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada.* □

O Exemplo 14.2 mostra que a hipótese de que o domínio de f seja um intervalo limitado e fechado no Teorema de Weierstrass é fundamental.

O Exemplo 14.5 mostra que a hipótese de que f seja contínua também é fundamental.

Exemplo 14.8. No Corolário 14.7, a hipótese de que o domínio de f seja um intervalo limitado e fechado é fundamental. Por exemplo, a função $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x \in]0,1]$ não é limitada, apesar de ser contínua e o seu domínio ser um intervalo limitado. A hipótese de que a função seja contínua também é fundamental: a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

também não é limitada, apesar do seu domínio ser um intervalo limitado e fechado. Nesse caso, f não é contínua no ponto 0.

CAPíTULO 2

Derivadas

15. Definição e primeiros exemplos

DEFINIÇÃO 15.1 (derivada). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja x um ponto de D que também é um ponto de acumulação de D. A *derivada* de f no ponto x, denotada por $f'(x)$, é definida por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{15.1}$$

caso esse limite exista e seja finito. Quando esse limite existe e é finito, dizemos que f é *derivável no ponto* x.

Usando a substituição de variáveis $t = x + h$, vemos que a definição de derivada pode ser reescrita na forma:

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}. \tag{15.2}$$

Como a substituição de variáveis $t = x + h$ é reversível (isto é, pode ser desfeita, fazendo $h = t - x$), vemos que o limite em (15.2) existe se, e somente se, o limite em (15.1) existe e que, quando ambos os limites existem, eles são iguais.

OBSERVAÇÃO 15.2. Vamos discutir com um pouco mais de cuidado as condições necessárias para que faça sentido considerar o limite em (15.1). Em primeiro lugar, é necessário que x pertença ao domínio D de f, pois o termo $f(x)$ aparece explicitamente em (15.1). Segundo, precisamos que 0 seja um ponto de acumulação do domínio da função da qual estamos tomando o limite em (15.1); esse domínio é:

$$\big\{h \in \mathbb{R} : h \neq 0 \text{ e } x + h \in D\big\}. \tag{15.3}$$

Agora note que 0 é um ponto de acumulação do conjunto (15.3) se, e somente se, para todo $r > 0$ existe $h \neq 0$ em (15.3) com $|h| < r$. Não é difícil ver que isso é equivalente a dizer que para todo $r > 0$ existe $t \in D$ com $t \neq x$ e $|t - x| < r$. Assim, 0 é ponto de acumulação de (15.3) se, e somente se, x é ponto de acumulação de D. Concluímos então que a condição para que faça sentido considerar o limite em (15.1) é justamente a condição de que x seja ponto de acumulação de D e que x seja também um ponto de D, como exigimos na Definição 15.1. Essa conclusão pode ser obtida mais diretamente quando a definição de derivada é escrita na forma (15.2).

Exemplo 15.3 (derivada da função constante). Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função constante, então evidentemente

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 15.4 (derivada da função identidade). Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função dada por $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 15.5 (derivada da n-ésima potência). Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função dada por $f(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Mais geralmente, se n é um inteiro positivo qualquer e se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então calculamos $f'(x)$ usando o binômio de Newton:

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}h^3 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n.$$

A expansão acima pode parecer meio complicada, mas os seus detalhes não importam: tudo o que importa é que dela segue que podemos escrever

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + hp(h),$$

em que p é alguma função polinomial (envolvendo os coeficientes binomiais). Daí segue que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \big(nx^{n-1} + hp(h)\big) = nx^{n-1}.$$

Os resultados mostrados nos Exemplos 15.4 e 15.5 podem ser sumarizados no teorema abaixo. Recorde que nós optamos por usar a convenção $0^0 = 1$ (Definição 11.1).

Teorema 15.6 (regra do tombo, expoente inteiro positivo). *Seja n um inteiro positivo e considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que f é derivável no ponto x e*

$$f'(x) = nx^{n-1},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Note que o Teorema 15.6 também vale para $n = 0$ se supusermos $x \neq 0$, já que nesse caso a função f é constante e a sua derivada em qualquer ponto é nula (Exemplo 15.3). A dificuldade com o caso $n = 0$ e $x = 0$ é que a expressão nx^{n-1} contém o fator 0^{-1} que não está definido. Mais adiante nós generalizaremos a regra do tombo para expoentes reais (veja Teoremas 22.4 e 22.6 e Observações 22.5 e 22.7).

No quociente que aparece no limite (15.2) que define a derivada $f'(x)$ temos que o denominador sempre tende a zero. Se a função f for contínua no ponto x, então o numerador também tende a zero, de modo que temos uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$. Quando f não é contínua no ponto x, então o numerador não tende a zero e nesse caso vamos mostrar agora que nunca ocorre de o limite existir e ser finito. Em outras palavras, funções que não são contínuas no ponto x, não podem ser deriváveis no ponto x. Esse é o conteúdo do próximo resultado.

Teorema 15.7 (função derivável é contínua). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $x \in D$ um ponto de acumulação de D. Se f é derivável no ponto x, então f é contínua no ponto x.*

Demonstração. Temos

$$\lim_{t\to x}\big(f(t) - f(x)\big) = \lim_{t\to x}\frac{f(t) - f(x)}{t - x}\lim_{t\to x}(t - x) = f'(x)\cdot 0 = 0,$$

donde segue que

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{t\to x}\big(f(t) - f(x)\big) + \lim_{t\to x} f(x) = 0 + f(x) = f(x),$$

provando que f é contínua no ponto x. □

A recíproca do Teorema 15.7 não vale, isto é, a continuidade de f em um ponto não implica na derivabilidade de f nesse ponto. Vejamos um exemplo simples.

Exemplo 15.8 (derivada do módulo). Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $x > 0$, então a derivada de f no ponto x é dada por

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x + h) - x}{h} = 1,$$

pois apenas o valor da expressão $\frac{|x+h|-|x|}{h}$ para $h \neq 0$ próximo de zero é relevante para o valor do limite quando $h \to 0$ (Teorema 2.6) e para x positivo temos que também $x + h$ é positivo para h próximo de zero. Similarmente, se $x < 0$ então $x + h < 0$ para todo h próximo de zero e portanto:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-(x + h) - (-x)}{h} = -1.$$

O que acontece se $x = 0$? Temos

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h},$$

mas

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h} = -1,$$

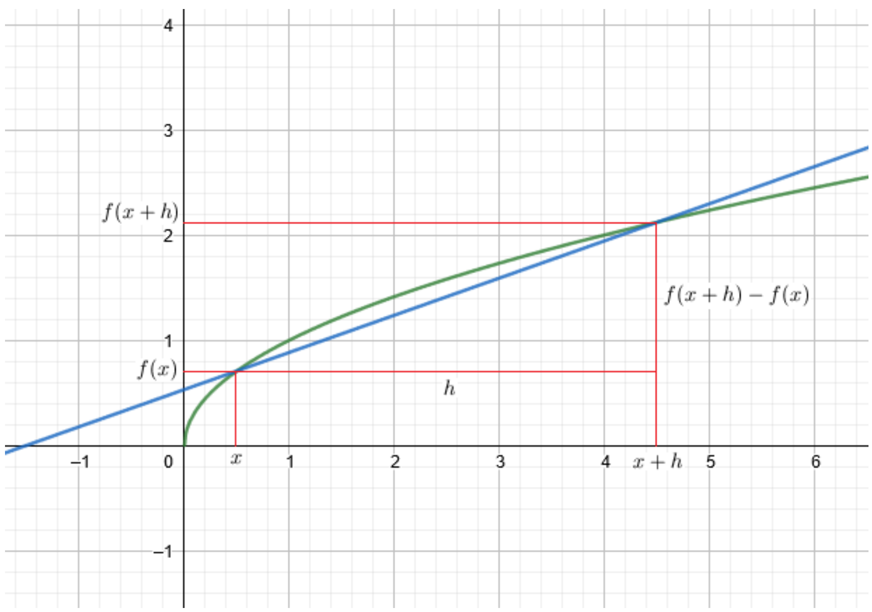
donde segue que o limite $\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$ não existe e f não é derivável no ponto zero. Note que a função f é contínua e portanto temos aqui um contra-exemplo para a recíproca do Teorema 15.7.

16. Interpretação geométrica da derivada: reta tangente

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $x \in D$ um ponto de acumulação de D. Dado $h \neq 0$ tal que $x + h \in D$, temos que o quociente

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

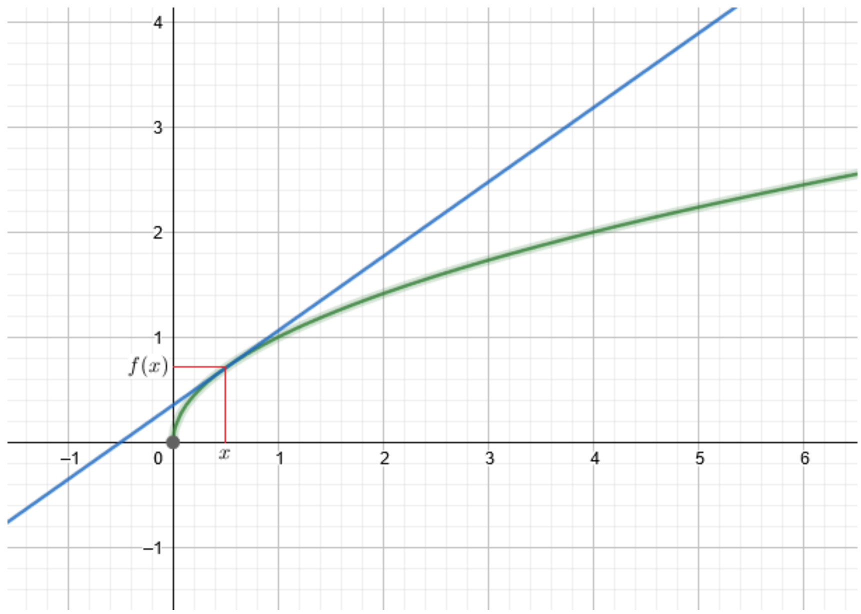
que aparece na definição de derivada é precisamente o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $\big(x, f(x)\big)$ e $\big(x+h, f(x+h)\big)$. Dizemos que essa é uma *reta secante* ao gráfico de f. A figura a seguir ilustra o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ e uma reta secante a esse gráfico.



Se f for derivável no ponto x, então à medida em que h fica cada vez menor (mas mantendo-se diferente de zero), o ponto $x+h$ fica cada vez mais próximo do ponto x e a reta secante passando pelos pontos $\big(x, f(x)\big)$ e $\big(x+h, f(x+h)\big)$ se aproxima cada vez mais de uma reta que passa pelo ponto $\big(x, f(x)\big)$ e cujo coeficiente angular é:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{16.1}$$

Essa reta é chamada a *reta tangente* ao gráfico de f no ponto $\big(x, f(x)\big)$ e é ilustrada na figura a seguir.



Há uma situação em que f não é derivável no ponto x, mas mesmo assim definimos a reta tangente ao gráfico de f no ponto $\big(x, f(x)\big)$. Quando o limite em (16.1) é igual a $+\infty$ ou a $-\infty$ ou ainda, mais geralmente, quando

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| = +\infty$$

então f não é derivável no ponto x, mas as retas secantes passando pelos pontos $\big(x, f(x)\big)$ e $\big(x+h, f(x+h)\big)$ se aproximam, quando $h \to 0$, de uma reta passando pelo ponto $\big(x, f(x)\big)$ e paralela ao eixo das ordenadas. Nesse caso, essa é a reta que chamamos de *reta tangente* ao gráfico de f no ponto $\big(x, f(x)\big)$.

Exemplo 16.1 (reta tangente vertical). Se $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = \sqrt{x}$, para todo $x \geq 0$, então

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty, \tag{16.2}$$

donde a função f não é derivável no ponto 0. Porém, como o limite (16.2) é igual a $+\infty$, temos que a reta tangente ao gráfico de f no ponto

$$\big(0, f(0)\big) = (0, 0)$$

é a reta paralela ao eixo das ordenadas passando por esse ponto, isto é, a reta tangente é o próprio eixo das ordenadas.

Em algumas situações, o limite que define a derivada $f'(x)$ não existe porque os limites laterais

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{e} \tag{16.3}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{16.4}$$

existem e são distintos. Nesse caso, o pedaço do gráfico de f que fica à direita do ponto $\big(x, f(x)\big)$ — mais precisamente, o gráfico da restrição de f ao conjunto $D\cap[x,+\infty[$ — possui uma reta tangente no ponto $\big(x, f(x)\big)$ cujo coeficiente angular é igual ao limite à direita (16.3). Similarmente, o pedaço do gráfico de f que fica à esquerda do ponto $\big(x, f(x)\big)$ — isto é, o gráfico da restrição de f ao conjunto $D\cap]-\infty, x]$ — possui uma reta tangente no ponto $\big(x, f(x)\big)$ cujo coeficiente angular é igual ao limite à esquerda (16.4). Como os limites laterais (16.3) e (16.4) são distintos, essas duas retas tangentes são distintas e não há uma reta tangente ao gráfico de f no ponto $\big(x, f(x)\big)$. Nesse tipo de situação o gráfico de f forma um "canto" (ou "bico") no ponto $\big(x, f(x)\big)$. Um exemplo simples desse fenômeno ocorre com o gráfico da função $f(x) = |x|$ no ponto $(0, 0)$ (veja Exemplo 15.8).

Há situações também em que nem mesmo os limites laterais (16.3) e (16.4) existem.

Exemplo 16.2 (nem os limites laterais existem). Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

então os limites laterais

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{h} \quad \text{e}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \operatorname{sen} \frac{1}{h}$$

não existem. De fato, o argumento que demos no Exemplo 3.2 mostra que o limite à direita não existe e um argumento similar (trocando os sinais dos elementos dos conjuntos A e B) mostra que o limite à esquerda não existe. Assim, a função f não é derivável no ponto 0. Além disso, nem a parte do gráfico de f que fica à direita do eixo das ordenadas nem a parte do gráfico de f que fica à esquerda do eixo das ordenadas admite uma reta tangente no ponto $(0, 0)$. De fato, temos que a reta secante ao gráfico de f passando pelos pontos $(0, 0)$ e $\big(h, f(h)\big)$ apresenta um comportamento oscilatório quando $h \to 0$ (com o coeficiente angular $\operatorname{sen} \frac{1}{h}$ oscilando entre -1 e 1) e ela não se aproxima de reta alguma quando $h \to 0$, nem mesmo quando h tende a zero só pela direita ou só pela esquerda.

17. Taxa de variação e notação de Leibniz

A noção de taxa de variação e a notação clássica de Leibniz para derivadas são melhor compreendidas no contexto de aplicações concretas da Matemática. Em tais aplicações, normalmente há um certo *sistema* que se quer estudar e uma série de *quantidades* (também chamadas *grandezas*, *variáveis* ou *variáveis dinâmicas*) de interesse associadas a esse sistema. Os valores dessas quantidades frequentemente são números reais. O sistema possui vários estados possíveis e essas várias quantidades assumem diferentes valores em estados diferentes do sistema. Na maioria dos exemplos, o tempo (mais precisamente, o tempo decorrido a partir de um certo instante inicial convencionado) é uma dessas quantidades de interesse e queremos saber como outras quantidades variam em função do tempo. Alguns exemplos:

- em Física, podemos estudar o sistema que consiste de uma partícula em movimento. Nesse caso, quantidades de interesse são o tempo, a posição, a velocidade, a aceleração, o momento linear, a energia cinética e a energia potencial.
- Ainda em Física, mais especificamente na Termodinâmica, o sistema sendo estudado pode ser um gás e quantidades de interesse são a pressão, o volume e a temperatura.
- Em Economia, o sistema sendo estudado pode ser um país e quantidades de interesse são o produto interno bruto, a taxa de inflação, a taxa de juros básica e a taxa de desemprego.
- Em Epidemiologia, o sistema sendo estudado pode ser uma população afligida por uma epidemia e quantidades de interesse são o tempo, o número de infectados, o número de suscetíveis e o número de recuperados.

Se x e y denotam quantidades de interesse associadas a um sistema sob estudo, pode ocorrer que o valor de x determine completamente[1] o valor de y e nesse caso podemos escrever y em função de x, isto é, existe uma função f tal que $y = f(x)$. Se as quantidades x e y tomam valores reais, então o domínio de f é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e o contradomínio de f é $\mathbb{R}$. Quando o sistema muda de estado, a quantidade x sofre uma perturbação Δx e a quantidade y sofre então uma perturbação Δy dada por:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Frequentemente estamos interessados na taxa de variação entre as quantidades y e x, isto é, o quanto a quantidade y varia para cada unidade que a quantidade x varia. Uma maneira natural de tentar quantificar essa taxa é

[1] Mais geralmente, a quantidade y pode ser uma função de várias outras quantidades x_1, x_2, $\ldots$, x_n, isto é, $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Funções de várias variáveis reais serão estudadas nos cursos de Cálculo II e III.

olhar para o quociente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{17.1}$$

Por exemplo, suponha que a quantidade x seja a medida da aresta de um cubo e que y denote o volume desse cubo, de modo que:

$$y = x^3.$$

Nesse caso

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

e:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Infelizmente a interpretação ingênua do quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ como "o quanto y varia para cada unidade que x varia" não é realmente correta porque esse quociente depende do valor de Δx. Por exemplo, se a aresta do cubo vale $x = 2$ e se ela sofre uma perturbação de uma unidade ($\Delta x = 1$), então o volume do cubo sofre uma perturbação de $\Delta y = (2+1)^3 - 2^3 = 19$; porém, se a aresta $x = 2$ sofre uma perturbação de duas unidades ($\Delta x = 2$), a perturbação sofrida pelo volume é $\Delta y = (2+2)^3 - 2^3 = 56$, que não é o dobro de 19. Dito de outro modo, temos que para $\Delta x = 1$ o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ vale 19 e para $\Delta x = 2$ o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ vale $\frac{56}{2} = 28$. Qual desses valores devemos usar como uma medida da taxa de variação de y em relação a x? Uma opção é considerar apenas perturbações pequenas de x. Considere o limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

que no exemplo do cubo é igual a:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \big(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\big) = 3x^2. \tag{17.2}$$

O fato que esse limite existe nos diz que o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é aproximadamente constante quando Δx é muito pequeno ou, ainda, que Δy é aproximadamente proporcional a Δx quando Δx é muito pequeno. Por exemplo, se $x = 2$, o limite (17.2) vale $3 \cdot 2^2 = 12$, o que significa que se Δx é bem pequeno então Δy é aproximadamente igual a $12\Delta x$. Em outras palavras, quando um cubo de aresta $x = 2$ muda ligeiramente de tamanho e a sua aresta passa a valer $2+\Delta x$, com Δx pequeno, a perturbação Δy sofrida pelo seu volume é aproximadamente proporcional a Δx e, mais especificamente, é aproximadamente igual a $12\Delta x$. A seguir listamos alguns valores concretos de Δy para vários valores pequenos de Δx e para $x = 2$, comparando o valor exato de Δy com a aproximação $12\Delta x$:

$$\Delta x = 0{,}001 \Longrightarrow \Delta y = 0{,}012006001 \quad \text{e} \quad 12\Delta x = 0{,}012,$$

$$\Delta x = 0{,}002 \Longrightarrow \Delta y = 0{,}024024008 \quad \text{e} \quad 12\Delta x = 0{,}024,$$

$$\Delta x = 0{,}003 \Longrightarrow \Delta y = 0{,}036054027 \quad \text{e} \quad 12\Delta x = 0{,}036,$$

$$\Delta x = 0{,}01 \Longrightarrow \Delta y = 0{,}120601 \quad \text{e} \quad 12\Delta x = 0{,}12,$$

$$\Delta x = 0{,}02 \Longrightarrow \Delta y = 0{,}242408 \quad \text{e} \quad 12\Delta x = 0{,}24,$$

$$\Delta x = 0{,}03 \Longrightarrow \Delta y = 0{,}365427 \quad \text{e} \quad 12\Delta x = 0{,}36,$$

$$\Delta x = 0{,}1 \Longrightarrow \Delta y = 1{,}261 \quad \text{e} \quad 12\Delta x = 1{,}2,$$

$$\Delta x = 0{,}2 \Longrightarrow \Delta y = 2{,}648 \quad \text{e} \quad 12\Delta x = 2{,}4,$$

$$\Delta x = 0{,}3 \Longrightarrow \Delta y = 4{,}167 \quad \text{e} \quad 12\Delta x = 3{,}6,$$

$$\Delta x = 0{,}5 \Longrightarrow \Delta y = 7{,}625 \quad \text{e} \quad 12\Delta x = 6.$$

Note que, nesse exemplo, a aproximação de Δy por $f'(x)\Delta x = 12\Delta x$ é muito boa enquanto Δx é da ordem de um milésimo ou um centésimo, mas já não é tão boa para $\Delta x = 0{,}5$. Estimativas explícitas do erro que cometemos quando aproximamos Δy por $f'(x)\Delta x$ serão estudadas na seção sobre polinômio de Taylor (Seção 33).

Evidentemente, o limite do quociente (17.1) quando $\Delta x \to 0$ é, por definição, precisamente a derivada de f no ponto x, isto é

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

se f for derivável no ponto x. Assim, se f é derivável no ponto x, temos que pequenas perturbações Δx no valor de x levam a pequenas perturbações Δy no valor de $y = f(x)$ que são aproximadamente proporcionais a Δx e, mais especificamente, aproximadamente iguais a $f'(x)\Delta x$. Definimos então a *taxa de variação instantânea* da quantidade y com respeito à quantidade x como sendo o valor da derivada $f'(x)$ da função f tal que $y = f(x)$.

Nos primórdios do Cálculo Diferencial, quando ele foi concebido por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz na segunda metade do século XVII, não havia a noção de limite e nem um entendimento claro do que fosse um número real. A definição precisa de limite (como aparece na nossa Definição 1.5) foi desenvolvida por Bernard Bolzano, Augustin–Louis Cauchy e Karl Weierstrass ao longo da primeira metade do século XIX e um entendimento melhor da noção de número real surgiu a partir dos trabalhos de Richard Dedekind só na segunda metade do século XIX. Originalmente, o Cálculo Diferencial foi formulado em termos da ideia informal de *infinitesimal* ou "número infinitamente pequeno". Na notação original de Leibniz, uma perturbação infinitesimal da quantidade x era denotada por $\mathrm{d}x$ (em vez de Δx, que denota uma perturbação arbitrária — possivelmente grande

— de x) e a perturbação infinitesimal correspondente na quantidade y seria então denotada por $\mathrm{d}y$. Com essa notação, o quociente

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

seria a derivada da função f tal que $y = f(x)$. Essa notação continua sendo padrão hoje em dia para derivadas de funções, mas entre matemáticos ela é normalmente entendida como apenas uma notação para a derivada de f e não como um quociente entre perturbações infinitesimais. De fato, no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais definido da maneira usual[2] não faz nenhum sentido falar em "elementos infinitesimais". Porém, várias formas de introduzir os velhos infinitésimos na matemática rigorosa moderna foram desenvolvidas na segunda metade do século XX. Uma das abordagens mais populares para isso é a *Análise não Standard* desenvolvida por Abraham Robinson, em que se considera uma certa extensão ${}^*\mathbb{R}$ da reta real, a *reta não standard*. A reta não standard possui muitas das propriedades da reta real usual (standard) e ela contém elementos infinitesimais: um elemento θ de ${}^*\mathbb{R}$ é chamado um *infinitésimo* se $\theta \neq 0$ e se $|\theta| < c$ para todo $c \in \mathbb{R}$ tal que $c > 0$. Em outras palavras, θ é não nulo, mas seu valor absoluto é menor do que qualquer número real positivo da reta real standard[3]. Utilizando Análise não Standard, podemos considerar uma perturbação infinitesimal $\mathrm{d}x = \theta \in {}^*\mathbb{R}$ da quantidade x e também a perturbação correspondente $\mathrm{d}y = f(x+\theta) - f(x)$ da quantidade y. Observamos que para dar sentido à expressão $f(x+\theta)$ é necessário definir uma certa extensão apropriada da função f da reta standard para a reta não standard; a construção dessa extensão é explicada nas exposições de Análise não Standard. Se f é contínua no ponto x, esse $\mathrm{d}y$ é também um infinitésimo. Nessa abordagem para os infinitesimais não é exatamente verdade que o quociente $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ será igual à derivada $f'(x)$; o que vale é que esse quociente difere da derivada $f'(x)$ por um infinitésimo. Notamos que a Análise não Standard, embora perfeitamente rigorosa, não é *mainstream* no sentido de que não faz parte do currículo da maior parte dos cursos de graduação e pós-graduação em Matemática e é ignorada pela vasta maioria dos livros de Análise Matemática.

Os símbolos $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$ foram também reintroduzidos na Matemática Moderna rigorosa através da teoria das *formas diferenciais*, que é normalmente

[2]As construções mais comuns para os números reais são os cortes de Dedekind e as classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais. Muitos livros de Análise Matemática tratam os números reais de forma axiomática (usando os axiomas de corpo ordenado completo) e essas construções mostram a existência de uma estrutura que satisfaz esses axiomas. Tais construções devem ser realizadas dentro do âmbito de uma teoria axiomática de conjuntos, sendo que a mais usual e que funciona como fundamentação axiomática para quase toda a Matemática é a teoria axiomática de Zermelo–Fraenkel com o axioma da escolha, mais conhecida pela sigla ZFC.

[3]Evidentemente, $|\theta|$ não poderia ser menor do que qualquer elemento positivo da reta não standard ${}^*\mathbb{R}$ já que $|\theta|$ não poderia ser menor do que si próprio nem menor do que, por exemplo, a sua metade.

estudada em cursos mais avançados de Cálculo e Geometria Diferencial. Porém, nesse contexto os símbolos $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$ não denotam infinitesimais. A noção de forma diferencial requer alguns requisitos de Álgebra Linear e não é possível resumir as ideias centrais aqui. É razoavelmente comum também usar os símbolos $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$ em manipulações algébricas (por exemplo, na resolução de equações diferenciais) sem uma preocupação com uma explicitação precisa do seu significado. Essas manipulações algébricas de um modo geral produzem resultados corretos, mas para fins de *justificativa* da conclusão obtida requerem ou um tratamento alternativo sem os símbolos $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$ ou um tratamento em que sejam atribuídos significados precisos a esses símbolos. Observamos também que entre não matemáticos trabalhando com aplicações da Matemática (especialmente a Física) é comum ainda a utilização dos símbolos $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$ da mesma forma que eram usados no século XVII, isto é, como perturbações infinitesimais das quantidades x e y, sem uma preocupação com um tratamento bem fundamentado da noção de infinitesimal (como aquele dado pela Análise não Standard de Robinson).

Exemplo 17.1 (velocidade e aceleração). Na cinemática, quando estudamos o movimento de uma partícula ao longo de uma linha, denotamos por $t \in \mathbb{R}$ o tempo (decorrido a partir de algum instante inicial convencionado) e por $s \in \mathbb{R}$ a posição da partícula. Mais precisamente: escolhemos um ponto da linha pela qual a partícula se move — denominado origem — para corresponder à posição $s = 0$ e um dos lados da origem nessa linha que convencionamos chamar de lado positivo. O valor de s é definido como o comprimento do trecho da linha desde a origem até a posição da partícula, caso a partícula esteja do lado positivo da origem, e como menos esse comprimento, caso a partícula esteja do lado negativo da origem. A taxa de variação

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

da posição s em relação ao tempo t é a quantidade que chamamos de *velocidade* (ou *velocidade escalar instantânea*) da partícula e denotamos por v. A taxa de variação

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

da velocidade v em relação ao tempo t é a chamada *aceleração* (ou *aceleração escalar instantânea*) da partícula e é denotada por a.

Observação 17.2. Um tratamento matemático adequado da noção de “quantidade associada a um sistema” é obtido considerando um conjunto S que é o *espaço de estados* desse sistema, isto é, o conjunto de todos os estados possíveis do sistema. Quantidades de interesse x, y associadas a esse sistema são tratadas como funções $x : S \to \mathbb{R}$ e $y : S \to \mathbb{R}$ que associam um número real a cada possível estado do sistema. Com esse tratamento, a igualdade $y = f(x)$, com $f : D \to \mathbb{R}$ e $D \subset \mathbb{R}$, significa na verdade que $y = f \circ x$, isto é, que para cada estado $s \in S$ do sistema, vale que o valor

$y(s)$ da quantidade y é obtido do valor $x(s)$ da quantidade x pela aplicação da função f. O domínio D de f pode ser tomado como sendo a imagem da função x. Esse tipo de tratamento cuidadoso da noção de quantidade associada a um sistema raramente aparece em livros-texto[4]. Quantidades x e y associadas a um sistema são às vezes chamadas de *variáveis* do sistema, mas deve-se tomar cuidado para não confundir essas "variáveis" com aquilo que normalmente é chamado de "variável" na maior parte das exposições de matemática (e em livros de Lógica Matemática). Quando usamos variáveis x e y em frases como "sejam x e y números reais" temos que os símbolos x e y apontam para *um único* valor (não especificado) e nesse caso não faz sentido falar em uma dependência funcional do tipo $y = f(x)$. Esse tipo de dependência funcional só aparece quando as "variáveis" x e y denotam elas próprias funções, como explicado acima.

Finalizamos a seção discutindo uma forma de usar a notação de Leibniz que é muito conveniente para escrever eficientemente contas extensas com derivadas. Uma dificuldade com a notação $f'(x)$ que introduzimos na Definição 15.1 é que ela só serve para denotar a derivada de uma função quando foi dado um nome para essa função. Por exemplo, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = x^2 - 3x\cos x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então o símbolo f é o *nome* da função, enquanto a expressão $x^2 - 3x\cos x$ denota o valor da função f no ponto x (podemos dizer também que essa expressão é uma *fórmula* usada para definir a função f). Uma função não deve ser confundida com o seu valor em um ponto: escrever $(x^2 - 3x\cos x)'$ não é uma forma apropriada de usar a notação para derivadas introduzida na Definição 15.1, já que $x^2 - 3x\cos x$ não é o nome da função, mas o seu valor no ponto x. A forma correta de usar a notação de derivada é colocar a linha na frente do nome da função. A preocupação aqui não é apenas com uma formalidade convencional, mas com o fato que expressões como $x^2 - 3x\cos x$ nem sempre deixam claro de qual função estamos falando. Por exemplo, dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, se consideramos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então quando escrevemos $f'(x)$ está claro qual é a função que estamos derivando, mas escrevendo $(ax^2 + bx + c)'$ alguém poderia pensar, por exemplo, que x, b e c são constantes e que queremos na verdade derivar a função g dada por $g(a) = ax^2 + bx + c$. Em outras palavras, ao colocar uma linha na frente de uma expressão não fica necessariamente claro qual função estamos derivando porque não fica claro qual das variáveis aparecendo na expressão que deve ser entendida como sendo a variável usada para definir a função. Uma solução para esse problema é ter uma notação em que essa variável é tornada explícita. Por exemplo, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida

[4]Uma exceção importante são livros-texto de Probabilidade e Estatística, em que o conjunto S é um *espaço amostral* — onde se definem probablidades para certos subconjuntos, chamados *eventos* — e as funções $x : S \to \mathbb{R}$, $y : S \to \mathbb{R}$ (normalmente denotadas por letras maiúsculas X, Y) são chamadas *variáveis aleatórias*.

por $f(x) = x^2 - 3x\cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, escrevemos:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 - 3x\cos x).$$

Mais geralmente, podemos escrever

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathfrak{v}}(\text{alguma expressão}) \tag{17.3}$$

em que $\mathfrak{v}$ é o nome de alguma variável que aparece[5] na expressão entre parênteses. Assim, por exemplo, a fórmula

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(xz^2 - \cos(xyz)\big)$$

denota $g'(z)$, em que g é a função definida por

$$g(z) = xz^2 - \cos(xyz)$$

e x e y são constantes fixadas pelo contexto. Essa notação para derivadas é muito prática porque é muito incoveniente ter que introduzir nomes f, g para todas as funções que aparecem durante um cálculo extenso. Em conjunto com essa notação para derivadas, a notação

$$(\text{alguma expressão})\Big|_{\mathfrak{v}=a}$$

também é conveniente para escrever o valor de uma função em um ponto quando não foi dado um nome para a função. Por exemplo, a expressão

$$\big(x^2 - 3xy\cos(x+y)\big)\Big|_{x=2}$$

denota o valor no ponto 2 da função f definida por $f(x) = x^2 - 3xy\cos(x+y)$, isto é:

$$\big(x^2 - 3xy\cos(x+y)\big)\Big|_{x=2} = 4 - 6y\cos(2+y).$$

18. Regras de derivação: soma, produto e quociente

Na Seção 15 nós calculamos diretamente a partir da definição as derivadas de algumas funções bem simples. Como no caso do cálculo de limites, o cálculo de derivadas de funções mais complicadas é feito pensando nessas funções como se fossem montadas a partir de funções mais simples usando operações tais como soma, produto e quociente. Precisamos então saber como calcular a derivada de uma soma, de um produto e de um quociente.

Teorema 18.1 (derivada da soma). *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$ funções com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $x \in D$ um ponto de acumulação de D. Se f e g são deriváveis no ponto x, então $f + g$ também é derivável no ponto x e:*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

[5]Na verdade, a variável pode não aparecer na expressão e nesse caso estamos tomando a derivada de uma função constante.

Demonstração. Temos

$$\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h},$$

para todo $h \neq 0$ tal que $x+h \in D$. Tomando o limite quando $h \to 0$ dos dois lados dessa igualdade e usando o fato que o limite da soma é a soma dos limites, obtemos a conclusão. □

Antes de tratar o caso da derivada do produto, consideramos um caso mais simples de produto, em que um dos fatores é uma constante.

Definição 18.2 (produto de função por constante). Se $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função e $c \in \mathbb{R}$ é um número real, então o *produto de c por f* é a função $cf : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$(cf)(x) = c\big(f(x)\big),$$

para todo $x \in D$.

Teorema 18.3 (derivada de produto por constante). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Seja $x \in D$ um ponto de acumulação de D e seja $c \in \mathbb{R}$. Se f é derivável no ponto x, então cf também é derivável no ponto x e:*

$$(cf)'(x) = cf'(x).$$

Demonstração. Temos:

$$\frac{(cf)(x+h)-(cf)(x)}{h}=c\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

para todo $h \neq 0$ tal que $x+h \in D$. Tomando o limite quando $h \to 0$ dos dois lados dessa igualdade e usando o fato que o limite do produto é o produto dos limites, obtemos a conclusão. □

Teorema 18.4 (derivada do produto). *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$ funções com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $x \in D$ um ponto de acumulação de D. Se f e g são deriváveis no ponto x, então fg também é derivável no ponto x e:*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{18.1}$$

Demonstração. Temos

$$\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h}=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

e portanto

$$\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h}=g(x+h)\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}, \tag{18.2}$$

para todo $h \neq 0$ tal que $x + h \in D$. A conclusão é obtida tomando o limite quando $h \to 0$ dos dois lados da igualdade em (18.2), tendo em mente que a continuidade da função g no ponto x (Teorema 15.7) implica que $\lim_{h\to 0} g(x + h) = g(x)$. □

A fórmula (18.1) para a derivada do produto de duas funções pode ser memorizada de forma prática usando a seguinte frase: "a derivada do produto é igual à derivada da primeira função vezes a segunda, mais a primeira função vezes a derivada da segunda".

Antes de obter uma fórmula para a derivada de um quociente qualquer, consideramos quocientes da forma $\frac{1}{f}$.

Teorema 18.5 (derivada da recíproca). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $x \in D$ um ponto de acumulação de D. Se $f(t) \neq 0$ para todo $t \in D$ e se f é derivável no ponto x, então a função $\frac{1}{f}$ também é derivável no ponto x e:*

$$\Big(\frac{1}{f}\Big)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

Demonstração. Temos

$$\Big(\frac{1}{f}\Big)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \, \frac{1}{f(x+h)f(x)},$$

e a conclusão é obtida notando que a continuidade de f no ponto x (Teorema 15.7) implica que $\lim_{h\to 0} f(x + h)$ é igual a $f(x)$. □

Corolário 18.6 (derivada do quociente). *Sejam*

$$f : D \to \mathbb{R} \quad e \quad g : D \to \mathbb{R}$$

funções com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $x \in D$ um ponto de acumulação de D. Se $g(t) \neq 0$, para todo $t \in D$, e se f e g são deriváveis no ponto x então $\frac{f}{g}$ é derivável no ponto x e:

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Demonstração. Note que $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$ e use os Teoremas 18.4 e 18.5. □

No Teorema 18.5 e no Corolário 18.6 a hipótese de que a função que aparece no denominador nunca se anula só é necessária se queremos que o domínio do quociente seja o mesmo domínio das funções dadas. As conclusões do Teorema 18.5 e do Corolário 18.6 são válidas mesmo sem essa hipótese, já que podemos considerar as restrições das funções envolvidas para o conjunto dos pontos em que o denominador é não nulo. O único cuidado a ser tomado é que o ponto em que calculamos a derivada tem que pertencer a esse domínio reduzido e ser um ponto de acumulação dele. Na seção a seguir discutimos a relação entre derivadas e restrições de funções.

19. Derivadas e restrição de funções

A restrição de uma função derivável num ponto é ainda derivável nesse ponto e a derivada da restrição é igual à derivada da função original. Esse é o conteúdo do resultado simples a seguir.

TEOREMA 19.1 (derivada da restrição). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Seja $S \subset D$ e seja $x \in S$ um ponto de acumulação de S. Nesse caso, $x \in D$ e x é um ponto de acumulação de D. Além do mais, se f é derivável no ponto x, então $f|_S$ também é derivável no ponto x e $(f|_S)'(x) = f'(x)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere a função $g : D \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x},$$

para todo $t \in D$ com $t \neq x$. A derivabilidade de f em x nos dá que o limite de g em x existe e é igual a $f'(x)$. A derivada de $f|_S$ no ponto x é, por definição, o limite em x da restrição de g a $S \setminus \{x\}$. Segue então do Teorema 2.2 que $f|_S$ é derivável no ponto x e que $(f|_S)'(x)$ é igual a $f'(x)$. □

A recíproca do Teorema 19.1 não vale em geral, isto é, não é verdade em geral que se a restrição $f|_S$ é derivável no ponto x, então f também é derivável no ponto x. No entanto, essa recíproca vale em uma situação importante: quando S contém todos os pontos de D que estão próximos de x. A situação é similar àquela que ocorre com limites (Teorema 2.6).

TEOREMA 19.2 (a derivada de f no ponto x só depende dos valores que f assume perto de x). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $x \in D$ um ponto de acumulação de D. Seja S um subconjunto de D com a seguinte propriedade: existe $r > 0$ tal que para todo $t \in D$:*

$$|t - x| < r \Longrightarrow t \in S.$$

Nesse caso, x também é um ponto de acumulação de S. Além do mais, f é derivável no ponto x se, e somente se, $f|_S$ é derivável no ponto x. Em virtude do Teorema 19.1, as derivadas $f'(x)$ e $(f|_S)'(x)$ são iguais, se existirem.

DEMONSTRAÇÃO. Consideramos a função $g : D \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$ definida na demonstração do Teorema 19.1. Se $f|_S$ é derivável no ponto x, então a restrição de g a $S \setminus \{x\}$ possui limite no ponto x e esse limite é igual a $(f|_S)'(x)$. Como, para todo $t \in D \setminus \{x\}$, vale que

$$0 < |t - x| < r \Longrightarrow t \in S \setminus \{x\},$$

o Teorema 2.6 nos dá que g possui limite no ponto x e que esse limite é igual a $(f|_S)'(x)$ também. Logo f é derivável no ponto x e $f'(x) = (f|_S)'(x)$. □

20. Derivada das funções trigonométricas

Começamos calculando as derivadas das funções seno e cosseno. A derivada da função seno num ponto $x \in \mathbb{R}$ é dada por:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}x\cos h+\cos x\operatorname{sen}h-\operatorname{sen}x}{h}\\ &= \operatorname{sen}x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h}.\end{aligned}$$

Sabemos que (Teorema 7.10)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h}=1$$

e além disso:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{h(\cos h+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h+1)}\\ &= -\lim_{h\to 0}\Big(\frac{\operatorname{sen}h}{h}\Big)^2\frac{h}{\cos h+1} = -1^2\,\frac{0}{2}=0.\end{aligned}$$

Assim

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}=\cos x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

O cálculo da derivada da função cosseno num ponto $x \in \mathbb{R}$ procede de forma similar:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}h-\cos x}{h}\\ &= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\operatorname{sen}x\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h}.\end{aligned}$$

Como vimos acima

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h}=1 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0$$

e portanto

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\operatorname{sen}x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Os cálculos acima demonstram o seguinte resultado.

Teorema 20.1 (derivada de seno e cosseno). *As funções seno e cosseno são deriváveis no ponto x e suas derivadas são dadas por*

$$\operatorname{sen}' x=\cos x \quad e \quad \cos' x=-\operatorname{sen}x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. □

Usando agora o Teorema 20.1 e a regra da derivada do quociente, obtemos por um cálculo direto as derivadas das outras funções trigonométricas.

Teorema 20.2 (derivadas das outras funções trigonométricas). *Para qualquer* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $\cos x \neq 0$, *temos que a função tangente e a função secante são deriváveis no ponto* x *e suas derivadas são dadas por:*

$$\operatorname{tg}' x = \sec^2 x \quad e \quad \sec' x = \operatorname{tg} x \sec x.$$

Além do mais, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $\operatorname{sen} x \neq 0$, *temos que a função cotangente e a função cossecante são deriváveis no ponto* x *e suas derivadas são dadas por:*

$$\operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cosec}^2 x \quad e \quad \operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x.$$

Demonstração. Segue do Teorema 20.1 e do Corolário 18.6. □

21. Derivada da exponencial e do logaritmo

Começamos calculando a derivada da função logaritmo na base a, em que $a > 0$ e $a \neq 1$. Dado $x > 0$, temos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a\Big(\frac{x+h}{x}\Big) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a\Big(1 + \frac{h}{x}\Big).$$

Usando a substituição de variáveis $t = \frac{h}{x}$ e mudando a base do logaritmo (Teorema 11.19) obtemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{xt\ln a} \ln(1+t) = \frac{1}{x\ln a},$$

em que a última igualdade segue do limite fundamental do logaritmo (Teorema 12.6). Nós provamos então o seguinte resultado.

Teorema 21.1 (derivada do logaritmo). *Dado um número real positivo* a *com* $a \neq 1$, *temos que a função* $\log_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *é derivável no ponto* x *e*

$$\log_a' x = \frac{1}{x\ln a},$$

para todo $x > 0$. □

Corolário 21.2 (derivada do logaritmo neperiano). *A função logaritmo neperiano* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *é derivável no ponto* x *e*

$$\ln' x = \frac{1}{x},$$

para todo $x > 0$. □

Seja agora $a > 0$ e vamos calcular a derivada da função $f(x) = a^x$ num ponto $x \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \Big(\frac{a^h - 1}{h}\Big) = a^x \lim_{h\to 0} \frac{e^{h\ln a} - 1}{h}.$$

Vamos usar agora a substituição de variáveis $t = h\ln a$; para isso, devemos supor $a \neq 1$ para garantir que $t \neq 0$ sempre que $h \neq 0$. Temos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{t\to 0} \frac{(e^t - 1)\ln a}{t} = a^x \ln a,$$

em que na última igualdade usamos o limite fundamental da exponencial (Teorema 12.6). Note que para $a = 1$ temos também:

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0 = a^x \ln a.$$

Nós provamos então o seguinte resultado.

Teorema 21.3 (derivada da exponencial). *Dado $a > 0$, temos que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é derivável no ponto x e*

$$f'(x) = a^x \ln a,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, se $a = e$, então $f'(x) = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. □

22. Regra da cadeia

A regra da cadeia é o método que se usa para calcular a derivada da composição de duas funções. Começamos pelo enunciado e demonstração e depois veremos alguns exemplos. Alguns leitores podem preferir inicialmente pular a demonstração e olhar primeiro o Exemplo 22.2 e a discussão que aparece na Observação 22.3, que dá uma intuição melhor sobre o que está acontecendo na demonstração.

Teorema 22.1 (regra da cadeia). *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : E \to \mathbb{R}$ funções com $D \subset \mathbb{R}$ e $E \subset \mathbb{R}$. Suponha que a imagem de f esteja contida no domínio E de g. Seja $x \in D$ um ponto de acumulação de D e suponha que $f(x)$ seja um ponto de acumulação de E. Se f é derivável no ponto x e g é derivável no ponto $f(x)$, então a função composta $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto x e:*

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) f'(x).$$

Demonstração. Temos que

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{t\to x} \varphi(t),$$

em que $\varphi : D \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$\varphi(t) = \frac{(g \circ f)(t) - (g \circ f)(x)}{t - x},$$

para todo $t \in D$ com $t \neq x$. Se $t \in D \setminus \{x\}$ satisfaz $f(t) \neq f(x)$, podemos escrever

$$\varphi(t) = \frac{g\big(f(t)\big) - g\big(f(x)\big)}{f(t) - f(x)} \, \frac{f(t) - f(x)}{t - x}. \tag{22.1}$$

Nós gostaríamos de calcular o limite $\lim_{t\to x} \varphi(t)$ usando a igualdade (22.1), notando que o primeiro fator do lado direito da igualdade tende a $g'\big(f(x)\big)$ e o segundo fator tende a $f'(x)$ quando $t \to x$. A dificuldade é que a igualdade (22.1) não vale para todo t no domínio de φ, mas apenas para os pontos t no domínio de φ tais que $f(t) \neq f(x)$. Essa dificuldade desapareceria se fosse o caso que $f(t) \neq f(x)$ para todo $t \in D$ com $t \neq x$ próximo de x (pelo Teorema 2.6), mas isso não é necessariamente verdade. Existem duas formas de resolver esse problema: uma é tratar separadamente[6] os casos $f(t) = f(x)$ e $f(t) \neq f(x)$ e usar o Teorema 2.8. Nós vamos resolver o problema de outra forma: consideramos a função $\psi : E \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(u) = \frac{g(u) - g\big(f(x)\big)}{u - f(x)},$$

para todo $u \in E$ com $u \neq f(x)$ e por $\psi(u) = g'\big(f(x)\big)$, se $u = f(x)$. Note que ao definirmos $\psi(u) = g'\big(f(x)\big)$ para $u = f(x)$, estamos fazendo com que a função ψ seja contínua no ponto $f(x)$; de fato:

$$\lim_{u \to f(x)} \psi(u) = \lim_{u \to f(x)} \frac{g(u) - g\big(f(x)\big)}{u - f(x)} = g'\big(f(x)\big) = \psi\big(f(x)\big).$$

Sendo ψ contínua no ponto $f(x)$, o item (b) do Teorema 6.3 nos dá

$$\lim_{t \to x} (\psi \circ f)(t) = \psi\big(f(x)\big) = g'\big(f(x)\big), \tag{22.2}$$

já que $\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$, isto é, f é contínua no ponto x (Teorema 15.7). Agora note que

$$\varphi(t) = \psi\big(f(t)\big) \, \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \tag{22.3}$$

para todo $t \in D$ com $t \neq x$; de fato, (22.3) segue de (22.1) se $f(t) \neq f(x)$ e, para $f(t) = f(x)$, notamos que ambos os lados de (22.3) são nulos. A demonstração do teorema termina agora tomando o limite quando $t \to x$ dos dois lados da igualdade (22.3) e usando (22.2). $\square$

Exemplo 22.2 (aplicações da regra da cadeia). Vejamos alguns exemplos comuns de aplicação da regra da cadeia. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$, $x \in D$ um ponto de acumulação de D e suponha que f é derivável no ponto x. Usando a regra da cadeia e as derivadas das funções seno e cosseno (Teorema 20.1) obtemos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{sen}\big(f(x)\big) = \cos\big(f(x)\big) f'(x),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos\big(f(x)\big) = -\operatorname{sen}\big(f(x)\big) f'(x).$$

[6] Mais precisamente, escrevemos $D \setminus \{x\} = D_1 \cup D_2$, em que D_1 é o conjunto dos pontos $t \in D \setminus \{x\}$ tais que $f(t) = f(x)$ e D_2 é o conjuntos dos pontos $t \in D$ tais que $f(t) \neq f(x)$. Se não é verdade que $f(t) \neq f(x)$ para todo $t \in D \setminus \{x\}$ próximo de x, então x é ponto de acumulação de D_1. Nesse caso podemos calcular o limite $\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ apenas com $t \in D_1$ e concluir que $f'(x) = 0$. Usando o Teorema 2.8 mostra-se agora que $\lim_{t \to x} \varphi(t) = 0 = g'\big(f(x)\big) f'(x)$. Para isso, nota-se que para $t \in D_1$ vale que $\varphi(t) = 0$ e para $t \in D_2$ vale a igualdade (22.1).

Na primeira igualdade estamos derivando a função composta $\operatorname{sen} \circ f$ no ponto x e na segunda estamos derivando a função $\cos \circ f$ no ponto x. Usando a derivada da função exponencial (Teorema 21.3), obtemos também

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, e^{f(x)} = e^{f(x)} f'(x)$$

e, se a imagem de f está contida em $]0, +\infty[$, usamos a derivada do logaritmo (Corolário 21.2) junto com a regra da cadeia e concluímos que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln\big(f(x)\big) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

A regra do tombo (Teorema 15.6) também pode ser combinada com a regra da cadeia e nos dá

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)^n = n\big(f(x)\big)^{n-1} f'(x),$$

para qualquer inteiro positivo n.

Observação 22.3 (regra da cadeia e notação de Leibniz). Sejam x, y e z quantidades (tomando valores reais) associadas a um certo sistema (veja Seção 17). Suponha que as quantidades y e x estejam relacionadas por uma função f e que as quantidades z e y estejam relacionadas por uma função g, isto é, $y = f(x)$ e $z = g(y)$. Temos nesse caso que a função composta $g \circ f$ é a função que relaciona diretamente as quantidades z e x, isto é, $z = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$. Se f for derivável no ponto x e g for derivável no ponto $y = f(x)$, a regra da cadeia nos dá que $g \circ f$ é derivável no ponto x e que

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) f'(x) = g'(y) f'(x) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

isto é, usando a notação de Leibniz para taxa de variação entre quantidades relacionadas, a regra da cadeia nos diz simplesmente que podemos cancelar o $\mathrm{d}y$ como se estivéssemos trabalhando com uma fração genuína:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Note que, usando essa linguagem de quantidades relacionadas, a igualdade (22.1) que apareceu na demonstração da regra da cadeia nos diz simplesmente que

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{22.4}$$

e a demonstração rigorosa da regra da cadeia consiste então basicamente em tomar o limite quando Δx tende a zero dos dois lados dessa igualdade, notando que Δy também tende a zero quando Δx tende a zero (pela continuidade de f no ponto x, que segue da derivabilidade). O que torna a demonstração rigorosa tecnicamente um pouco envolvida é o fato que a igualdade (22.4) na verdade só vale se $\Delta y \neq 0$, sendo que é possível que Δy assuma o valor zero enquanto Δx tende a zero mantendo-se diferente de zero. Mas, a menos desse detalhe, a demonstração da regra da cadeia é só um cancelamento do Δy junto com uma passagem ao limite quando $\Delta x \to 0$, o que explica o fato que em notação de Leibniz ela apareça apenas como um cancelamento do $\mathrm{d}y$.

Usando a regra da cadeia e as derivadas das funções exponencial e logaritmo é fácil generalizar a regra do tombo (Teorema 15.6) para expoentes arbitrários. Começamos considerando apenas bases positivas, sem restrição sobre o expoente.

Teorema 22.4 (regra do tombo, expoente qualquer). *Seja $b \in \mathbb{R}$ e considere a função $f : \left]0, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^b$, para todo $x > 0$. Temos que f é derivável no ponto x e*

$$f'(x) = bx^{b-1}, \tag{22.5}$$

para todo $x > 0$.

Demonstração. Note que

$$f(x) = e^{b \ln x}$$

para qualquer $x > 0$ e aí usando a regra da cadeia e as derivadas das funções exponencial e logaritmo, obtemos:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, e^{b \ln x} = e^{b \ln x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(b \ln x) = e^{b \ln x}\frac{b}{x} = \frac{bx^b}{x} = bx^{b-1}. \qquad \square$$

Observação 22.5 (regra do tombo em $x = 0$). Quando $b \geq 0$, podemos incluir o zero no domínio da função f considerada no Teorema 22.4, isto é, podemos definir $f : \left[0, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ fazendo $f(x) = x^b$, para todo $x \geq 0$. Se $b = 0$, a função f é constante e igual a 1 e portanto sua derivada é nula em qualquer ponto, mas a fórmula (22.5) não vale em $x = 0$, já que 0^{-1} não está definido. Suponha então $b > 0$. A demonstração que demos do Teorema 22.4 não funciona para $x = 0$, mas podemos calcular $f'(0)$ diretamente pela definição:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^b}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^{b-1}.$$

Temos (usando o Teorema 11.11 e o Corolário 11.12):

$$\begin{aligned} b > 1 &\Longrightarrow f'(0) = \lim_{h \to 0^+} h^{b-1} = 0 = b \cdot 0^{b-1}, \\ b = 1 &\Longrightarrow f'(0) = 1 = b \cdot 0^{b-1}, \\ 0 < b < 1 &\Longrightarrow f'(0) = \lim_{h \to 0^+} h^{b-1} = +\infty \Longrightarrow f \text{ não é derivável no ponto } 0. \end{aligned}$$

Assim, vemos que a fórmula (22.5) também vale em $x = 0$ para $b \geq 1$. Se $0 < b < 1$, poderia-se dizer que a fórmula "vale" no sentido de que ambos os lados da igualdade não estão definidos.

Para expoentes racionais com denominador ímpar é possível definir a função potência também para bases negativas. Consideramos esse caso agora.

Teorema 22.6 (regra do tombo, base negativa). *Seja $q \in \mathbb{Q}$ um número racional da forma $q = \frac{m}{n}$, em que $m, n \in \mathbb{Z}$ e o denominador n é ímpar. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^q$, para todo $x \neq 0$. Temos que f é derivável no ponto x e*

$$f'(x) = qx^{q-1}, \tag{22.6}$$

para todo $x \neq 0$.

Demonstração. Se $x > 0$, o resultado segue do Teorema 22.4, tendo em mente que a derivada de f no ponto x só depende dos valores que f assume perto de x (Teorema 19.2). Se $x < 0$, então $-x > 0$ e daí:

$$f'(-x) = q(-x)^{q-1}.$$

Supondo primeiro que m é ímpar, temos $f(x) = -f(-x)$ e aí usando a regra da cadeia obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(-f(-x)\big) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(-x) = -f'(-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x) \\ &= f'(-x) = q(-x)^{q-1} = qx^{q-1}, \end{aligned}$$

em que a última igualdade segue do fato que $q - 1 = \frac{m-n}{n}$ tem numerador par. Finalmente, se m é par temos $f(-x) = f(x)$ e daí

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(-x) = f'(-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x) = -f'(-x) = -q(-x)^{q-1} = qx^{q-1},$$

em que a última igualdade segue do fato que $q - 1 = \frac{m-n}{n}$ tem numerador ímpar. $\square$

Observação 22.7 (base nula de novo). No enunciado do Teorema 22.6, se $q \geq 0$ poderíamos incluir o zero no domínio de f, isto é, poderíamos definir f em toda a reta real. Nesse caso, raciocinando como na Observação 22.5, vê-se que a igualdade (22.6) vale em $x = 0$ se $q \geq 1$ e que para $0 < q < 1$ a função f não é derivável em $x = 0$ e nem o lado direito de (22.6) está definido em $x = 0$. Para $q = 0$, evidentemente f é constante e igual a 1 e sua derivada em qualquer ponto é nula, mas o lado direito de (22.6) continua não estando definido em $x = 0$.

Exemplo 22.8 (cosseno, cotangente, cossecante). Usando a regra da cadeia podemos entender melhor a relação entre as derivadas das funções cosseno, cotangente, cossecante e as derivadas das funções seno, tangente e secante. De fato, temos que

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right), \quad \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{e} \quad \operatorname{cosec} x = \sec\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)$$

e usando a regra da cadeia obtemos

$$\begin{aligned}
\cos' x &= \operatorname{sen}'\big(\tfrac{\pi}{2} - x\big)\, \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\tfrac{\pi}{2} - x\big) = -\cos\big(\tfrac{\pi}{2} - x\big) = -\operatorname{sen} x,\\
\operatorname{cotg}' x &= \operatorname{tg}'\big(\tfrac{\pi}{2} - x\big)\, \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\tfrac{\pi}{2} - x\big) = -\sec^2\big(\tfrac{\pi}{2} - x\big) = -\operatorname{cosec}^2 x,\\
\operatorname{cosec}' x &= \sec'\big(\tfrac{\pi}{2} - x\big)\, \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\tfrac{\pi}{2} - x\big) = -\operatorname{tg}\big(\tfrac{\pi}{2} - x\big)\sec\big(\tfrac{\pi}{2} - x\big)\\
&= -\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x.
\end{aligned}$$

23. Exemplos: usando as regras de derivação

Tendo as regras para derivada da soma (Teorema 18.1), do produto por constante (Teorema 18.3), do produto (Teorema 18.4), do quociente (Corolário 18.6), a regra do tombo (Teoremas 22.4 e 22.6 e Observações 22.5 e 22.7), a regra da cadeia (Teorema 22.1) e as fórmulas para as derivadas das funções trigonométricas (Teoremas 20.1 e 20.2), logarítmicas (Teorema 21.1) e exponenciais (Teorema 21.3) em mãos já somos capazes de calcular a derivada, justificando os passos, de qualquer função expressa por uma fórmula envolvendo essas funções e operações. Para completar o nosso arsenal de ferramentas falta apenas um método para calcular derivadas de funções inversas, o qual estudaremos na Seção 24 a seguir. Antes disso, vamos trabalhar em alguns exemplos.

Exemplo 23.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \operatorname{sen}^3\big(e^x \cos(x^2) + x^3\big) + x^{\frac{5}{3}},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. A regra da cadeia nos dá:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x^2) = -\operatorname{sen}(x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,x^2 = -2x\operatorname{sen}(x^2).$$

Usando a regra da derivada da soma e do produto, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(e^x\cos(x^2) + x^3\big) &= \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x\Big)\cos(x^2) + e^x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3\\
&= e^x\cos(x^2) - 2xe^x\operatorname{sen}(x^2) + 3x^2.
\end{aligned}$$

Usando agora a regra da cadeia repetidamente vem:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sen}^3\big(e^x\cos(x^2) + x^3\big) &= 3\operatorname{sen}^2\big(e^x\cos(x^2) + x^3\big)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sen}\big(e^x\cos(x^2) + x^3\big)\\
&= 3\operatorname{sen}^2\big(e^x\cos(x^2) + x^3\big)\cos\big(e^x\cos(x^2) + x^3\big)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(e^x\cos(x^2) + x^3\big)\\
&= 3\operatorname{sen}^2\big(e^x\cos(x^2) + x^3\big)\cos\big(e^x\cos(x^2) + x^3\big)\big(e^x\cos(x^2)\\
&\qquad - 2xe^x\operatorname{sen}(x^2) + 3x^2\big).
\end{aligned}$$

Finalmente, a derivada de f é dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{sen}^3\big(e^x\cos(x^2)+x^3\big) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,x^{\frac{5}{3}} \\ &= 3\,\mathrm{sen}^2\big(e^x\cos(x^2)+x^3\big)\cos\big(e^x\cos(x^2)+x^3\big)\big(e^x\cos(x^2) \\ &\qquad\qquad - 2xe^x\mathrm{sen}(x^2)+3x^2\big) + \frac{5}{3}\,x^{\frac{2}{3}}, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 23.2. Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \mathrm{tg}\Big(\frac{x^2}{\sqrt{3x+1}}\Big),$$

para todo $x \in D$, em que D é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que $3x+1 > 0$ e $\cos\big(\frac{x^2}{\sqrt{3x+1}}\big) \neq 0$. Temos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{3x+1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x+1) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}.$$

Daí, usando a regra do quociente vem:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{x^2}{\sqrt{3x+1}} &= \frac{\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2\big)\sqrt{3x+1} - x^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{3x+1}}{3x+1} = \frac{2x\sqrt{3x+1} - \frac{3x^2}{2\sqrt{3x+1}}}{3x+1} \\ &= \frac{4x(3x+1)-3x^2}{2(3x+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{9x^2+4x}{2(3x+1)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

em que a penúltima igualdade é obtida multiplicando a fração em cima e embaixo por $2\sqrt{3x+1}$. A derivada de f é então dada por

$$f'(x) = \sec^2\Big(\frac{x^2}{\sqrt{3x+1}}\Big)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{x^2}{\sqrt{3x+1}} = \frac{9x^2+4x}{2(3x+1)^{\frac{3}{2}}}\,\sec^2\Big(\frac{x^2}{\sqrt{3x+1}}\Big),$$

para todo $x \in D$.

Exemplo 23.3 (função elevado a função). O cálculo de derivadas de funções da forma $h(x) = f(x)^{g(x)}$, em que f toma valores positivos, pode ser realizado escrevendo h na forma $h(x) = e^{g(x)\ln f(x)}$. Por exemplo, vamos calcular a derivada da função $h : \,]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = x^{\mathrm{sen}\,x},$$

para todo $x > 0$. Temos que $h(x) = e^{\mathrm{sen}\,x\ln x}$, para todo $x > 0$ e portanto usando a regra da cadeia e a regra do produto, obtemos

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{\mathrm{sen}\,x\ln x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{sen}\,x\ln x\big) = x^{\mathrm{sen}\,x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sen}\,x\ln x) \\ &= x^{\mathrm{sen}\,x}\Big(\cos x\ln x + \frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\Big), \end{aligned}$$

para todo $x > 0$.

24. Derivada de funções inversas

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função injetora com $D \subset \mathbb{R}$ e seja

$$g = f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$$

a função inversa da função bijetora $f : D \to \mathrm{Im}(f)$, em que $\mathrm{Im}(f)$ denota a imagem de f. Temos que

$$g\big(f(x)\big) = x,$$

para todo $x \in D$. Se $x \in D$ for um ponto de acumulação de D e se soubermos que f é derivável no ponto x e que g é derivável[7] no ponto $f(x)$, então podemos usar a regra da cadeia para obter:

$$(g \circ f)'(x) = 1 \Longrightarrow g'\big(f(x)\big)f'(x) = 1.$$

Essa observação simples demonstra o seguinte resultado.

Teorema 24.1 (derivada da inversa). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função injetora com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $x \in D$ um ponto de acumulação de D. Denote por $g = f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{R}$ a função inversa de f. Se f for contínua no ponto x, então $y = f(x)$ é um ponto de acumulação de $\mathrm{Im}(f)$. Se f for derivável no ponto x e g for derivável no ponto y, então:*

$$g'(y)f'(x) = 1. \tag{24.1}$$

Em particular, sob essas condições, temos que $f'(x) \neq 0$. □

Exemplo 24.2 (critério para não existência da derivada da inversa). Uma consequência do Teorema 24.1 é que se a derivada $f'(x)$ for igual a zero num certo ponto $x \in D$, então sabemos que a função inversa $g = f^{-1}$ *não* pode ser derivável no ponto $y = f(x)$. Assim, por exemplo, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função dada por $f(x) = x^3$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $f'(0) = 0$ e portanto a função inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, isto é, a função g dada por

$$g(y) = \sqrt[3]{y} = y^{\frac{1}{3}},$$

para todo $y \in \mathbb{R}$, não é derivável no ponto $f(0) = 0$. Nesse exemplo em particular isso não é novidade, pois já havíamos observado que a função potência com expoente em $]0, 1[$ não é derivável em 0 (veja Observação 22.5). Para um exemplo mais interessante, considere a função injetora $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, para todo $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; temos

$$f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\tfrac{\pi}{2} = 0 \quad \text{e} \quad f'\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$

donde segue que a função inversa $g = \operatorname{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é derivável nos pontos $1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $-1 = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

[7] Como $\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$ e $f(t) \neq f(x)$ para todo $t \in D$ com $t \neq x$, segue do item (a) do Teorema 6.3 que $f(x)$ é um ponto de acumulação de $\mathrm{Im}(f)$.

Note que o Teorema 24.1 nos dá uma fórmula para a derivada da função inversa $g = f^{-1}$. De fato, se $y \in \mathrm{Im}(f)$, então segue de (24.1) que

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}$$

desde que f seja derivável no ponto $x = f^{-1}(y)$ e g seja derivável no ponto $y = f(x)$. O que costuma acontecer em exemplos concretos é que a função f é uma função que já sabemos derivar (e já sabemos que ela é derivável), mas não sabemos *a priori* que a função inversa $g = f^{-1}$ é derivável. Por exemplo, se f é a restrição da função seno ao intervalo $\big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$, então sabemos que f é derivável em qualquer ponto $x \in \big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$ e sabemos que $f'(x) = \cos x$, mas não é claro nesse momento em que pontos a função arcoseno é derivável. Como vimos no Exemplo 24.2, o Teorema 24.1 pode ser usado para concluir que a função arcoseno *não é derivável* nos pontos 1 e -1, mas o que seria mais útil é um critério que garante que a função arcoseno *é derivável* em certos pontos. Como vimos, uma condição necessária para se garantir que $g = f^{-1}$ seja derivável num ponto $y = f(x)$ é que $f'(x)$ seja diferente de zero; no entanto, essa condição ainda não é suficiente e veremos a seguir que para garantir que g seja derivável no ponto $y = f(x)$ precisamos de uma hipótese a mais.

Na Observação 24.6 adiante daremos um *insight* melhor sobre a demonstração do Teorema 24.3 abaixo, então alguns leitores podem preferir ler a observação antes da demonstração do teorema.

Teorema 24.3 (derivabilidade da inversa). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função injetora com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $x \in D$ um ponto de acumulação de D. Denote por $g = f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{R}$ a função inversa de f. Se f for contínua no ponto x, então $y = f(x)$ é um ponto de acumulação de $\mathrm{Im}(f)$. Se f for derivável no ponto x e* se a função g for contínua no ponto y, *então:*

$$g \text{ é derivável no ponto } y \Longleftrightarrow f'(x) \neq 0.$$

Em vista do Teorema 24.1, se $f'(x) \neq 0$, então a derivada de g no ponto y é dada por:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}. \tag{24.2}$$

Demonstração. Já vimos que se g for derivável no ponto y, então $f'(x) \neq 0$ (Teorema 24.1). No que segue, supomos que $f'(x) \neq 0$ e provamos que g é derivável no ponto y. Como f é derivável no ponto x, temos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - y}{h} = f'(x).$$

Vamos usar a substituição de variáveis $h = g(y+k) - g(y) = g(y+k) - x$; como g é contínua no ponto y, temos que $\lim_{k \to 0} \big(g(y+k) - x\big) = g(y) - x = 0$, isto é, h tende a zero quando k tende a zero. Além do mais, como g é injetora, se

$k \neq 0$, então $h = g(y+k) - g(y) \neq 0$. Daí, usando o item (a) do Teorema 6.3, obtemos:

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - y}{h} = \lim_{k \to 0} \frac{f\big(g(y+k)\big) - y}{g(y+k) - x} &= \lim_{k \to 0} \frac{(y+k) - y}{g(y+k) - g(y)} \\ &= \lim_{k \to 0} \frac{k}{g(y+k) - g(y)}. \end{aligned}$$

Como $f'(x) \neq 0$, concluímos que

$$\lim_{k \to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k} = \frac{1}{f'(x)},$$

ou seja, g é derivável no ponto $y = f(x)$ e $g'(y)$ é igual a $\frac{1}{f'(x)}$. $\square$

Corolário 24.4. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e injetora cujo domínio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo com mais de um ponto. Se f for derivável num ponto $x \in I$ e $f'(x) \neq 0$, então a função inversa $g = f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto $y = f(x)$ e a derivada $g'(y)$ é dada por* (24.2).

Demonstração. Segue dos Teoremas 5.8 e 24.3. $\square$

Exemplo 24.5 (derivada não nula, mas inversa não derivável). A função injetora $f : D \to \mathbb{R}$ discutida no Exemplo 5.9 é derivável em todo ponto de seu domínio e $f'(x) = 1$, para todo $x \in D$. No entanto, a sua função inversa não é contínua e portanto não é derivável no ponto 1.

Observação 24.6 (derivada da inversa e notação de Leibniz). Sejam x e y quantidades (tomando valores reais) associadas a um certo sistema (veja Seção 17). Suponha que as quantidades y e x estejam relacionadas por uma função f, isto é, $y = f(x)$. Se a função f é injetora, então a função inversa $g = f^{-1}$ é a função que relaciona x com y, isto é, $x = g(y)$. Se f for derivável no ponto x, então

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

e se g for derivável no ponto y, então:

$$g'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}.$$

A igualdade (24.2) nos diz então que $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ é o recíproco de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, isto é, como no caso da regra da cadeia (Observação 22.3) as expressões $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ e $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ comportam-se como se fossem frações genuínas. Usando essa linguagem de quantidades relacionadas, a demonstração do Teorema 24.3 pode ser resumida assim: se o limite

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

existe e é não nulo, então o limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} \tag{24.3}$$

existe e é igual a $\frac{1}{f'(x)}$. A derivada de g no ponto y é dada pelo limite:

$$g'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}. \tag{24.4}$$

Para concluir que o limite (24.4) também existe e é igual a (24.3), precisamos saber que quando Δy tende a zero então Δx também tende a zero. Esse fato segue justamente da continuidade da função g no ponto y, já que:

$$\Delta x = g(y + \Delta y) - g(y).$$

Exemplo 24.7 (derivada das funções trigonométricas inversas). Como as funções trigonométricas inversas são todas contínuas (Teorema 7.8), podemos facilmente usar o Teorema 24.3 para determinar os pontos em que são deriváveis e calcular as suas derivadas. Por exemplo, temos que a função $\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ é derivável num ponto $y \in [-1, 1]$ se, e somente se, a derivada da função seno no ponto $x = \operatorname{arcsen} y$ é não nula, isto é, se e somente se $\cos x \neq 0$; além do mais, se $\cos x \neq 0$, então:

$$\operatorname{arcsen}' y = \frac{1}{\cos x}.$$

Como arcsen é a inversa da restrição da função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, temos que $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e portanto $\cos x \geq 0$; daí:

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1 - y^2}.$$

Concluímos que arcsen é derivável no ponto y se, e somente se, $-1 < y < 1$ e que

$$\operatorname{arcsen}' y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

para todo $y \in \left]-1, 1\right[$. Vamos agora derivar as outras funções trigonométricas inversas. A função $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável num ponto $y \in \mathbb{R}$ se, e somente se, a derivada da função tangente no ponto $x = \operatorname{arctg} y$ é não nula, isto é, se e somente se $\sec^2 x \neq 0$. Como arctg é a inversa da restrição da função tangente ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e portanto $\cos x > 0$ e $\sec x > 0$. Daí a função arctg é derivável em qualquer ponto $y \in \mathbb{R}$ e:

$$\operatorname{arctg}' y = \frac{1}{\sec^2 x}.$$

Como

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x,$$

concluímos que

$$\operatorname{arctg}' y = \frac{1}{1 + y^2},$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. A função $\operatorname{arcsec} : \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ é derivável num ponto $y \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$ se, e somente se, a derivada da função secante no ponto $x = \operatorname{arcsec} y$ é não nula, isto é, se e somente se, $\operatorname{tg} x \sec x \neq 0$; além do mais, se $\operatorname{tg} x \sec x \neq 0$, então:

$$\operatorname{arcsec}' y = \frac{1}{\operatorname{tg} x \sec x}.$$

Como a função arcsec é a inversa da restrição da função secante ao conjunto $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, temos que $x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ e daí:

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{\sec^2 x - 1} = \sqrt{y^2 - 1}, \quad \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \qquad \text{e}$$

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{\sec^2 x - 1} = -\sqrt{y^2 - 1}, \quad \text{se } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi.$$

Concluímos que arcsec é derivável no ponto $y \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$ se, e somente se, $y \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ e que:

$$\operatorname{arcsec}' y = \frac{1}{y\sqrt{y^2 - 1}}, \quad \text{se } y > 1 \qquad \text{e}$$

$$\operatorname{arcsec}' y = -\frac{1}{y\sqrt{y^2 - 1}}, \quad \text{se } y < -1.$$

Essas duas igualdades podem ser resumidas dizendo que

$$\operatorname{arcsec}' y = \frac{1}{|y|\sqrt{y^2 - 1}},$$

para todo $y \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$. Para calcular agora as derivadas das funções arcocosseno, arcocotangente e arcocosecante, a maneira mais simples é notar que valem as identidades

$$\arccos y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} y,$$

$$\operatorname{arccotg} y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y,$$

$$\operatorname{arccosec} y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec} y$$

donde segue que

$$\arccos' y = -\operatorname{arcsen}' y, \quad \text{para todo } y \in \left]-1, 1\right[,$$

$$\operatorname{arccotg}' y = -\operatorname{arctg}' y, \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arccosec}' y = -\operatorname{arcsec}' y, \quad \text{para todo } y \in \left]-\infty, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[;$$

além do mais, as funções arccos e arccosec não são deriváveis nos pontos 1 e -1.

25. Crescimento e decrescimento: máximos e mínimos

Como vimos na Seção 17, a derivada de uma função f num ponto x nos dá uma medida da taxa de variação instantânea da quantidade $y = f(x)$ em relação à quantidade x. Se a taxa de variação entre duas quantidades y e x é positiva, é de se esperar que quando uma quantidade cresce, a outra também cresce, isto é, que $\Delta x > 0$ implica em $\Delta y > 0$; por outro lado, se a taxa de variação entre duas quantidades y e x é negativa, então é de se esperar que quando uma quantidade cresce, a outra decresce, isto é, que $\Delta x > 0$ implica em $\Delta y < 0$. Nesta seção começamos a investigar os enunciados precisos que relacionam o sinal da derivada de uma função f com o crescimento e o decrescimento de f. Esses resultados são preliminares, já que os resultados mais importantes dependem do Teorema do Valor Médio e serão vistos mais adiante (Seção 27). No entanto, esses resultados preliminares já nos dão uma informação crucial sobre a derivada de uma função em um ponto de máximo ou mínimo.

Começamos com um resultado que segue facilmente da definição de derivada e que nos diz como uma função f se comporta em termos de crescimento e decrescimento perto de um ponto x em que $f'(x) \neq 0$. Tal resultado nos diz que se $f'(x) > 0$, então o valor de f aumenta quando nos movemos ligeiramente para a direita de x e diminui quando nos movemos ligeiramente para a esquerda de x; a situação é revertida quando $f'(x) < 0$. Mais precisamente, se $f'(x) > 0$, então o valor de f é maior do que $f(x)$ em pontos ligeiramente para a direita de x e é menor do que $f(x)$ em pontos ligeiramente para a esquerda de x. Como veremos adiante, a afirmação feita nessa última sentença é sutilmente diferente da afirmação de que f é crescente perto de x e em alguns casos um pouco exóticos é possível ter $f'(x) > 0$ sem que f seja crescente perto de x (Example 25.12).

TEOREMA 25.1 (crescimento/decrescimento a partir de um ponto). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $x \in D$ um ponto de acumulação de D. Se f é derivável no ponto x e $f'(x) > 0$, então existe $r > 0$ tal que para qualquer $t \in D$, temos:*

$$x - r < t < x \Longrightarrow f(t) < f(x) \quad e \quad x < t < x + r \Longrightarrow f(x) < f(t). \tag{25.1}$$

Se f é derivável no ponto x e $f'(x) < 0$, então existe $r > 0$ tal que para qualquer $t \in D$, temos:

$$x - r < t < x \Longrightarrow f(t) > f(x) \quad e \quad x < t < x + r \Longrightarrow f(x) > f(t). \tag{25.2}$$

DEMONSTRAÇÃO. Se

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} > 0,$$

então segue do Teorema 10.1 que existe $r > 0$ tal que, para todo $t \in D$ com $t \neq x$, vale que:

$$x - r < t < x + r \Longrightarrow \frac{f(t) - f(x)}{t - x} > 0.$$

Daí, para $x < t < x + r$, temos $t - x > 0$ e portanto $f(t) - f(x) > 0$. Similarmente, se $x - r < t < x$, então $t - x < 0$ e portanto $f(t) - f(x) < 0$. A demonstração do teorema no caso $f'(x) < 0$ é análoga. □

É um pouco tentador concluir a partir do Teorema 25.1 que se $f'(x) \neq 0$, então x não pode ser nem um ponto de máximo nem de mínimo de f. De fato, se $f'(x) > 0$, então parece que x não pode ser um ponto de máximo de f porque f assume valores maiores do que $f(x)$ em pontos ligeiramente para a direita de x e que x não pode ser um ponto de mínimo de f porque f assume valores menores do que $f(x)$ em pontos ligeiramente para a esquerda de x. Por um motivo similar, pareceria a primeira vista que se $f'(x) < 0$, então x não pode ser nem um ponto de máximo nem de mínimo de f. Porém, há um erro nesse raciocínio, como o exemplo a seguir ilustra.

Exemplo 25.2 (pontos de máximo e mínimo em que a derivada não é nula). Considere a função $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, para todo $x \in [1, 2]$. Como f é estritamente crescente, temos que o ponto 1 é um ponto de mínimo estrito e que o ponto 2 é um ponto de máximo estrito de f. Temos $f'(1) = 2 > 0$ e $f'(2) = 4 > 0$. O que deu errado no raciocínio explicado no parágrafo que precede o exemplo? Temos que $f'(2) > 0$ e portanto o Teorema 25.1 nos diz que o valor de f é um pouco maior do que $f(2)$ quando vamos um pouco para a direita do ponto 2, o que supostamente contradiz o fato que 2 é um ponto de máximo de f; só que não há nada no domínio de f para a direita do ponto 2. Similarmente, como $f'(1) > 0$, o Teorema 25.1 nos diz que o valor de f é um pouco menor do que $f(1)$ quando vamos um pouco para a esquerda do ponto 1, o que supostamente contradiz o fato que 1 é um ponto de mínimo de f; só que não há nada no domínio de f para a esquerda do ponto 1.

O erro no raciocínio que fizemos no parágrafo que precede o Exemplo 25.2 está em esquecer que se $x \in D$ é um ponto de acumulação do domínio D de uma função, nem sempre é possível andar ligeiramente para a direita de x e encontrar outro ponto de D e nem sempre é possível andar ligeiramente para a esquerda de x e encontrar outro ponto de D. Porém, com as hipóteses adequadas, esse raciocínio errado pode ser corrigido, como vemos no enunciado a seguir.

Corolário 25.3 (derivada em pontos de máximo e mínimo). *Seja dada uma função $f : D \to \mathbb{R}$ com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $x \in D$ tal que x é ponto de acumulação de $]x, +\infty[\cap D$ e de $]-\infty, x[\cap D$. Se f é derivável no ponto x e se $f'(x) \neq 0$, então x não é nem um ponto de máximo nem de mínimo de f. Em outras palavras, se x é um ponto de máximo ou de mínimo de f e se f é derivável no ponto x, então $f'(x) = 0$.*

Demonstração. Se $f'(x) > 0$, tome $r > 0$ tal que (25.1) vale para todo $t \in D$. Como x é um ponto de acumulação de $]-\infty, x[\cap D$, temos que existe $t \in D$ com $x - r < t < x$ e daí $f(t) < f(x)$, de modo que x não é um ponto de mínimo de f. Similarmente, como x é um ponto de acumulação de $]x, +\infty[\, \cap D$, temos que existe $t \in D$ com $x < t < x + r$ e daí $f(x) < f(t)$, de modo que x não é um ponto de máximo de f. A demonstração do fato que se $f'(x) < 0$, então x não é um ponto nem de máximo nem de mínimo de f é feita de forma análoga, usando (25.2) em vez de (25.1). $\square$

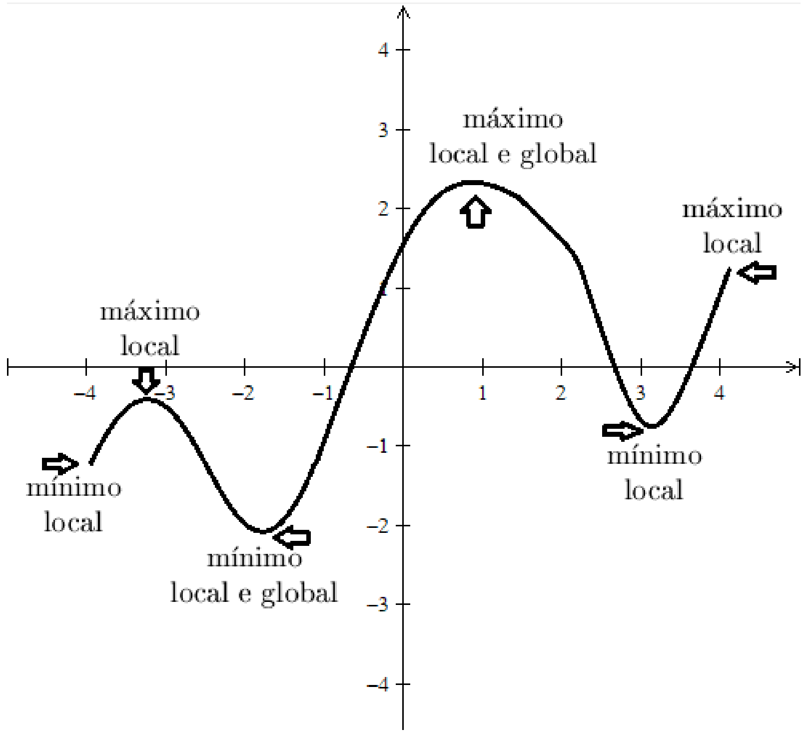
Exemplo 25.4 (ponto de mínimo em que a função não é derivável). A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, possui um ponto de mínimo estrito em 0, mas f não é derivável em 0 (Exemplo 15.8). Assim, a hipótese de que f seja derivável no ponto x é de fato necessária para a validade da última frase que aparece no enunciado do Corolário 25.3.

O Corolário 25.3 nos diz que a derivada de uma função num ponto de máximo ou de mínimo é nula, desde que a função seja derivável nesse ponto e que o domínio da função se acumule no ponto pelos dois lados. Sabemos que a derivada de uma função num ponto só depende dos valores que a função assume perto desse ponto, de modo que para obter a conclusão de que a derivada num ponto é nula não importa o que a função faz longe desse ponto. Esse último fato nos leva a considerar as noções de ponto de máximo e de mínimo local: um ponto x é um ponto de máximo local de uma função f se o valor que f assume em x é maior ou igual ao valor que f assume em pontos próximos a x. Um ponto x que é um ponto de máximo local pode, no entanto, não ser um ponto de máximo da função porque f pode assumir um valor maior do que $f(x)$ em algum ponto longe de x. A seguir apresentamos a definição precisa da noção de ponto de máximo e de mínimo local.

Definição 25.5 (máximos e mínimos locais). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $x \in D$. Dizemos que:

- x é um ponto de *máximo local* de f se existe $r > 0$ tal que x é um ponto de máximo da restrição de f ao conjunto $]x - r, x + r[\, \cap D$;
- x é um ponto de *máximo local estrito* de f se existe $r > 0$ tal que x é um ponto de máximo estrito da restrição de f ao conjunto $]x - r, x + r[\, \cap D$;
- x é um ponto de *mínimo local* de f se existe $r > 0$ tal que x é um ponto de mínimo da restrição de f ao conjunto $]x - r, x + r[\, \cap D$;
- x é um ponto de *mínimo local estrito* de f se existe $r > 0$ tal que x é um ponto de mínimo estrito da restrição de f ao conjunto $]x - r, x + r[\, \cap D$.

A partir de agora, pontos de máximo ou de mínimo (estrito ou não) serão chamados também de pontos de máximo ou de mínimo *global* (estrito ou não), quando queremos enfatizar que não são apenas pontos de máximo ou de mínimo local. Notamos que pontos de máximo ou de mínimo global também são pontos de máximo ou de mínimo local. A figura a seguir ilustra alguns exemplos de pontos de máximo e de mínimo local e global.



Teorema 25.6 (derivada em pontos de máximo e mínimo local). *Seja dada uma função $f : D \to \mathbb{R}$ com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $x \in D$ tal que x é ponto de acumulação de $]x, +\infty[\cap D$ e de $]-\infty, x[\cap D$. Se f é derivável no ponto x e se x é um ponto de máximo local ou de mínimo local de f, então $f'(x) = 0$.*

Demonstração. Pela definição de máximo e de mínimo local, temos que existe $r > 0$ tal que x é um ponto de máximo ou de mínimo da restrição de f a $S =]x - r, x + r[\cap D$. É fácil ver que x é um ponto de acumulação de $]x, +\infty[\cap S$ e de $]-\infty, x[\cap S$. Além do mais, o Teorema 19.1 nos dá que $f|_S$ é derivável no ponto x e que $(f|_S)'(x) = f'(x)$. Daí o Corolário 25.3 garante que $(f|_S)'(x) = 0$ e a conclusão desejada segue. □

Um caso particular muito usado do Teorema 25.6 ocorre quando o domínio da função é um intervalo.

Definição 25.7 (ponto interior de um intervalo). Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, dizemos que um ponto x é um *ponto interior*[8] de I se $x \in I$ e se x não é uma extremidade de I.

Assim, por exemplo, os pontos interiores do intervalo $]3, 6]$ são os pontos do intervalo aberto $]3, 6[$.

[8]Normalmente se define a noção de ponto interior para um subconjunto arbitrário D de $\mathbb{R}$ dizendo que x é um *ponto interior* de D se existe $r > 0$ tal que $]x - r, x + r[$ está contido em D.

Corolário 25.8 (derivada em pontos de máximo e mínimo local para funções em intervalos). *Seja dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$ em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Seja $x \in I$ um ponto interior de I tal que f é derivável no ponto x. Se x é um ponto de máximo local ou de mínimo local de f, então $f'(x) = 0$.*

Demonstração. Segue do Teorema 25.6, notando que se x é um ponto interior de I, então x é um ponto de acumulação tanto de $]-\infty, x[\cap I$ como de $]x, +\infty[\cap I$. □

Exemplo 25.9 (pontos em que a derivada é zero não são necessariamente máximos ou mínimos locais). Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Como f é estritamente crescente e seu domínio é $\mathbb{R}$, vemos que f não possui pontos de máximo local nem pontos de mínimo local. No entanto, a derivada $f'(x) = 3x^2$ se anula em $x = 0$. Esse exemplo mostra que a recíproca do Corolário 25.8 (ou do Teorema 25.6) não é verdadeira. Informalmente, podemos descrever a situação assim: quando uma função possui um ponto de máximo local e nesse ponto o domínio se acumula dos dois lados, então a função tem que subir antes de chegar no ponto e descer depois de passar pelo ponto; nessa troca de subida por descida, a função tem que dar uma paradinha instantânea e daí a derivada se anula. Uma situação similar ocorre num ponto de mínimo local (com descida antes do ponto e subida depois). Porém, a função pode muito bem dar uma paradinha instantânea num ponto sem que esse ponto seja um máximo ou mínimo local. Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ só sobe, mas no ponto $x = 0$ ela dá uma paradinha instantânea antes de continuar subindo.

O Corolário 25.8 é útil para nos fornecer uma lista de possíveis *candidatos* a máximo ou mínimo local para uma função $f : I \to \mathbb{R}$ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. De fato, segue do Corolário 25.8 que se $x \in I$ é um ponto de máximo ou mínimo local de f, então uma das seguintes coisas acontece:

(i) x é uma extremidade de I;

(ii) f não é derivável no ponto x;

(iii) f é derivável no ponto x e $f'(x) = 0$.

Listando todos os pontos $x \in I$ que satisfazem (i), (ii) ou (iii), obtemos uma lista de pontos — em muitos exemplos interessantes, uma lista finita e curta — e sabemos que qualquer ponto de máximo ou mínimo local de f está nessa lista. Não é verdade em geral que todos os pontos dessa lista são máximos ou mínimos locais de f (Exemplo 25.9), mas ter essa lista de candidatos em mãos é útil assim mesmo. Os pontos em que a derivada de uma função é nula são normalmente chamados os *pontos críticos* da função. Quando o intervalo I é aberto e f é derivável em todo ponto de I, temos que não há pontos $x \in I$ satisfazendo (i) ou (ii) e daí os pontos críticos de f são justamente os pontos que constituem a lista de candidatos a máximo ou mínimo local de f. Assim, nesse caso, os pontos críticos são os pontos em que devemos prestar atenção quando estamos buscando os máximos e mínimos locais da função; daí o nome "crítico".

Mais adiante (Seção 27) nós aprenderemos algumas técnicas para descobrir quais pontos críticos de uma função são máximos ou mínimos locais (analisando a variação do sinal da derivada ou o sinal da derivada segunda). Por enquanto, apenas notamos que a lista de candidatos a máximo ou mínimo local — isto é, a lista de pontos x satisfazendo (i), (ii) ou (iii) — pode ser usada para encontrar máximos e mínimos globais de f *quando sabemos que eles existem.* De fato, se sabemos que f possui pontos de máximo global, podemos descobrir quais pontos são esses simplesmente buscando os pontos dessa lista de candidatos em que a função f assume o maior valor; similarmente, para encontrar mínimos globais cuja existência é conhecida, procuramos os pontos da lista de candidatos em que f assume o menor valor. É importante aqui que tenhamos certeza que um ponto de máximo (ou mínimo) global *de fato existe*, pois caso contrário esse método pode nos dar como resultado um ponto que não é de máximo (ou não é de mínimo). Por exemplo, para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$, esse método nos daria o ponto zero como resposta, que não é nem um ponto de máximo nem de mínimo (nem mesmo local). Um resultado útil para garantir a existência de pontos de máximo e mínimo global em alguns casos é o Teorema de Weierstrass (Teorema 14.6) que diz que toda função contínua num intervalo limitado e fechado possui ao menos um ponto de máximo e um ponto de mínimo global. Vejamos agora como esse método para encontrar máximos e mínimos globais funciona num exemplo concreto.

Exemplo 25.10 (buscando máximos e mínimos). Considere a função $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5,$$

para todo $x \in [1, 3]$. Como f é contínua e $[1, 3]$ é um intervalo limitado e fechado, o Teorema de Weierstrass (Teorema 14.6) nos garante que f possui um ponto de máximo global e um ponto de mínimo global. Como f é derivável em todo ponto de seu domínio, o Corolário 25.8 nos diz que todo ponto de máximo ou mínimo local de f é ou uma extremidade do intervalo $[1, 3]$ ou um ponto crítico de f, isto é, um ponto em que a derivada de f é nula. Temos

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2),$$

para todo $x \in [1, 3]$ e portanto os pontos críticos de f são 1 e 2. A nossa lista de candidatos a máximo ou mínimo local de f é formada então pelos pontos:

$$1, \quad 2 \quad \text{e} \quad 3;$$

mais precisamente, todo ponto de máximo ou mínimo local de f está necessariamente nessa lista. Em particular, os pontos de mínimo e de máximo global de f (que sabemos que existem) também estão nessa lista. Calculamos agora o valor de f nos pontos da lista:

$$f(1) = 0, \quad f(2) = -1 \quad \text{e} \quad f(3) = 4.$$

Concluímos então que 2 é um ponto de mínimo global estrito de f e 3 é um ponto de máximo global estrito de f. E o ponto 1? Mais adiante nós aprenderemos como responder essa pergunta usando Cálculo Diferencial, mas por enquanto encontramos uma solução *ad hoc* para o problema: como 1 é raiz do polinômio f, podemos fazer uma divisão de polinômios de $f(x)$ por $x - 1$ e obter:

$$f(x) = (x-1)(2x^2 - 7x + 5) = (x-1)(x-1)(2x-5) = (x-1)^2(2x-5).$$

Temos que, para $x \neq 1$ e próximo de 1, o fator $(x-1)^2$ é positivo e o fator $2x - 5$ é negativo, donde $f(x) < 0$ para $x \neq 1$ próximo de 1; como $f(1) = 0$, concluímos que 1 é um ponto de máximo local estrito de f. Nesse exemplo ocorreu então que todos os candidatos da lista eram de fato ou máximos ou mínimos locais, mas isso é uma coincidência. Como vimos no Exemplo 25.9, pontos críticos nem sempre são máximos ou mínimos locais.

Voltando ao tema da relação entre sinal da derivada e crescimento/decrescimento da função, temos o seguinte resultado.

Teorema 25.11 (sinal da derivada de função monótona). *Seja dada uma função $f : D \to \mathbb{R}$ com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $x \in D$ um ponto de acumulação de D tal que f é derivável no ponto x. Se f é crescente, então $f'(x) \geq 0$ e se f é decrescente, então $f'(x) \leq 0$.*

Demonstração. Se f é crescente, então

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0 \tag{25.3}$$

para todo $t \in D$ com $t \neq x$. De fato, se $t > x$, então $f(t) - f(x) \geq 0$ e $t - x > 0$ e, se $t < x$, então $f(t) - f(x) \leq 0$ e $t - x < 0$. Concluímos então que $f'(x) \geq 0$ tomando o limite quando $t \to x$ dos dois lados da desigualdade (25.3) (Corolário 10.3). Se f for decrescente, então

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq 0$$

para todo $t \in D$ com $t \neq x$ e concluímos que $f'(x) \leq 0$ tomando o limite quando $t \to x$ dos dois lados dessa desigualdade. □

Mais adiante, depois que estudarmos o Teorema do Valor Médio, veremos que para funções definidas em intervalos vale uma recíproca do Teorema 25.11, a saber: uma função definida num intervalo cuja derivada em todo ponto é maior ou igual a zero é crescente e uma função definida em um intervalo cuja derivada em todo ponto é menor ou igual a zero é decrescente.

Concluímos a seção com um exemplo de uma função que tem derivada positiva num ponto, mas não é crescente perto desse ponto.

Exemplo 25.12 (derivada positiva num ponto, mas a função não é crescente perto do ponto). Recordamos que o Teorema 25.1 nos diz que se $f'(x) > 0$, então $f(t)$ é maior do que $f(x)$ para t ligeiramente maior do que x e que $f(t)$ é menor do que $f(x)$ para t ligeiramente menor do que x. À primeira vista, isso pode parecer a mesma coisa que dizer que f é estritamente crescente perto de x, mas não é: dizer que f é estritamente crescente perto de x significa que para t e s próximos de x, se $t < s$ então $f(t) < f(s)$. Note a diferença: em um caso, só comparamos o valor de f em um ponto próximo de x com o valor de f em x e no outro caso comparamos o valor de f em *dois pontos* próximos de x entre si. Vejamos agora um exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(0) > 0$, mas f não é crescente perto de 0. Primeiramente, seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Se $x \in \mathbb{R}$ é não nulo, então todo ponto perto de x também é não nulo e portanto:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \big(g|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\big)'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x^2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{x}\big) = 2x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} + x^2\big(\cos \tfrac{1}{x}\big)\big(-\tfrac{1}{x^2}\big) \\ &= 2x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} - \cos \tfrac{1}{x}. \end{aligned}$$

No ponto zero, temos:

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \operatorname{sen} \tfrac{1}{h} = 0.$$

Veja que a derivada $g'(x)$ da função g num ponto $x \neq 0$ se escreve como a soma de um termo $2x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ que tende a zero quando x tende a zero com um termo $-\cos \frac{1}{x}$ que oscila entre -1 e 1 enquanto x tende a zero. Para x pequeno, o comportamento dominante é o comportamento oscilatório do termo $-\cos \frac{1}{x}$. Consideramos agora a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \tfrac{x}{2} + g(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que

$$f'(0) = \tfrac{1}{2} + g'(0) = \tfrac{1}{2},$$

donde $f'(0) > 0$. Afirmamos que f não é crescente perto de zero, isto é, não existe $r > 0$ tal que a restrição de f ao intervalo $\left]-r, r\right[$ é crescente. Se tal $r > 0$ existisse, seguiria do Teorema 25.11 que $f'(x) \geq 0$ para todo x em $\left]-r, r\right[$. Porém, para qualquer $r > 0$, podemos encontrar x em $\left]0, r\right[$ tal que

$$f'(x) = \tfrac{1}{2} + g'(x) = \tfrac{1}{2} + 2x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} - \cos \tfrac{1}{x} < 0;$$

de fato, basta escolher x em $\left]0, r\right[$ tal que $\cos \frac{1}{x} = 1$. Nesse caso teremos $\operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ e:

$$f'(x) = \tfrac{1}{2} - 1 = -\tfrac{1}{2}.$$

Fazendo uma análise mais qualitativa da situação, temos que $f'(x)$ se escreve como a soma de $\frac{1}{2}$, com um termo que tende a zero quando x tende a zero e mais um termo que oscila entre -1 e 1 enquanto x tende a zero. Daí, para x pequeno, $f'(x)$ oscila aproximadamente entre $-\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$ e portanto fica trocando de sinal. A função f tem então um comportamento oscilatório próximo do ponto zero, alternando entre intervalos de crescimento e intervalos de decrescimento infinitas vezes à medida que nos aproximamos do ponto zero.

26. Função derivada e derivadas de ordem superior

Quando uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável em todos os pontos do seu domínio $D \subset \mathbb{R}$, podemos definir uma nova função f' com esse mesmo domínio D cujo valor em cada ponto de D é a derivada de f nesse ponto. Em certo sentido o que estamos dizendo aqui não é novidade, já que a própria notação $f'(x)$ para a derivada de f no ponto x introduzida na Definição 15.1 sugere que estamos considerando o valor no ponto x de uma função f'. No entanto, naquele momento estávamos considerando apenas a derivada de f em um ponto específico fixado x e até agora não havíamos oficialmente tratado a derivada de uma função f como sendo uma nova função f'. Note que, para que possamos falar em derivabilidade de f em todos os pontos de D, precisamos antes de mais nada que todos os pontos de D sejam pontos de acumulação de D, isto é, precisamos que D não possua pontos isolados. Isso nos leva à seguinte definição.

Definição 26.1 (função derivada). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Dizemos que f é *derivável* se D não possui pontos isolados e se f for derivável em qualquer ponto $x \in D$. Se f for derivável, definimos a *função derivada* $f' : D \to \mathbb{R}$ de f como sendo a função cujo valor em cada ponto $x \in D$ é a derivada $f'(x)$ de f no ponto x.

Observamos que os domínios de funções que costumam aparecer na prática em problemas de Cálculo Diferencial não possuem pontos isolados. Por exemplo, se D é um intervalo com mais de um ponto ou se D é uma união de intervalos com mais de um ponto, então D não possui pontos isolados.

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função derivável, em que D é um subconjunto de $\mathbb{R}$ (sem pontos isolados, de acordo com a definição acima). Se a função $f' : D \to \mathbb{R}$ for derivável num ponto $x \in D$, podemos definir a *derivada segunda* de f no ponto x como sendo a derivada da função f' no ponto x. A derivada segunda de f no ponto x é denotada por $f''(x)$. Se f' é derivável, isto é, se f' é derivável em todo ponto de D, dizemos então que f é *duas vezes derivável* e podemos considerar a *função derivada segunda* $f'' : D \to \mathbb{R}$ que é a função derivada da derivada primeira, ou seja:

$$f'' = (f')'.$$

Se f for duas vezes derivável e a função f'' for derivável num ponto $x \in D$, podemos definir a *derivada terceira* de f no ponto x, denotada $f'''(x)$, como sendo a derivada no ponto x da função f''. Se f'' for derivável, dizemos que f é *três vezes derivável* e definimos a *função derivada terceira* fazendo $f''' = (f'')'$. E assim por diante. Evidentemente, continuar acumulando linhas e mais linhas não é uma notação muito prática se precisarmos falar, por exemplo, da oitava derivada de f. Denotaremos então por $f^{(k)}$ a k-ésima derivada da função f, caso exista. É conveniente definir $f^{(k)} = f$ para $k = 0$, isto é, se derivamos f zero vezes, não fazemos absolutamente nada e obtemos apenas a própria função f. Para ser perfeitamente preciso, a melhor maneira de definir as derivadas de ordem superior de uma função é escrever uma definição recursiva, como fazemos a seguir.

Definição 26.2 (derivadas de ordem superior). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Para um inteiro $k \geq 0$, definimos o significado da frase "*f é k vezes derivável*" e definimos a *função derivada k-ésima* $f^{(k)} : D \to \mathbb{R}$ de f recursivamente através das duas cláusulas abaixo:

- toda função f é zero vezes derivável e a zero-ésima derivada $f^{(0)}$ é igual a f;
- se k é um inteiro não negativo, então f é $k+1$ vezes derivável se D não tiver pontos isolados, f for k vezes derivável e a sua função derivada k-ésima $f^{(k)} : D \to \mathbb{R}$ for uma função derivável; nesse caso, a função derivada $(k+1)$-ésima de f, denotada $f^{(k+1)}$, é a função derivada de $f^{(k)}$.

A k-ésima derivada de f é também chamada a *derivada de ordem k* da função f.

Exemplo 26.3 (função derivável uma vez só). Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = x|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos $f(x) = x^2$, para $x \geq 0$ e $f(x) = -x^2$, para $x \leq 0$. Como a derivada de uma função num ponto só depende dos valores que a função assume perto desse ponto (Teorema 19.2), temos que:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = 2x, \quad \text{se } x > 0,$$

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x^2) = -2x, \quad \text{se } x < 0.$$

A derivada de f no ponto zero pode ser calculada diretamente pela definição:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h|h|}{h} = \lim_{h\to 0}|h| = 0.$$

Assim, f é uma função derivável e a sua função derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f'(x) = 2|x|,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. É fácil ver que, assim como a função módulo, a função f' não é derivável no ponto zero. Assim, a função f não é duas vezes derivável.

Exemplo 26.4 (função derivável apenas duas vezes). Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função dada por $f(x) = x^2|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^3 = 3x^2, \quad \text{se } x > 0,$$

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x^3) = -3x^2, \quad \text{se } x < 0$$

e:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2|h|}{h} = \lim_{h \to 0} h|h| = 0.$$

Assim f é derivável e

$$f'(x) = 3x|x|,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Como no Exemplo 26.3, é fácil ver que f' é derivável uma vez, mas não duas. Daí f é derivável duas vezes, mas não três vezes. Seguindo esse padrão, pode-se ver que se n é um inteiro positivo então a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é derivável n vezes, mas não $n + 1$ vezes.

Se uma função f é k vezes derivável, então as suas derivadas de ordem menor do que k são todas funções deriváveis e portanto são também funções contínuas. No entanto, a k-ésima derivada de f não precisa em geral ser uma função contínua. Há um nome padrão na literatura para funções k vezes deriváveis cuja k-ésima derivada é contínua.

Definição 26.5 (função de classe C^k). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Dado um inteiro não negativo k, dizemos que f é *de classe* C^k se f for k vezes derivável e a derivada k-ésima $f^{(k)} : D \to \mathbb{R}$ for uma função contínua. Se f é k vezes derivável para todo inteiro não negativo k, dizemos que f é *infinitamente derivável* ou *de classe* C^∞.

Evidentemente, se uma função f é k vezes derivável para todo inteiro não negativo k, então a derivada k-ésima $f^{(k)}$ é contínua, para todo inteiro não negativo k. Note que "função de classe C^0" é apenas um novo nome para "função contínua".

Exemplo 26.6 (função derivável que não é de classe C^1). A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida no Exemplo 25.12 é derivável; temos que $g'(0) = 0$ e

$$g'(x) = 2x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} - \cos \tfrac{1}{x},$$

para todo $x \neq 0$. Como $\lim_{x \to 0} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ não existe, segue que $\lim_{x \to 0} g'(x)$ não existe (Exemplo 3.3). Daí a função g' não é contínua no ponto zero e g não é de classe C^1.

Exemplo 26.7 (algumas funções de classe C^∞). Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial, então f é derivável e a função f' também é polinomial. Segue daí que f é k vezes derivável para todo inteiro não negativo k, isto é, que f é de classe C^∞. Como a derivada da função seno é a função cosseno e a derivada da função cosseno é menos a função seno, segue que também as funções seno e cosseno são de classe C^∞. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, também é de classe C^∞, já que $f' = f$.

Às vezes uma função $f : D \to \mathbb{R}$ não é k vezes derivável, mas é k vezes derivável num ponto x específico. Por exemplo, a função f considerada no Exemplo 26.3 não é duas vezes derivável, mas a sua derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em qualquer ponto $x \neq 0$ e portanto podemos falar da derivada segunda $f''(x)$ em qualquer ponto $x \neq 0$. Mas o que exatamente significa dizer que "f é k vezes derivável num ponto x"? Para conseguir definir $f^{(k)}(x)$, não é suficiente que a derivada de ordem $k-1$ exista só no ponto x, porque se $f^{(k-1)}$ estiver definida num ponto só, não dá para derivar $f^{(k-1)}$ mais uma vez. Por outro lado, pedir que f seja $k-1$ vezes derivável — para que a função $f^{(k-1)}$ esteja definida em todo o domínio D — é um tanto excessivo, já que a derivada de uma função num ponto só depende dos valores da função perto do ponto e assim não nos importamos com os valores de $f^{(k-1)}$ longe de x na hora de derivar $f^{(k-1)}$ no ponto x. Para definir $f^{(k)}(x)$, nós precisamos então que $f^{(k-1)}$ esteja definida *perto* de x. Tornamos essa condição mais precisa na Definição 26.10 logo adiante em termos de restrições da função f. Antes disso, enunciamos dois resultados simples relacionando as derivadas de ordem superior de uma função com as derivadas de ordem superior de restrições dessa função.

Teorema 26.8 (derivadas de ordem superior de restrições). *Seja dada uma função $f : D \to \mathbb{R}$ com $D \subset \mathbb{R}$ e seja S um subconjunto de D sem pontos isolados. Para todo inteiro não negativo k, se f é k vezes derivável, então $f|_S$ também é k vezes derivável e a derivada k-ésima da restrição $f|_S$ é igual à restrição a S da derivada k-ésima de f, isto é:*

$$(f|_S)^{(k)} = f^{(k)}|_S.$$

Em particular, se f é de classe C^k, então $f|_S$ é de classe C^k e se f é de classe C^∞, então $f|_S$ é de classe C^∞.

Demonstração. A primeira parte do enunciado é consequência do Teorema 19.1 e a parte sobre funções de classe C^k segue então do Corolário 2.3. □

O próximo resultado nos diz que a propriedade de uma função ser k vezes derivável e a propriedade de uma função ser de classe C^k são propriedades *locais*. Informalmente, uma propriedade local é uma propriedade cuja validade pode ser verificada considerando apenas restrições da função a pequenos intervalos. Por exemplo, continuidade é uma propriedade local: uma função f é contínua se, e somente se, para todo ponto x no seu domínio há um intervalo em torno de x tal que a restrição de f a esse intervalo é contínua. Esse fato segue do Teorema 2.6. Derivabilidade também é uma propriedade local e esse fato segue do Teorema 19.2. Um exemplo de uma propriedade que não é local é a limitação: uma função cuja restrição a intervalos pequenos é limitada, não precisa ser limitada.

Teorema 26.9 (localidade da derivabilidade de ordem superior). *Seja dada uma função $f : D \to \mathbb{R}$ com $D \subset \mathbb{R}$ e seja k um inteiro não negativo. Temos que:*

(a) *f é k vezes derivável se, e somente se, para todo $x \in D$ existe $r > 0$ tal que a restrição de f a $]x - r, x + r[\cap D$ é k vezes derivável;*

(b) *f é de classe C^k se, e somente se, para todo $x \in D$ existe $r > 0$ tal que a restrição de f a $]x - r, x + r[\cap D$ é de classe C^k.*

Em particular, f é de classe C^∞ se, e somente se, para todo $x \in D$ existe $r > 0$ tal que a restrição de f a $]x - r, x + r[\cap D$ é de classe C^∞.

Demonstração. O item (a) segue dos Teoremas 19.2 e 26.8. O item (b) segue então do Teorema 2.6. $\square$

Esclarecidos os fatos sobre derivadas de ordem superior de restrições e sobre a localidade da derivabilidade de ordem superior, estamos prontos para definir derivabilidade de ordem superior num ponto específico.

Definição 26.10 (derivabilidade de ordem k num ponto). Seja dada uma função $f : D \to \mathbb{R}$ com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $x \in D$ um ponto de acumulação de D. Dado um inteiro positivo k, dizemos que f é *k vezes derivável no ponto x* se existe $r > 0$ tal que valem as seguintes condições:

(i) a restrição de f a $]x - r, x + r[\cap D$ é $k - 1$ vezes derivável;

(ii) a $(k - 1)$-ésima derivada da restrição de f a $]x - r, x + r[\cap D$ é derivável no ponto x.

Se f for k vezes derivável no ponto x, então a *k-ésima derivada de f no ponto x*, denotada $f^{(k)}(x)$, é definida como sendo a derivada no ponto x da $(k - 1)$-ésima derivada da restrição de f a $]x - r, x + r[\cap D$.

Note que para $k \geq 2$ a condição (i) nos diz em particular que o conjunto $]x - r, x + r[\cap D$ não possui pontos isolados, isto é, para que f seja ao menos duas vezes derivável no ponto $x \in D$ é necessário não só que x não seja um ponto isolado de D, mas que próximo a x não existam pontos isolados de D. Para $k = 1$, a definição acima nos diz simplesmente que f é derivável no ponto x, no sentido usual (pelo Teorema 19.2). Às vezes é conveniente adotar a convenção de dizer que toda função $f : D \to \mathbb{R}$, com $D \subset \mathbb{R}$, é zero vezes derivável em qualquer ponto $x \in D$ e que a zero-ésima derivada de f no ponto x, denotada $f^{(0)}(x)$, é igual a $f(x)$. Observamos que segue dos Teoremas 26.9 e 19.2 que, se $D \subset \mathbb{R}$ não tem pontos isolados, então uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é k vezes derivável no sentido da Definição 26.2 se, e somente se, f for k vezes derivável no ponto $x \in D$ no sentido da Definição 26.10 para qualquer $x \in D$.

Enunciamos agora generalizações de alguns resultados que vimos em seções anteriores sobre derivadas primeiras para o contexto de derivadas de ordem superior. Começamos com as generalizações dos resultados da Seção 19 sobre derivadas de restrições de funções. Os dois resultados abaixo tratam de derivabilidade de ordem superior em um ponto específico e portanto não estão a rigor cobertos pelos enunciados dos Teoremas 26.8 e 26.9, embora sejam semelhantes a eles.

TEOREMA 26.11 (derivadas de ordem superior em um ponto de restrições). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Seja $S \subset D$ e seja $x \in S$. Suponha que existe $r > 0$ tal que $]x - r, x + r[\cap S$ não tem pontos isolados. Para qualquer inteiro não negativo k, temos que se f é k vezes derivável no ponto x, então $f|_S$ também é k vezes derivável no ponto x e $(f|_S)^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue dos Teoremas 26.8 e 19.1. □

TEOREMA 26.12 (a derivada de ordem k de f no ponto x só depende dos valores que f assume perto de x). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $x \in D$ um ponto de acumulação de D. Seja S um subconjunto de D com a seguinte propriedade: existe $r > 0$ tal que para todo $t \in D$:*

$$|t - x| < r \Longrightarrow t \in S.$$

Dado um inteiro não negativo k, temos que f é k vezes derivável no ponto x se, e somente se, $f|_S$ é k vezes derivável no ponto x.

DEMONSTRAÇÃO. Basta notar que, em virtude das nossas hipóteses sobre S, o número $r > 0$ que aparece na Definição 26.10 sempre pode ser reduzido de modo que tenhamos $]x - r, x + r[\cap D =]x - r, x + r[\cap S$. □

EXEMPLO 26.13. A função f considerada no Exemplo 26.3 não é duas vezes derivável, já que não é duas vezes derivável no ponto zero. No entanto, para todo $x \in \mathbb{R}$ com $x \neq 0$, temos que f é k vezes derivável no ponto x para todo inteiro não negativo k. De fato, as restrições de f a $]0, +\infty[$ e a $]-\infty, 0[$ são polinomiais e portanto de classe C^∞.

Tratamos agora da derivabilidade de ordem k de somas, produtos, quocientes e composições de funções. Enquanto é fácil ver que a derivada de ordem k da soma de duas funções é igual à soma das derivadas de ordem k das duas funções, não é tão simples obter fórmulas explícitas para a derivada de ordem k de produtos, quocientes e composições de funções. Tais fórmulas não serão discutidas aqui e nos ateremos então apenas a falar sobre a *derivabilidade* de ordem k de produtos, quocientes e composições.

TEOREMA 26.14 (derivabilidade de ordem k de soma e produto). *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$ funções com $D \subset \mathbb{R}$ e seja k um inteiro não negativo. Se f e g são k vezes deriváveis, então $f + g$ e fg são k vezes deriváveis. Se $x \in D$ é um ponto de acumulação de D e se f e g são k vezes deriváveis no ponto x, então $f + g$ e fg são k vezes deriváveis no ponto x. Se f e g são de classe C^k, então $f + g$ e fg são de classe C^k. Finalmente, se f e g são de classe C^∞, então $f + g$ e fg são de classe C^∞.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue dos teoremas sobre a derivada da soma e do produto (Teoremas 18.1 e 18.4) usando indução finita. □

TEOREMA 26.15 (derivabilidade de ordem k do quociente). *Sejam*

$$f : D \to \mathbb{R} \quad e \quad g : D \to \mathbb{R}$$

funções com $D \subset \mathbb{R}$ e seja k um inteiro não negativo. Suponha que $g(t) \neq 0$, para todo $t \in D$. Se f e g são k vezes deriváveis, então $\frac{f}{g}$ é k vezes derivável. Se $x \in D$ é um ponto de acumulação de D e se f e g são k vezes deriváveis no ponto x, então $\frac{f}{g}$ é k vezes derivável no ponto x. Se f e g são de classe C^k, então $\frac{f}{g}$ é de classe C^k. Finalmente, se f e g são de classe C^∞, então $\frac{f}{g}$ é de classe C^∞.

DEMONSTRAÇÃO. Segue do teorema sobre a derivada do quociente (Corolário 18.6) e do Teorema 26.14 usando indução finita. □

TEOREMA 26.16 (derivabilidade de ordem k da função composta). *Sejam*

$$f : D \to \mathbb{R} \quad e \quad g : E \to \mathbb{R}$$

funções com $D \subset \mathbb{R}$ e $E \subset \mathbb{R}$. Suponha que a imagem de f esteja contida no domínio E de g e seja k um inteiro não negativo. Se f e g são k vezes deriváveis, então $g \circ f$ é k vezes derivável. Se $x \in D$ é um ponto de acumulação de D, $f(x)$ é um ponto de acumulação de E, f é k vezes derivável no ponto x e g é k vezes derivável no ponto $f(x)$, então $g \circ f$ é k vezes derivável no ponto x. Se f e g são de classe C^k, então $g \circ f$ é de classe C^k. Finalmente, se f e g são de classe C^∞, então $g \circ f$ é de classe C^∞.

DEMONSTRAÇÃO. Segue da regra da cadeia (Teorema 22.1) e do Teorema 26.14 usando indução finita. □

Os Teoremas 26.14, 26.15 e 26.16 podem ser usados para montar novas funções k vezes deriváveis (ou funções de classe C^k ou de classe C^∞) a partir de funções k vezes deriváveis (ou de classe C^k ou de classe C^∞) mais simples. No próximo teorema listamos mais algumas funções de classe C^∞ para serem usadas como peças no processo de montagem.

TEOREMA 26.17 (mais funções de classe C^∞). *As seguintes funções são de classe C^∞:*

(1) *as funções polinomiais;*
(2) *as funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante;*
(3) *a função $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^b$, para todo $x > 0$, em que $b \in \mathbb{R}$;*
(4) *a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^q$, para todo $x \neq 0$, em que $q = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e n ímpar;*
(5) *a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, em que $a > 0$;*

(6) *a função* $\log_a$ *(e em particular a função logaritmo neperiano), em que* $a > 0$ *e* $a \neq 1$*;*
(7) *as funções arcoseno e arcocosseno restritas a* $]-1, 1[$*;*
(8) *as funções arcotangente e arcocotangente;*
(9) *as funções arcosecante e arcocossecante restritas a:*

$$]-\infty, -1[\,\cup\,]1, +\infty[\,.$$

Demonstração. Já havíamos visto no Exemplo 26.7 que funções polinomiais e as funções seno e cosseno são de classe C^∞. O fato que as outras funções trigonométricas são de classe C^∞ segue então do Teorema 26.15. Os itens (3) a (9) seguem facilmente das fórmulas explícitas para as derivadas das funções envolvidas (Teoremas 22.4, 22.6, 21.3, 21.1 e Exemplo 24.7). $\square$

Corolário 26.18 (derivabilidade de ordem k da potenciação). *Sejam*

$$f : D \to \mathbb{R} \quad e \quad g : D \to \mathbb{R}$$

funções com $D \subset \mathbb{R}$ *e seja* k *um inteiro não negativo. Suponha que* $f(t) > 0$*, para todo* $t \in D$ *e considere a função* $h : D \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$h(t) = f(t)^{g(t)},$$

para todo $t \in D$*. Se* f *e* g *são* k *vezes deriváveis, então* h *é* k *vezes derivável. Se* $x \in D$ *é um ponto de acumulação de* D *e se* f *e* g *são* k *vezes deriváveis no ponto* x*, então* h *é* k *vezes derivável no ponto* x*. Se* f *e* g *são de classe* C^k*, então* h *é de classe* C^k*. Finalmente, se* f *e* g *são de classe* C^∞*, então* h *é de classe* C^∞*.*

Demonstração. Basta notar que

$$h(t) = e^{g(t)\ln f(t)},$$

para todo $t \in D$, e usar os Teoremas 26.16, 26.17 e 26.14. $\square$

Note que a função $f(x) = \sqrt[n]{x}$ (com domínio $]0, +\infty[$ para n par e domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ para n ímpar) está coberta pelo Teorema 26.17, já que $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$. Coletivamente, os Teoremas 26.14, 26.15, 26.16, 26.17 e o Corolário 26.18 nos dizem que quaisquer funções definidas por fórmulas envolvendo somas, produtos, quocientes, composições, potenciações, logaritmos, raízes n-ésimas, funções trigonométricas e funções trigonométricas inversas são de classe C^∞ em qualquer domínio $D \subset \mathbb{R}$ sem pontos isolados em que as fórmulas façam sentido, desde que sejam cumpridas as duas seguintes condições:

(i) bases de potenciações devem ser positivas[9] e argumentos de raízes n-ésimas não podem assumir o valor zero;
(ii) os argumentos das funções arcoseno, arcocosseno, arcosecante e arcocossecante não podem assumir os valores 1 e -1.

[9]Na verdade, bases negativas não nulas para potenciações são permitidas se o expoente for uma constante racional de denominador ímpar.

É fácil ver que a função módulo restrita ao conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ também é de classe C^∞ e portanto a conclusão acima também vale se permitimos módulos nas fórmulas das funções, desde que o argumento do módulo nunca se anule.

Terminamos a nossa lista de resultados sobre derivadas de ordem superior com um teorema sobre funções inversas.

Teorema 26.19 (derivabilidade de ordem k da função inversa). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função injetora e derivável com $D \subset \mathbb{R}$ e seja k um inteiro positivo. Suponha que a função inversa $g = f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{R}$ seja contínua e que $f'(t) \neq 0$ para todo $t \in D$. Se f é k vezes derivável, então g é k vezes derivável. Se f é k vezes derivável num ponto $x \in D$, então g é k vezes derivável no ponto $f(x)$. Se f é de classe C^k, então g é de classe C^k. Finalmente, se f é de classe C^∞, então g é de classe C^∞.*

Demonstração. Segue do teorema sobre a derivabilidade da inversa (Teorema 24.3) e dos Teoremas 26.15 e 26.16 usando indução finita. □

Finalizamos a seção apresentando uma adaptação da notação de Leibniz discutida na Seção 17 para derivadas de ordem superior. Recorde que se y e x são quantidades (tomando valores reais) associadas a um certo sistema e satisfazendo uma relação funcional do tipo $y = f(x)$, então $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ denota a derivada $f'(x)$ da função f calculada em x. A derivada segunda da função f calculada em x, isto é, a derivada da quantidade $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ em relação à quantidade x é denotada então por:

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}\big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big)}{\mathrm{d}x};$$

uma forma menos desengonçada de escrever isso é a seguinte:

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{26.1}$$

A forma mais usual de denotar a expressão do lado direito da igualdade (26.1) é:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}.$$

A motivação por trás dessa notação para a derivada segunda é que no numerador da expressão do lado direito da igualdade em (26.1) o símbolo d aparece duas vezes e no denominador dessa expressão o símbolo $\mathrm{d}x$ aparece duas vezes, donde escrevemos d^2 na frente do y no numerador e $\mathrm{d}x^2$ no denominador. Evidentemente, esses expoentes não devem ser pensados como operações algébricas genuínas, isto é, não estamos de fato elevando algo ao quadrado: elevar o d ao quadrado não faz sentido nem quando levamos os símbolos $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$ a sério como perturbações infinitesimais. A expressão $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ deve ser entendida apenas como uma notação para a derivada segunda. Mais geralmente, a derivada k-ésima $f^{(k)}(x)$ é denotada por:

$$f^{(k)}(x) = \frac{\mathrm{d}^ky}{\mathrm{d}x^k}.$$

A notação (17.3) introduzida no final da Seção 17 para escrever de forma eficiente a derivada de funções usando apenas uma expressão para a função (sem introduzir explicitamente um nome para a função) pode também ser adaptada para derivadas de ordem superior. Mais explicitamente, usamos

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\mathfrak{v}^k}(\text{alguma expressão})$$

para denotar a derivada de ordem k da função definida pela expressão entre parênteses em termos da variável $\mathfrak{v}$.

27. O Teorema do Valor Médio e suas principais consequências

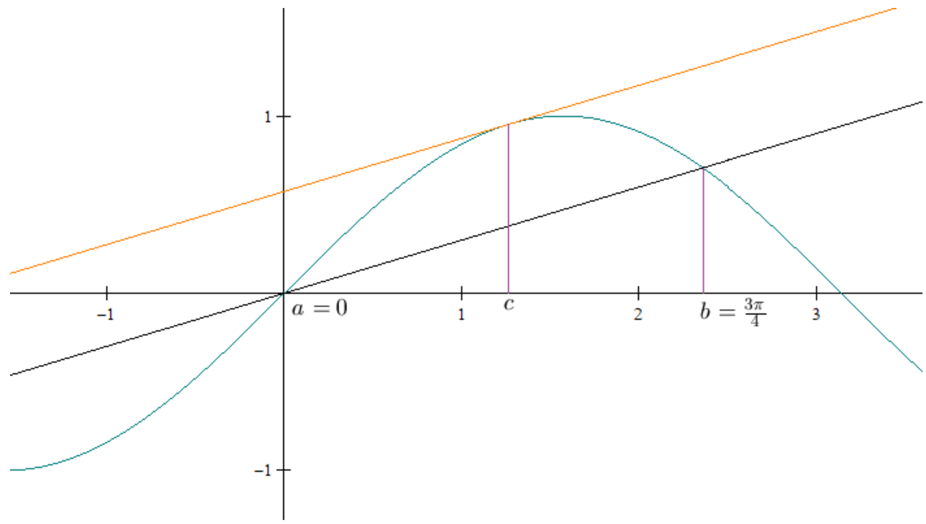
Na Seção 25 nós vimos algumas relações entre o sinal da derivada de uma função e suas propriedades de crescimento e decrescimento. Mais especificamente, nós vimos que funções crescentes deriváveis tem derivada maior ou igual a zero e, similarmente, funções decrescentes deriváveis tem derivada menor ou igual a zero (Teorema 25.11). Uma recíproca parcial desse resultado foi dada pelo Teorema 25.1 que nos diz que se $f'(x) > 0$ então o valor de f aumenta quando nos movemos ligeiramente para a direita de x e diminui quando nos movemos ligeiramente para a esquerda de x; a situação se reverte quando $f'(x) < 0$. Nesta seção nós obteremos uma recíproca parcial mais interessante para o Teorema 25.11 que nos diz que funções deriváveis com derivada maior ou igual a zero *definidas em intervalos* são crescentes e, similarmente, funções deriváveis definidas em intervalos com derivada menor ou igual a zero são decrescentes (veja Teorema 27.4 adiante). A demonstração dessa recíproca parcial é uma aplicação do célebre *Teorema do Valor Médio*.

TEOREMA 27.1 (do valor médio). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, em que $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$. Se f é derivável em qualquer ponto do intervalo aberto $]a, b[$, então existe $c \in\,]a, b[$ tal que:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{27.1}$$

A demonstração do Teorema do Valor Médio é consideravelmente simples e será feita logo adiante, mas antes disso vamos visualizar o significado do enunciado geometricamente. Com esse propósito, note que o quociente que aparece do lado esquerdo da igualdade (27.1) é o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$ enquanto que o lado direito da igualdade (27.1) é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $\big(c, f(c)\big)$. O Teorema do Valor Médio nos diz então que se uma função f é derivável num intervalo I, então qualquer reta secante ao gráfico de f passando por dois pontos distintos $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$, com $a, b \in I$, é paralela a *alguma* reta tangente ao gráfico de f num ponto $\big(c, f(c)\big)$, em que c fica (estritamente) entre a e b. O teorema não dá nenhuma informação sobre como encontrar o ponto c, apenas diz que ele existe e que está entre a e b.

A figura a seguir ilustra a interpretação geométrica do enunciado do Teorema do Valor Médio considerando a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ e os pontos $a = 0$ e $b = \frac{3\pi}{4}$. Nesse exemplo o ponto c é o arcocosseno de $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}$ e é aproximadamente igual a 1,266 (com três casas decimais de aproximação).



Note que o Teorema do Valor Médio assume um pouco menos do que a derivabilidade de f em todo o intervalo fechado $[a, b]$. Para aplicar o teorema, precisamos apenas que f seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto $]a, b[$. Em outras palavras, o teorema pode ser aplicado se a função f não for derivável nas extremidades do intervalo, desde que ela seja ao menos contínua. O Teorema do Valor Médio também possui uma interpretação interessante no contexto da cinemática: se f é a função tal que $s = f(t)$, em que t denota o tempo e s denota a posição de uma partícula movendo-se numa linha (veja Exemplo 17.1), então o teorema nos diz que a velocidade média da partícula num intervalo de tempo $[a, b]$ é igual à velocidade instantânea da partícula em *algum* instante entre a e b.

Para demonstrar o Teorema do Valor Médio, precisamos demonstrar primeiro o caso particular do teorema em que se supõe adicionalmente que $f(a) = f(b)$. Esse caso particular é normalmente chamado de *Teorema de Rolle*.

TEOREMA 27.2 (Rolle). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, em que $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$. Se f é derivável em qualquer ponto do intervalo aberto $]a, b[$ e se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in \,]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Teorema de Weierstrass (Teorema 14.6) que a função f possui um ponto de máximo e um ponto de mínimo. Se um desses pontos estiver no intervalo aberto $]a, b[$, então esse será um ponto c em que $f'(c) = 0$ (Corolário 25.8). A outra opção é que tanto o ponto de máximo quanto ponto de mínimo de f estão nas extremidades do intervalo. Como

$f(a) = f(b)$, isso implicaria que a função f é constante e nesse caso $f'(c) = 0$ para qualquer $c \in \left]a, b\right[$. □

A demonstração do Teorema do Valor Médio é obtida agora aplicando o Teorema de Rolle sobre uma modificação da função f que possui valores iguais nos extremos do intervalo.

Demonstração do Teorema do Valor Médio. Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a função cujo gráfico é o segmento de reta secante ao gráfico de f passando pelos pontos $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$, isto é, g é dada por

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

para todo $x \in [a, b]$. Considere agora a função $h = f - g$. Temos que h é contínua e que h é derivável em todos os pontos do intervalo aberto $\left]a, b\right[$. Como $h(a) = h(b) = 0$, o Teorema de Rolle (Teorema 27.2) nos dá então um $c \in \left]a, b\right[$ tal que $h'(c) = 0$. Notando que

$$h'(c) = f'(c) - g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

concluímos que a igualdade (27.1) é satisfeita. □

Exemplo 27.3 (o Teorema do Valor Médio não se aplica se a função não for derivável em algum ponto interior do intervalo). Seja $a > 0$ e considere a função $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, para todo $x \in [-a, a]$. Temos que f é contínua e é derivável em todos os pontos de $[-a, a]$, exceto pelo ponto 0. Se pudéssemos aplicar o Teorema do Valor Médio nessa situação, concluiríamos que existe $c \in \left]-a, a\right[$ tal que:

$$\frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = 0 = f'(c).$$

Só que esse c não existe, já que a derivada de f vale 1 nos pontos de $\left]0, a\right]$ e vale -1 nos pontos de $\left[-a, 0\right[$.

Usando o Teorema do Valor Médio, podemos agora demonstrar os resultados mais interessantes que relacionam o sinal da derivada de uma função com seu crescimento e decrescimento, no contexto de funções definidas em intervalos.

Teorema 27.4 (relação entre sinal da derivada e monotonicidade em intervalos). *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua cujo domínio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Suponha que f é derivável em todo ponto interior de I. Temos que:*

(a) *se $f'(x) \geq 0$ para todo ponto x no interior do intervalo I, então f é crescente;*

(b) *se $f'(x) \leq 0$ para todo ponto x no interior do intervalo I, então f é decrescente;*

(c) *se* $f'(x) = 0$ *para todo ponto* x *no interior do intervalo* I*, então* f *é constante;*

(d) *se* $f'(x) > 0$ *para todo ponto* x *no interior do intervalo* I*, então* f *é estritamente crescente;*

(e) *se* $f'(x) < 0$ *para todo ponto* x *no interior do intervalo* I*, então* f *é estritamente decrescente.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $a, b \in I$ com $a < b$. A restrição de f ao intervalo fechado $[a, b]$ é contínua e é derivável nos pontos do intervalo aberto $]a, b[$. Aplicando o Teorema do Valor Médio (Teorema 27.1), obtemos então $c \in]a, b[$ tal que a igualdade (27.1) vale. Sob as hipóteses do item (a), temos então que $f'(c) \geq 0$ e portanto $f(a) \leq f(b)$, provando que f é crescente. Um raciocínio similar demonstra as afirmações contidas nos outros itens. □

COROLÁRIO 27.5. *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função derivável cujo domínio* $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo. Vale que:*

(a) f *é crescente se, e somente se,* $f'(x) \geq 0$*, para todo* $x \in I$*;*

(b) f *é decrescente se, e somente se,* $f'(x) \leq 0$*, para todo* $x \in I$*;*

(c) f *é constante se, e somente se,* $f'(x) = 0$*, para todo* $x \in I$*.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue dos Teoremas 27.4 e 25.11. □

EXEMPLO 27.6 (a recíproca dos itens (d) e (e) do Teorema 27.4 não vale). A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é estritamente crescente, mas sua derivada se anula no ponto zero. Assim, temos $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (como deveria ser, de acordo com o Teorema 25.11), mas não temos $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, essa função nos dá um contra-exemplo para a recíproca do item (d) do Teorema 27.4. Para obter um contra-exemplo para a recíproca do item (e) desse teorema, basta considerar a função $f(x) = -x^3$. Note que se uma função f definida num intervalo for crescente, mas não estritamente crescente (ou decrescente, mas não estritamente decrescente), então haverá necessariamente todo um intervalo (com mais de um ponto) em que a função é constante e em todos os pontos interiores a esse intervalo a função terá derivada zero. Assim, se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$ e se houver apenas um número finito de pontos em I em que f' se anula, então f será estritamente crescente; similarmente, se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$ e f' se anula apenas num número finito de pontos de I, então f é estritamente decrescente.

EXEMPLO 27.7 (o Teorema 27.4 não vale se o domínio da função não for um intervalo). A função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, para todo $x \neq 0$, tem derivada $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ negativa em todo ponto de seu domínio. No entanto, f não é decrescente já que, digamos, $f(-1) < f(1)$. O Teorema 27.4 não se aplica aqui porque o domínio de f não é um intervalo. Considerando as restrições de f aos intervalos $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ podemos aplicar o teorema e concluir que a restrição de f a ambos esses intervalos é estritamente decrescente. A condição de decrescimento só falha quando comparamos o valor de f em um ponto de $]-\infty, 0[$ com o valor de f em um ponto de $]0, +\infty[$.

Na Seção 25 nós vimos que se uma função derivável definida num intervalo possui um ponto de máximo ou de mínimo local no interior desse intervalo, então esse ponto é um ponto crítico da função, isto é, nesse ponto a derivada da função se anula (Corolário 25.8). Porém não é verdade que todo ponto crítico é um ponto de máximo ou de mínimo local (Exemplo 25.9) e naquele momento não tínhamos um critério que nos permitisse decidir se um dado ponto crítico é um ponto de máximo local, de mínimo local ou se não é nenhum dos dois. As técnicas desenvolvidas na presente seção resolvem boa parte desse problema: estudando o sinal da derivada da função, podemos determinar em quais intervalos a função cresce e em quais intervalos a função decresce. Com essa informação, é fácil determinar os pontos de máximo e de mínimo local da função. Por exemplo, se a função é crescente logo antes do ponto x e é decrescente logo depois do ponto x, então x é um ponto de máximo local da função; similarmente, se a função é decrescente logo antes do ponto x e é crescente logo depois do ponto x, então x é um ponto de mínimo local da função. Segue então do Teorema 27.4 que se o domínio de f é um intervalo e se no ponto x o sinal da derivada de f muda de positivo para negativo (quer dizer, f' é positiva logo antes de x e negativa logo depois de x), então x é um ponto de máximo local estrito de f e, similarmente, se o sinal de f' muda de negativo para positivo no ponto x, então x é um ponto de mínimo local estrito de f. Resumiremos esses fatos no enunciado do Teorema 27.9 logo adiante. Antes do teorema, vejamos um exemplo concreto em que determinamos os máximos e os mínimos locais e globais de uma função derivável num intervalo estudando o sinal da derivada.

Exemplo 27.8 (achando máximos e mínimos locais e globais estudando o sinal da derivada). Considere a função $f : [-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^4 - 2x^2,$$

para todo $x \geq -2$. Temos que f é derivável e que

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1),$$

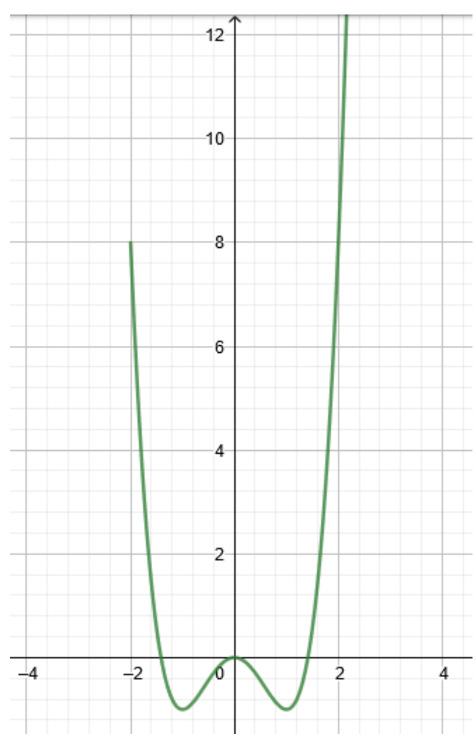
para todo $x \geq -2$. Os pontos em que f' muda de sinal são os pontos -1, 0 e 1. Mais especificamente, temos que:

$$\begin{gathered} -2 \leq x < -1 \Longrightarrow f'(x) < 0, \\ -1 < x < 0 \Longrightarrow f'(x) > 0, \\ 0 < x < 1 \Longrightarrow f'(x) < 0, \\ x > 1 \Longrightarrow f'(x) > 0. \end{gathered}$$

Segue então do Teorema 27.4 que:

- a restrição de f a $[-2, -1]$ é estritamente decrescente;
- a restrição de f a $[-1, 0]$ é estritamente crescente;
- a restrição de f a $[0, 1]$ é estritamente decrescente;
- a restrição de f a $[1, +\infty[$ é estritamente crescente.

Temos aqui informação suficiente para produzir um esboço do gráfico de f bom o bastante para que possamos saber quais pontos são de máximo ou mínimo (local ou global). Começando pela extremidade esquerda em -2, temos que $f(-2) = 8$ e que f decresce estritamente a partir daí até atingir o valor $f(-1) = -1$ no ponto -1; depois f volta a crescer estritamente até atingir o valor $f(0) = 0$ no ponto 0; depois f volta a decrescer estritamente até atingir o valor $f(1) = -1$ no ponto 1; e, finalmente, f passa a crescer estritamente com $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Exibimos logo a seguir o desenho detalhado do gráfico de f feito num computador para ajudar o leitor a acompanhar o que está acontecendo, mas note que esse desenho detalhado não é necessário para descobrir os pontos de máximo e mínimo e que apenas as considerações acima são suficientes para esse propósito. Dessas considerações concluímos que os pontos -2 e 0 são pontos de máximo local estritos e que a função não possui pontos de máximo global, já que nem é limitada superiormente. Os pontos -1 e 1 são pontos de mínimo local estrito e são também pontos de mínimo global (mas não estrito).



Enunciamos agora em detalhes o teorema que diz que pontos críticos em que a derivada muda de sinal são máximos ou mínimos locais.

TEOREMA 27.9 (ponto em que a derivada muda de sinal). *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função contínua cujo domínio* $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo e seja* $x \in I$*. Suponha que* f *é derivável em todos os pontos de* I*, exceto talvez por* x*. Temos que:*

(a) *se existe* $r > 0$ *tal que* f' *é menor ou igual a zero nos pontos de* $]x - r, x[\cap I$ *e tal que* f' *é maior ou igual a zero nos pontos de* $]x, x + r[\cap I$*, então* x *é um ponto de mínimo local de* f*;*

(b) *se existe* $r > 0$ *tal que* f' *é maior ou igual a zero nos pontos de* $]x - r, x[\cap I$ *e tal que* f' *é menor ou igual a zero nos pontos de* $]x, x + r[\cap I$*, então* x *é um ponto de máximo local de* f*;*

(c) *se existe* $r > 0$ *tal que* f' *é negativa nos pontos de* $]x - r, x[\cap I$ *e tal que* f' *é positiva nos pontos de* $]x, x + r[\cap I$*, então* x *é um ponto de mínimo local estrito de* f*;*

(d) *se existe* $r > 0$ *tal que* f' *é positiva nos pontos de* $]x - r, x[\cap I$ *e tal que* f' *é negativa nos pontos de* $]x, x + r[\cap I$*, então* x *é um ponto de máximo local estrito de* f*.*

DEMONSTRAÇÃO. Para demonstrar o item (a), usamos o Teorema 27.4 para concluir que a restrição de f a $]x - r, x] \cap I$ é decrescente e segue daí que para qualquer $t \in\ ]x - r, x[\cap I$ vale que $f(t) \geq f(x)$. Similarmente, o Teorema 27.4 nos dá que a restrição de f a $[x, x + r[\cap I$ é crescente e segue daí que para qualquer $t \in [x, x + r[\cap I$ vale que $f(x) \leq f(t)$. Portanto x é um ponto de mínimo da restrição de f a $]x - r, x + r[\cap I$ e logo x é um ponto de mínimo local de f. A demonstração dos outros itens é feita de modo similar. □

Um corolário muito útil do Teorema 27.9 nos dá um critério para decidir se um ponto crítico de uma função é um máximo ou um mínimo local em termos do sinal da derivada segunda da função no ponto crítico. Quando também a derivada segunda da função é nula no ponto crítico, é possível ainda frequentemente classificar o ponto crítico (isto é, decidir se é um máximo local, mínimo local ou nenhum dos dois) olhando para o valor no ponto das derivadas de ordem superior da função. Veremos isso mais adiante quando estudarmos o polinômio de Taylor (Teorema 33.15).

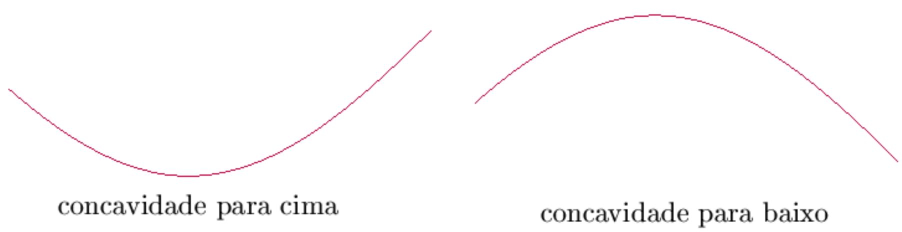
COROLÁRIO 27.10 (critério da derivada segunda). *Sejam* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função derivável cujo domínio* $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo e* $x \in I$ *um ponto tal que* f *é duas vezes derivável no ponto* x*. Se* $f'(x) = 0$ *e* $f''(x) > 0$*, então* x *é um ponto de mínimo local estrito de* f *e se* $f'(x) = 0$ *e* $f''(x) < 0$*, então* x *é um ponto de máximo local estrito de* f*.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que $f'(x) = 0$ e $f''(x) > 0$. Usando o Teorema 25.1 para a função f' no ponto x, vemos que existe $r > 0$ tal que $f'(t) < f'(x)$ para todo $t \in\ ]x - r, x[\cap I$ e $f'(x) < f'(t)$ para todo

$t \in]x, x+r[\cap I$. Como $f'(x) = 0$, concluímos que f' é negativa nos pontos de $]x-r, x[\cap I$ e que f' é positiva nos pontos de $]x, x+r[\cap I$. O item (c) do Teorema 27.9 nos dá então que x é um ponto de mínimo local estrito de f. A demonstração do teorema no caso em que $f'(x) = 0$ e $f''(x) < 0$ é obtida de forma análoga. □

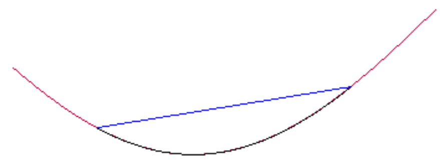
28. Concavidade do gráfico e a derivada segunda

Na Seção 27 nós vimos que para uma função derivável definida em um intervalo, o sinal da derivada nos diz em que intervalos a função é crescente e em que intervalos a função é decrescente. Como mostra o Exemplo 27.8, usando essa informação é possível fazer um esboço do gráfico da função que é suficientemente bom para, por exemplo, determinar os seus pontos de máximo e mínimo locais e globais. No entanto, nós gostaríamos de poder usar as ferramentas do Cálculo Diferencial para produzir um esboço de gráfico de melhor qualidade de uma função dada e para isso saber apenas os intervalos de crescimento e decrescimento é pouco. Há uma informação importante faltando para se fazer um bom esboço que é a *concavidade* do gráfico. A figura abaixo ilustra um gráfico com a concavidade para cima e um gráfico com a concavidade para baixo.



A concavidade do gráfico de uma função e o crescimento/decrescimento dessa função são propriedades independentes, isto é, é possível crescer com a concavidade para cima ou para baixo e é possível decrescer com a concavidade para cima ou para baixo. O gráfico da esquerda na figura tem a concavidade para cima, é decrescente antes do ponto de mínimo e é crescente depois do ponto de mínimo. Já o gráfico da direita tem a concavidade para baixo, é crescente antes do ponto de máximo e é decrescente depois do ponto de máximo. Temos que um gráfico com a concavidade para cima cresce cada vez mais rápido (crescimento acelerado) nos trechos em que há crescimento e decresce cada vez mais devagar (decrescimento desacelerado ou freado) nos trechos em que há decrescimento. Já um gráfico com a concavidade para baixo cresce cada vez mais devagar nos trechos em que há crescimento (crescimento desacelerado ou freado) e decresce cada vez mais rápido (decrescimento acelerado) nos trechos em que há decrescimento.

Se queremos ser capazes de provar teoremas a respeito da concavidade do gráfico de uma função, uma figura e a discussão informal acima não são suficientes para elucidar a noção: precisamos de uma definição precisa de concavidade. Como proceder? A figura a seguir sugere uma definição.



Temos nessa figura um gráfico com a concavidade para cima e um segmento de reta secante ao gráfico. Note que o trecho do gráfico delimitado pelas extremidades do segmento fica abaixo do segmento. Tomaremos essa condição como definição de “gráfico com a concavidade para cima”. Para traduzir essa condição geométrica numa condição algébrica, consideramos uma função $f : I \to \mathbb{R}$ cujo domínio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e, para $a, b \in I$ distintos, escrevemos a equação da reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$. A equação dessa reta é:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{28.1}$$

Dado então um ponto x entre a e b, temos que a ordenada do ponto dessa reta secante cuja abscissa é igual a x é dada por

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

e a ordenada do ponto do gráfico de f cuja abscissa é igual a x é exatamente $f(x)$. Assim, a condição de que o gráfico de f fica abaixo do segmento de reta secante é expressa algebricamente pela desigualdade:

$$f(x) \le f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Similarmente, a condição de que o gráfico de f tenha a concavidade para baixo é expressa geometricamente pela condição de que o trecho do gráfico de f delimitado pelas extremidades de um segmento secante ao gráfico fica acima desse segmento. Algebricamente, essa condição é expressa pela desigualdade reversa à desigualdade acima. Estamos prontos agora para passar a definição a limpo.

Definição 28.1 (concavidade do gráfico). Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função cujo domínio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Dizemos que o gráfico de f é *côncavo para cima* se para quaisquer $a, b \in I$ com $a < b$ e qualquer $x \in [a, b]$ vale que:

$$f(x) \le f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{28.2}$$

Dizemos que o gráfico de f é *côncavo para baixo* se para quaisquer $a, b \in I$ com $a < b$ e qualquer $x \in [a, b]$ vale que:

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{28.3}$$

Note que o gráfico de f é côncavo para baixo se, e somente se, o gráfico de $-f$ é côncavo para cima e por isso restringimos nossa discussão a seguir ao caso de gráficos com a concavidade para cima.

Observamos que para $x = a$ e $x = b$ as desigualdades (28.2) e (28.3) valem automaticamente, já que para $x = a$ e $x = b$ valem as igualdades correspondentes. Se $a < x \leq b$, a desigualdade (28.2) é equivalente a:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Assim, se para quaisquer $a, b \in I$ distintos denotamos por

$$\mathcal{C}_f(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f passando por $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$, temos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ cujo domínio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo possui o gráfico côncavo para cima se, e somente se

$$\mathcal{C}_f(a, x) \leq \mathcal{C}_f(a, b), \tag{28.4}$$

para quaisquer $a, b, x \in I$ com $a < x \leq b$. Observe que a reta secante (28.1) passa pelo ponto $\big(b, f(b)\big)$ e portanto podemos reescrever sua equação na forma

$$y = f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b),$$

isto é, vale a igualdade

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b), \tag{28.5}$$

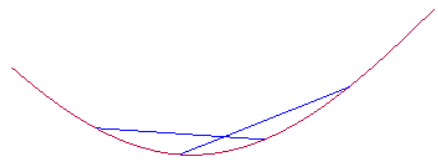
para todo $x \in \mathbb{R}$ e para quaisquer $a, b \in I$ distintos (como pode ser diretamente verificado também por um cálculo simples). Usando a igualdade (28.5), vemos que para $a \leq x < b$ a desigualdade (28.2) é equivalente a:

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Assim, uma função $f : I \to \mathbb{R}$ cujo domínio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo possui o gráfico côncavo para cima se, e somente se

$$\mathcal{C}_f(a, b) \leq \mathcal{C}_f(x, b) \tag{28.6}$$

para quaisquer $a, b, x \in I$ com $a \leq x < b$. Essas últimas considerações podem ser resumidas dizendo que *uma função tem o gráfico côncavo para cima se, e somente se, o coeficiente angular de um segmento secante ao gráfico aumenta (ou fica igual) quando movemos as extremidades do segmento para a direita*. Ilustramos esse fato com a figura a seguir e depois apresentamos um enunciado preciso.



Teorema 28.2 (concavidade do gráfico e coeficiente angular da reta secante). *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função cujo domínio* $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo. Temos que as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *o gráfico de* f *é côncavo para cima;*

(2) *para quaisquer* $a, b, x \in I$ *tais que* $a < x \leq b$, *vale a desigualdade* (28.4)*;*

(3) *para quaisquer* $a, b, x \in I$ *tais que* $a \leq x < b$, *vale a desigualdade* (28.6)*;*

(4) *para quaisquer* $a, b, a', b' \in I$ *tais que* $a < b$, $a' < b'$, $a \leq a'$ *e* $b \leq b'$, *vale a desigualdade* $\mathcal{C}_f(a, b) \leq \mathcal{C}_f(a', b')$.

Demonstração. A equivalência entre (1), (2) e (3) é demonstrada pela discussão que precede o enunciado. Para estabelecer a equivalência entre essas três afirmações e (4), notamos primeiro que evidentemente (4) implica (2) e daí usando (2) e (3) nós provamos (4) notando que

$$\mathcal{C}_f(a, b) \leq \mathcal{C}_f(a, b') \leq \mathcal{C}_f(a', b'),$$

para quaisquer $a, b, a', b' \in I$ tais que $a < b$, $a' < b'$, $a \leq a'$ e $b \leq b'$. □

Estamos prontos agora para demonstrar o resultado que relaciona a concavidade do gráfico de uma função derivável num intervalo com o crescimento e o decrescimento da sua derivada.

Teorema 28.3 (concavidade do gráfico e monotonicidade da derivada). *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função derivável cujo domínio* $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo. Temos que o gráfico de* f *é côncavo para cima se, e somente se, a função derivada* f' *é crescente. Similarmente, o gráfico de* f *é côncavo para baixo se, e somente se, a função derivada* f' *é decrescente.*

Demonstração. Suponha que o gráfico de f é côncavo para cima e sejam $a, b \in I$ com $a < b$. Devemos verificar que $f'(a) \leq f'(b)$. Para isso, primeiro tomamos o limite dos dois lados da desigualdade (28.4) quando x tende a a pela direita (Corolário 10.3) e obtemos a desigualdade:

$$f'(a) \leq \mathcal{C}_f(a, b).$$

Tomando agora o limite dos dois lados da desigualdade (28.6) quando x tende a b pela esquerda, obtemos

$$\mathcal{C}_f(a, b) \leq f'(b),$$

donde segue então que $f'(a) \le f'(b)$. Suponha agora que f' é crescente e vamos demonstrar que o gráfico de f é côncavo para cima. Com esse propósito, fixamos $a, b \in I$ com $a < b$ e vamos verificar que a desigualdade (28.4) vale para todo $x \in \left]a, b\right]$. Uma forma de obter essa conclusão é verificar que a função $g : \left]a, b\right] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \mathcal{C}_f(a, x)$, para todo $x \in \left]a, b\right]$, é crescente. Como g é derivável e seu domínio é um intervalo, basta verificar que a derivada de g é maior ou igual a zero (Teorema 27.4). Para qualquer $x \in \left]a, b\right]$ temos

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - \big(f(x) - f(a)\big)}{(x-a)^2}$$

e portanto:

$$g'(x) \ge 0 \Longleftrightarrow f'(x)(x-a) \ge f(x) - f(a) \Longleftrightarrow f'(x) \ge \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Agora o Teorema do Valor Médio (Teorema 27.1) nos diz que existe $c \in \left]a, x\right[$ tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$$

e daí a desigualdade $f'(x) \ge \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ segue do fato que f' é crescente. Isso completa a demonstração de que o gráfico de f é côncavo para cima se, e somente se, f' é crescente. A demonstração do fato que o gráfico de f é côncavo para baixo se, e somente se, f' é decrescente é obtida aplicando o resultado já demonstrado com $-f$ no lugar de f. □

COROLÁRIO 28.4 (concavidade do gráfico e sinal da derivada segunda). *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável cujo domínio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Temos que o gráfico de f é côncavo para cima se, e somente se, $f''(x) \ge 0$, para todo $x \in I$. Similarmente, o gráfico de f é côncavo para baixo se, e somente se, $f''(x) \le 0$, para todo $x \in I$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Teorema 28.3 e do Corolário 27.5. □

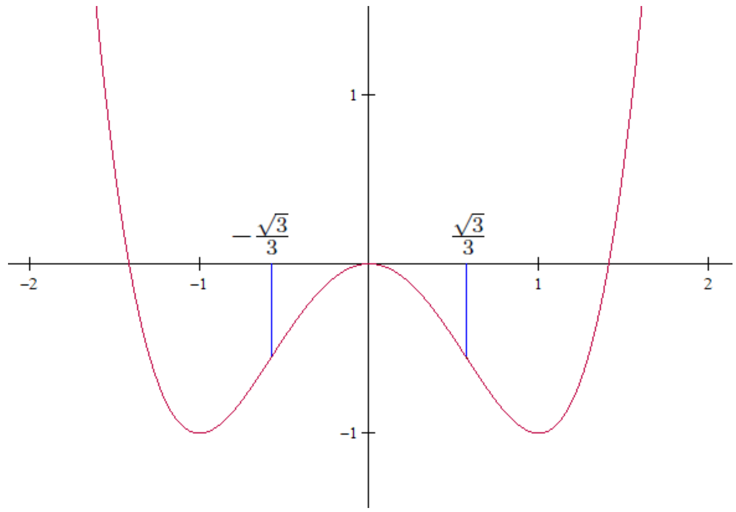
EXEMPLO 28.5 (analisando a concavidade do gráfico num exemplo concreto). Vamos voltar a estudar a função f do Exemplo 27.8, isto é, a função $f : \left[-2, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^4 - 2x^2,$$

para todo $x \ge -2$. Temos que $f'(x) = 4x^3 - 4x$ e $f''(x) = 12x^2 - 4$, para todo $x \ge -2$. Daí:

$$f''(x) \ge 0 \Longleftrightarrow x^2 \ge \frac{1}{3} \Longleftrightarrow x \le -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } x \ge \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Assim, o Corolário 28.4 nos dá que o gráfico da restrição de f ao intervalo $\big[-2, -\frac{\sqrt{3}}{3}\big]$ é côncavo para cima, o gráfico da restrição de f ao intervalo $\big[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\big]$ é côncavo para baixo e o gráfico da restrição de f ao intervalo $\big[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\big[$ é côncavo para cima. Na passagem pelos pontos $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{3}$ a concavidade do gráfico de f se inverte. A figura abaixo ilustra o gráfico de f, ampliado de forma a ilustrar esses pontos de mudança de concavidade.



Definição 28.6 (ponto de inflexão). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Um ponto $x \in D$ é chamado um *ponto de inflexão* de f se existe $r > 0$ tal que $]x - r, x + r[\subset D$ e uma das duas seguintes coisas ocorre:

(i) a restrição de f a $]x - r, x]$ tem o gráfico côncavo para cima e a restrição de f a $[x, x + r[$ tem o gráfico côncavo para baixo;

(ii) a restrição de f a $]x - r, x]$ tem o gráfico côncavo para baixo e a restrição de f a $[x, x + r[$ tem o gráfico côncavo para cima.

Em outras palavras, um ponto de inflexão é um ponto em que a concavidade do gráfico de f se inverte. No Exemplo 28.5, os pontos $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{3}$ são pontos de inflexão de f. De acordo com o Corolário 28.4, se f for duas vezes derivável (ou, ao menos, duas vezes derivável em um intervalo aberto contendo x), então x é um ponto de inflexão de f se, e somente se, f'' muda de sinal no ponto x (isto é, f'' é maior ou igual a zero logo antes de x e menor ou igual a zero logo depois de x, ou o contrário).

Observação 28.7 (pontos críticos que não são máximos nem mínimos locais e pontos de inflexão). Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável cujo domínio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e seja x um ponto interior a I. Suponha que x é um ponto crítico de f, isto é, $f'(x) = 0$. Se x não é nem um ponto de máximo local nem um ponto de mínimo local de f, então *na maioria dos exemplos* x é um ponto de inflexão de f, mas isso *não é sempre verdade* como veremos no Exemplo 28.8 logo a seguir. Explicamos agora porque na maioria dos exemplos um ponto crítico é ou um máximo local, ou um mínimo local ou um ponto de inflexão. As funções que aparecem na maioria dos exemplos em cursos de Cálculo Diferencial são funções *monótonas por partes*, isto é, funções em que podemos subdividir o domínio num número finito de intervalos de modo que a função seja monótona em cada um desses intervalos. Se f' for uma função monótona por partes, então existe $r > 0$ tal que as restrições de f' a $]x - r, x]$ e a $[x, x + r[$ são monótonas. Se isso ocorre, temos quatro possibilidades:

(1) a restrição de f' a $]x - r, x]$ é crescente e a restrição de f' a $[x, x + r[$ é crescente;
(2) a restrição de f' a $]x - r, x]$ é crescente e a restrição de f' a $[x, x + r[$ é decrescente;
(3) a restrição de f' a $]x - r, x]$ é decrescente e a restrição de f' a $[x, x + r[$ é crescente;
(4) a restrição de f' a $]x - r, x]$ é decrescente e a restrição de f' a $[x, x + r[$ é decrescente.

Como $f'(x) = 0$, se (1) ou (4) ocorrem, então f' muda de sinal na passagem por x e daí segue do Teorema 27.9 que x é um ponto de máximo ou de mínimo local de f. Por outro lado, se (2) ou (3) ocorrem, então o Teorema 28.3 implica que x é um ponto de inflexão de f.

Exemplo 28.8 (ponto crítico que não é máximo local, nem mínimo local, nem ponto de inflexão). A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida no Exemplo 25.12 é derivável e $g(0) = g'(0) = 0$. Temos que para todo $r > 0$, a função g assume valores positivos e negativos nos intervalos $]0, r[$ e $]-r, 0[$, de modo que 0 é um ponto crítico de g que não é nem máximo nem mínimo local. Além do mais, para todo $r > 0$, há infinitos pontos nos intervalos $]0, r[$ e $]-r, 0[$ em que g' assume o valor 1 e infinitos pontos nos intervalos $]0, r[$ e $]-r, 0[$ em que g' assume o valor -1; de fato, basta considerar pontos que são inversos de múltiplos inteiros pares e ímpares de π. Segue que, para todo $r > 0$, a função g' não é monótona nem em $[0, r[$ nem em $]-r, 0]$. Assim, pelo Teorema 28.3, o gráfico de g não tem concavidade bem-definida nem no intervalo $[0, r[$ nem no intervalo $]-r, 0]$ e portanto 0 não é um ponto de inflexão de g.

Observação 28.9 (outra formulação da definição de concavidade do gráfico). Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função cujo domínio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Dados $a, b \in I$ com $a < b$, temos que todo ponto do intervalo $[a, b]$ pode ser escrito como uma média ponderada entre a e b, isto é, todo $x \in [a, b]$ é da forma $x = (1 - t)a + tb$ para um certo $t \in [0, 1]$; de fato, temos:

$$x = (1 - t)a + tb = a + t(b - a) \Longleftrightarrow t = \frac{x - a}{b - a},$$

sendo que x fica entre a e b se, e somente se, o t correspondente fica entre 0 e 1. Quando reescrita em termos de t, a desigualdade (28.2) fica assim:

$$f\big((1 - t)a + tb\big) \le (1 - t)f(a) + tf(b). \tag{28.7}$$

Portanto, a função f tem o gráfico côncavo para cima se, e somente se, a desigualdade (28.7) vale para quaisquer $a, b \in I$ e qualquer $t \in [0, 1]$. Em livros de Análise Matemática, funções com essa propriedade são normalmente chamadas de *funções convexas*. Assim, uma função convexa é precisamente uma função cujo gráfico é côncavo para cima.

Observação 28.10 (desigualdade estrita na definição de concavidade do gráfico). Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função cujo domínio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e suponha que f tenha o gráfico côncavo para cima. Será que é possível que valha a igualdade em (28.2) para $a < x < b$? A resposta é sim: por exemplo, se o gráfico de f for um segmento de reta, então vale a igualdade em (28.2) para quaisquer a, b e x em I com $a \neq b$. Afirmamos que essa é essencialmente a única situação em que essa igualdade vale: mais precisamente, se vale a igualdade em (28.2) para certos valores de $a, b, x \in I$ com $a < x < b$, então o gráfico da restrição de f ao intervalo $[a, b]$ é um segmento de reta. De fato, se vale a igualdade em (28.2), então

$$\mathcal{C}_f(a, x) = \mathcal{C}_f(a, b)$$

e usando (28.5) obtemos:

$$\mathcal{C}_f(a, b) = \mathcal{C}_f(x, b).$$

Como o gráfico de f é côncavo para cima, o Teorema 28.2 nos dá

$$\mathcal{C}_f(a, x) \leq \mathcal{C}_f(a, y) \leq \mathcal{C}_f(a, b),$$

para todo $y \in [x, b]$ e também

$$\mathcal{C}_f(a, b) \leq \mathcal{C}_f(z, b) \leq \mathcal{C}_f(x, b),$$

para todo $z \in [a, x]$. Daí

$$\mathcal{C}_f(a, y) = \mathcal{C}_f(a, b) \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_f(z, b) = \mathcal{C}_f(a, b),$$

para todo $y \in [x, b]$ e todo $z \in [a, x]$. Isso prova que o gráfico da restrição de f ao intervalo $[a, b]$ é um segmento de reta.

29. Assíntotas

Os resultados que estudamos na Seção 27 nos permitem determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função derivável num intervalo estudando o sinal da derivada da função, enquanto que os resultados que estudamos na Seção 28 nos permitem determinar a concavidade do gráfico de uma função duas vezes derivável num intervalo estudando o sinal da derivada segunda da função. Falta agora apenas um ingrediente para que possamos produzir bons esboços de gráficos de funções: as técnicas para determinar as retas assíntotas ao gráfico. Informalmente, uma reta assíntota ao gráfico de uma função é uma reta da qual o gráfico se aproxima quando a abscissa tende a (mais ou menos) infinito ou quando a abscissa tende a algum número real que é ponto de acumulação do domínio. As assíntotas das quais o gráfico se aproxima quando a abscissa tende a (mais ou menos) infinito são assíntotas horizontais ou oblíquas, enquanto que as assíntotas das quais o gráfico se aproxima quando a abscissa tende a um número real que é ponto de acumulação do domínio são assíntotas verticais. Passemos às definições precisas.

Definição 29.1 (assíntotas horizontais e oblíquas). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e sejam $p, q \in \mathbb{R}$. Considere a reta (horizontal ou oblíqua) de equação

$$y = px + q.$$

Diremos que essa reta é uma *assíntota em* $+\infty$ ao gráfico de f se D for ilimitado superiormente e se:

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (px + q)\big) = 0;$$

diremos que essa reta é uma *assíntota em* $-\infty$ ao gráfico de f se D for ilimitado inferiormente e se:

$$\lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - (px + q)\big) = 0.$$

Definição 29.2 (assíntotas verticais). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in \mathbb{R}$. Considere a reta (vertical) de equação

$$x = a.$$

Diremos que essa reta é uma *assíntota* ao gráfico de f se uma das seguintes condições for satisfeita:

(i) a é um ponto de aculação de $]a, +\infty[\cap D$ e $\lim_{x\to a^+} f(x)$ é igual a $+\infty$ ou $-\infty$;

(i) a é um ponto de aculação de $]-\infty, a[\cap D$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$ é igual a $+\infty$ ou $-\infty$.

Como fazer para determinar as retas assíntotas ao gráfico de uma função $f : D \to \mathbb{R}$? Comecemos pelas assíntotas verticais. Em primeiro lugar, note que se $a \in D$ é um ponto em que f é contínua, então a reta vertical $x = a$ não é uma assíntota ao gráfico de f. De fato, se f é contínua no ponto a, então ou a é um ponto isolado de D ou a é um ponto de acumulação de D e $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Assim, nem a condição (i) nem a condição (ii) na Definição 29.2 ocorre. As retas verticais $x = a$ que são então *candidatas* a serem assíntotas verticais ao gráfico de f são aquelas em que $a \in D$ é um ponto em que f é descontínua e aquelas em que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de D que não está em D. Em exemplos concretos, essa lista de pontos a costuma ser finita (e curta) e basta então verificar para quais desses pontos a vale a condição (i) ou a condição (ii) na Definição 29.2 calculando os limites laterais de f (que fizerem sentido) no ponto a.

Passemos agora ao problema da determinação das assíntotas horizontais ao gráfico de f, isto é, as assíntotas $y = px+q$ ao gráfico de f em que $p = 0$. Dado $q \in \mathbb{R}$, temos que a reta horizontal $y = q$ é uma assíntota ao gráfico de $f : D \to \mathbb{R}$ em $+\infty$ se, e somente se, D é ilimitado superiormente e:

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - q\big) = 0.$$

Evidentemente, isso é equivalente a dizer que D é ilimitado superiormente e que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = q.$$

Similarmente, a reta horizontal $y = q$ é uma assíntota ao gráfico de f em $-\infty$ se, e somente se, D é ilimitado inferiormente e:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = q.$$

Assim, para determinar as assíntotas horizontais ao gráfico de f basta calcular os limites de f em $+\infty$ e em $-\infty$, quando esses limites fizerem sentido.

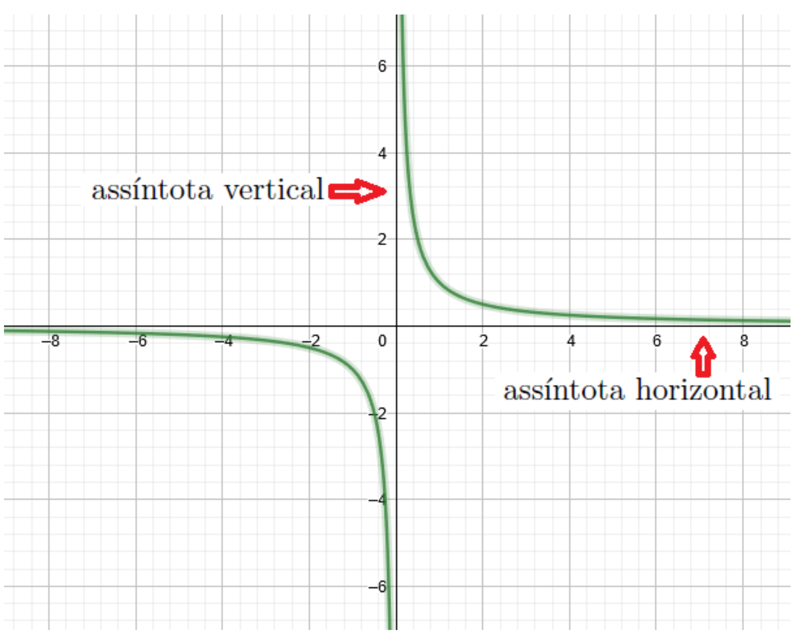
Exemplo 29.3 (achando assíntotas horizontais e verticais). Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, para todo $x \neq 0$. Temos que o domínio de f é ilimitado inferiormente e superiormente e que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Daí a reta horizontal $y = 0$ (isto é, o eixo das abscissas) é uma assíntota ao gráfico de f tanto em $+\infty$ como em $-\infty$. Para determinar as assíntotas verticais ao gráfico de f, notamos que f é contínua e que 0 é o único ponto de acumulação do domínio de f que não está no domínio de f. Assim, a reta vertical $x = 0$ (isto é, o eixo das ordenadas) é a única *candidata* a ser uma assíntota vertical ao gráfico de f. Como

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty,$$

vemos que $x = 0$ é de fato uma assíntota vertical ao gráfico de f. O fato que $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f também segue do fato que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$. Ilustramos as retas assíntotas ao gráfico de f na figura a seguir.



Considere agora a função $g : D \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 3e^x + 2},$$

para todo $x \in D$, em que D é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que a fórmula acima está bem-definida. Temos que essa fórmula está bem-definida se, e somente se, o denominador da fração é não nulo e que:

$$\begin{aligned} e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \Longleftrightarrow (e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0 &\Longleftrightarrow e^x = 1 \text{ ou } e^x = 2 \\ &\Longleftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \ln 2. \end{aligned}$$

Portanto o domínio de g é $D = \mathbb{R} \setminus \{0, \ln 2\}$. As candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de g são as retas $x = 0$ e $x = \ln 2$, já que g é contínua e os únicos pontos de acumulação de D que não estão em D são 0 e $\ln 2$. Notando que

$$e^{2x} - 3e^x + 2 > 0 \Longleftrightarrow e^x < 1 \text{ ou } e^x > 2 \Longleftrightarrow x < 0 \text{ ou } x > \ln 2,$$
$$e^{2x} - 3e^x + 2 < 0 \Longleftrightarrow 1 < e^x < 2 \Longleftrightarrow 0 < x < \ln 2,$$

nós obtemos:

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to \ln 2^-} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \ln 2^+} g(x) = +\infty.$$

Segue que as retas verticais $x = 0$ e $x = \ln 2$ são de fato assíntotas do gráfico de g. Vamos determinar agora as assíntotas horizontais ao gráfico de g. Temos que o domínio D é ilimitado superiormente e que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 3e^x + 2} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}(1 + e^{-2x})}{e^{2x}(1 - 3e^{-x} + 2e^{-2x})} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - 3e^{-x} + 2e^{-2x}} = 1. \end{aligned}$$

Assim, a reta $y = 1$ é uma assíntota ao gráfico de g em $+\infty$. Além do mais

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 3e^x + 2} = \frac{1}{2},$$

de modo que a reta $y = \frac{1}{2}$ é uma assíntota ao gráfico de g em $-\infty$.

Passemos agora ao problema de determinar as assíntotas oblíquas ao gráfico de uma função $f : D \to \mathbb{R}$. Vamos focar no caso de assíntotas em $+\infty$, já que o caso de assíntotas em $-\infty$ é totalmente análogo. Se a reta $y = px + q$ é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$, então D é ilimitado superiormente e

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \Big(\frac{f(x) - (px + q)}{x} + p + \frac{q}{x} \Big) = p,$$

já que $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(px+q)\big)=0$. Assim, o primeiro passo para se determinar as assíntotas oblíquas ao gráfico de f em $+\infty$ é calcular o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{29.1}$$

Se esse limite não existe ou se ele não é finito, então não há uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$. Se esse limite existe e é igual a um número real p, então as retas com coeficiente angular p são as únicas *candidatas* a serem assíntotas ao gráfico de f em $+\infty$. Para determinar qual dessas candidatas a reta assíntota é de fato uma reta assíntota, caso alguma delas seja uma reta assíntota, calculamos o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-px\big). \tag{29.2}$$

Se esse limite não existe ou não é finito, então o gráfico de f não possui uma assíntota em $+\infty$. Se esse limite é igual a um número real q, então a reta $y=px+q$ é a (única) assíntota oblíqua ao gráfico de f em $+\infty$. De fato, note que:

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-px\big)=q\iff\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(px+q)\big)=0.$$

Observamos que esse método para determinar as assíntotas oblíquas ao gráfico de f acaba por determinar também as assíntotas horizontais, já que elas correspondem simplesmente ao caso $p=0$: mais explicitamente, se a reta $y=q$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f em $+\infty$, então $\lim_{x\to+\infty}f(x)=q$ e quando calculamos o limite (29.1) obtemos o valor zero. Tomamos então $p=0$ e ao calcular o limite (29.2) obtemos o valor q.

Exemplo 29.4 (achando assíntotas oblíquas e verticais). Considere a função $f:D\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1},$$

para todo $x\in D$, em que D é o conjunto dos pontos $x\in\mathbb{R}$ tais que a fórmula acima está bem-definida, isto é:

$$D=\big\{x\in\mathbb{R}:x^2-1\neq0\big\}=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}.$$

Como f é contínua e os pontos de acumulação de D que não estão em D são -1 e 1, temos que as retas $x=-1$ e $x=1$ são as candidatas a assíntotas verticais ao gráfico de f. Os limites laterais de f no ponto 1 são dados por

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty\quad\text{e}\quad\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty,$$

já que $x^2-1>0$ para $x>1$ e $x^2-1<0$ para $x<1$ perto de 1. Logo a reta $x=1$ é de fato uma assíntota vertical ao gráfico de f. Por outro lado

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x+1}{x-1}=-\frac{3}{2},$$

o que mostra que $x = -1$ *não* é uma assíntota vertical ao gráfico de f. Vamos agora determinar as assíntotas horizontais e oblíquas ao gráfico de f. Temos que o domínio D é ilimitado superiormente e que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x^3-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1;$$

similarmente, o domínio D é ilimitado inferiormente e:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

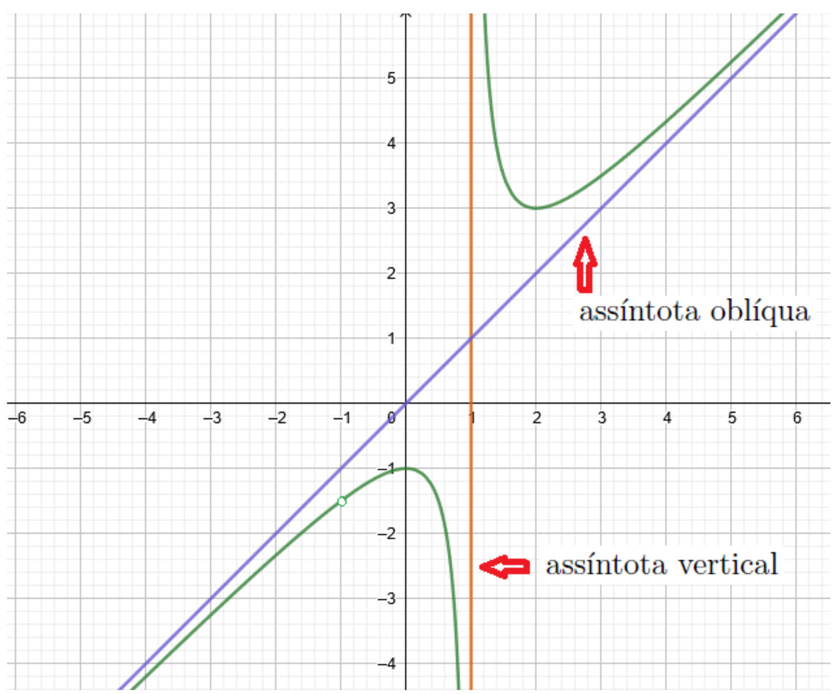
Daí as retas da forma $y = x+q$ são as candidatas a serem assíntotas oblíquas ao gráfico de f em $+\infty$ e em $-\infty$. Para determinar se uma dessas retas é assíntota em $+\infty$ calculamos o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - x\big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{x\big(1-\frac{1}{x^2}\big)} = 0$$

e, de forma similar, para determinar se uma dessas retas é assíntota em $-\infty$ calculamos o limite:

$$\lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - x\big) = 0.$$

Concluímos então que a reta $y = x$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de f tanto em $+\infty$ como em $-\infty$. Na figura a seguir ilustramos o gráfico de f juntamente com suas assíntotas vertical e oblíqua.



Exemplo 29.5 (caso em que nenhuma das candidatas a assíntota oblíqua é assíntota oblíqua). Considere a função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + \sqrt{x}$, para todo $x \geq 0$. Temos que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \Big(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\Big) = 1,$$

donde as retas da forma $y = x + q$ são as candidatas a assíntota oblíqua ao gráfico de f em $+\infty$. Calculamos então o limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - x\big) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Como esse limite é igual a $+\infty$, concluímos então que o gráfico de f não possui assíntotas oblíquas (ou horizontais) em $+\infty$. Como o domínio é limitado inferiormente, também não há assíntotas em $-\infty$ e, como f é contínua e todo número real que é ponto de acumulação de D está em D, concluímos que o gráfico de f também não possui assíntotas verticais.

30. Esboçando gráficos: um exemplo completo

Nas Seções 27, 28 e 29 nós estudamos várias técnicas úteis para esboçar o gráfico de uma função e agora vamos trabalhar com todas elas juntas em um exemplo concreto. O roteiro usual para se produzir um esboço de gráfico de função usando as técnicas do Cálculo Diferencial consiste em:

(a) estudar o sinal da derivada primeira para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento da função e os pontos de máximo e mínimo local e global;

(b) estudar o sinal da derivada segunda para determinar a concavidade do gráfico em vários intervalos e os pontos de inflexão;

(c) determinar as retas assíntotas ao gráfico e calcular alguns limites importantes — tipicamente limites em $+\infty$ e em $-\infty$ (quando fizerem sentido) e limites em pontos de acumulação do domínio que não estão no domínio;

(d) determinar as interseções do gráfico com os eixos coordenados e o valor da função em pontos notáveis (máximos e mínimos locais e pontos de inflexão).

Evidentemente, esse roteiro é apenas uma sugestão: coisas diferentes podem importar dependendo do motivo pelo qual você quer esboçar o gráfico. Porém, colocar em prática os itens (a)—(d) acima é o que normalmente se espera que alunos de Cálculo Diferencial façam na hora de resolver exercícios de esboço de gráfico.

Consideremos um exemplo concreto. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2},$$

para todo $x \in D$, em que D é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que a fórmula acima está bem-definida. Temos que:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

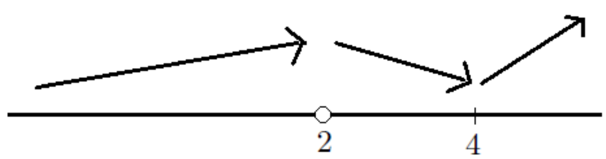
Vamos produzir um esboço do gráfico de f. Começamos calculando a derivada de f e estudando seu sinal. Para todo $x \neq 2$, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(x-1)^2(x-2)^2 - 2(x-1)^3(x-2)}{(x-2)^4} \\ &= \frac{(x-1)^2[3(x-2) - 2(x-1)]}{(x-2)^3} \\ &= \frac{(x-1)^2(x-4)}{(x-2)^3}. \end{aligned}$$

Daí a função f' é positiva nos intervalos

$$]-\infty, 1[\,, \quad]1, 2[\quad \text{e} \quad]4, +\infty[$$

e é negativa no intervalo $]2, 4[$. Segue então do Teorema 27.4 que a restrição de f aos intervalos $]-\infty, 2[$ e $[4, +\infty[$ é estritamente crescente e que a restrição de f ao intervalo $]2, 4]$ é estritamente decrescente, o que é ilustrado esquematicamente na figura abaixo.



Concluímos que o ponto 4 é um ponto de mínimo local estrito e é o único ponto de mínimo local de f. Além do mais, f não possui pontos de máximo local. Vamos agora calcular os limites de f em $+\infty$ e em $-\infty$. Temos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 4x + 4} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right)} = +\infty \end{aligned} \tag{30.1}$$

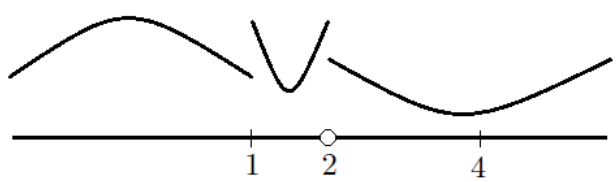
e, similarmente:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty. \tag{30.2}$$

Segue que f não é limitada nem inferiormente nem superiormente e portanto não possui pontos de máximo nem mínimo global. Passemos ao estudo do sinal da derivada segunda de f. Para todo $x \neq 2$, temos:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{[2(x-1)(x-4)+(x-1)^2](x-2)^3 - 3(x-1)^2(x-4)(x-2)^2}{(x-2)^6} \\ &= \frac{(x-1)\big[[2(x-4)+(x-1)](x-2) - 3(x-1)(x-4)\big]}{(x-2)^4} \\ &= \frac{(x-1)[(3x-9)(x-2)-3(x-1)(x-4)]}{(x-2)^4} \\ &= \frac{3(x-1)[(x-3)(x-2)-(x-1)(x-4)]}{(x-2)^4} \\ &= \frac{3(x-1)[(x^2-5x+6)-(x^2-5x+4)]}{(x-2)^4} = \frac{6(x-1)}{(x-2)^4}. \end{aligned}$$

Daí a função f'' é positiva nos intervalos $]1,2[$ e $]2,+\infty[$ e é negativa no intervalo $]-\infty,1[$. Segue do Corolário 28.4 que a restrição de f aos intervalos $[1,2[$ e $]2,+\infty[$ tem o gráfico côncavo para cima e a restrição de f ao intervalo $]-\infty,1]$ tem o gráfico côncavo para baixo, o que é ilustrado esquematicamente na figura abaixo.



O ponto 1 é portanto o único ponto de inflexão de f. Determinamos agora as retas assíntotas ao gráfico de f. Como f é contínua e o único ponto de acumulação do domínio que não está no domínio é o ponto 2, temos que a reta vertical $x = 2$ é a única candidata a ser uma assíntota vertical ao gráfico de f. Vamos calcular os limites laterais de f no ponto 2. Temos

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty,$$

donde segue que de fato $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico. De (30.1) e (30.2) segue que o gráfico de f não possui assíntotas horizontais. Quanto às assíntotas oblíquas, começamos pelo cálculo do limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-4x^2+4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\big(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}\big)}{x^3\big(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\big)} = 1.$$

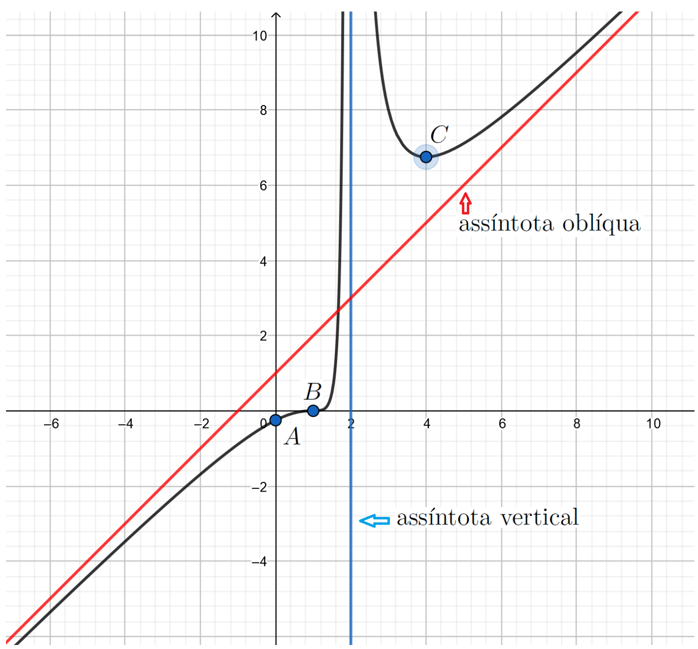
Concluímos então que as retas da forma $y = x + q$, com $q \in \mathbb{R}$, são as candidatas a serem assíntotas oblíquas ao gráfico de f em $+\infty$. Para determinar o valor de q, calculamos o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^3-x(x-2)^2}{(x-2)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-1}{x^2-4x+4}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\big(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\big)}{x^2\big(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\big)}=1.$$

Daí a reta $y=x+1$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de f em $+\infty$. De forma similar, vê-se que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-x\big)=1$$

e conclui-se que a reta $y=x+1$ também é uma assíntota oblíqua ao gráfico de f em $-\infty$. Finalmente, determinamos a interseção do gráfico de f com os eixos coordenados e o valor de f em alguns pontos notáveis. O gráfico de f intersecta o eixo das ordenadas no ponto $\big(0,f(0)\big)=\big(0,-\frac{1}{4}\big)$ e intersecta o eixo das abscissas nos pontos da forma $(x,0)$, em que $x\in D$ é solução da equação $f(x)=0$. A única solução dessa equação é $x=1$ e portanto $(1,0)$ é a única interseção do gráfico de f com o eixo das abscissas. Recorde que 1 é também o único ponto de inflexão de f. Outro ponto notável é o mínimo local que f possui no ponto 4; temos que $f(4)=\frac{27}{4}$.



Com todas essas informações em mãos, o leitor pode agora fazer um bom esboço do gráfico da função f. Acima exibimos um desenho mais preciso do gráfico de f feito num computador, indicando as assíntotas vertical e oblíqua e os pontos notáveis $A=\big(0,-\frac{1}{4}\big)$ (intersecção com o eixo das ordenadas),

$B = (1, 0)$ (inflexão e interseção com o eixo das abscissas) e $C = \big(4, \frac{27}{4}\big)$ (mínimo local).

31. Mais uma aplicação do Teorema do Valor Médio: limite da derivada versus derivada no ponto limite

Nós vimos no Exemplo 26.6 que nem toda função derivável é de classe C^1, isto é, pode acontecer de uma função ser derivável, mas a sua função derivada não ser contínua. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mencionada nesse exemplo é derivável, mas a sua função derivada g' não é contínua no ponto zero, isto é, a derivada de g no ponto zero não é igual ao limite da função g' no ponto zero. Mais especificamente, temos que o limite $\lim_{x\to 0} g'(x)$ não existe e nem mesmo os limites laterais $\lim_{x\to 0^+} g'(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} g'(x)$ existem. Veremos agora que o que ocorreu nesse exemplo específico reflete na verdade um fato mais geral: se g é uma função derivável num intervalo, então a função derivada g' só pode ser descontínua num ponto se o limite de g' nesse ponto não existir. Em outras palavras, há certas restrições sobre o tipo de descontinuidade que uma função que é derivada de outra pode ter, como discutiremos no Exemplo 31.3 adiante.

TEOREMA 31.1. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua, em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo com mais de um ponto. Suponha que f é derivável em todos os pontos de I, exceto talvez por um ponto $a \in I$. Se o limite* $\lim_{x\to a} f'(x)$ *existe e é igual a um certo $L \in [-\infty, +\infty]$, então o limite*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

também existe e é igual a L. Em particular, se o limite $\lim_{x\to a} f'(x)$ *existe e é finito, então f é derivável no ponto a e*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x),$$

ou seja, a função f' é contínua no ponto a.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in I$ com $x \neq a$. Como f é contínua e é derivável em todos os pontos de $I \setminus \{a\}$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio (Teorema 27.1) à restrição de f ao intervalo fechado de extremidades a e x para obter um ponto c no intervalo aberto de extremidades a e x tal que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c). \tag{31.1}$$

Definimos agora uma função $\psi : I \setminus \{a\} \to I \setminus \{a\}$ da seguinte forma: para cada $x \in I \setminus \{a\}$ escolhemos c no intervalo aberto de extremidades a e x tal que a igualdade (31.1) vale e tomamos $\psi(x) = c$. Daí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'\big(\psi(x)\big), \tag{31.2}$$

para todo $x \in I \setminus \{a\}$,

$$a < \psi(x) < x, \tag{31.3}$$

para todo $x \in I$ maior do que a e:

$$x < \psi(x) < a, \tag{31.4}$$

para todo $x \in I$ menor do que a. Da desigualdade (31.3) e do Teorema do Sanduíche (Teorema 4.1) segue que $\lim_{x\to a^+} \psi(x) = a$, se a não for a extremidade direita de I. Similarmente, de (31.4) e do Teorema do Sanduíche segue que $\lim_{x\to a^-} \psi(x) = a$, se a não for a extremidade esquerda de I. Daí:

$$\lim_{x\to a} \psi(x) = a. \tag{31.5}$$

Tendo em mente (31.5) e o fato que $\psi(x) \neq a$ para todo x em $I\setminus\{a\}$, fazemos a substituição de variáveis $y = \psi(x)$ na igualdade

$$\lim_{y\to a} f'(y) = L$$

obtendo:

$$\lim_{x\to a} f'\big(\psi(x)\big) = L; \tag{31.6}$$

esse passo é justificado pelo teorema sobre limites de funções compostas ou, mais especificamente, o item (a) do Teorema 6.3 e o Teorema 8.20 que é a sua adaptação para limites infinitos. A conclusão segue das igualdades (31.2) e (31.6). □

O Teorema 31.1 pode ser usado como uma ferramente prática para calcular a derivada de uma função em um ponto, caso por algum motivo seja mais fácil calcular o limite da função derivada nesse ponto do que calcular a derivada da função nesse ponto diretamente. Porém, a consequência mais interessante desse teorema é a informação que ele nos dá sobre os tipos de descontinuidades que uma função que é derivada de outra pode ter. Antes de continuar, precisamos introduzir alguma terminologia.

Definição 31.2 (descontinuidade de salto e descontinuidade removível). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Dizemos que um ponto $a \in D$ é uma *descontinuidade removível* da função f se a for um ponto de acumulação de D, o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existir, for finito e diferente de $f(a)$. Dizemos que o ponto $a \in D$ é uma *descontinuidade de salto* da função f se a for um ponto de acumulação de $]-\infty, a[\, \cap D$ e de $]a, +\infty[\, \cap D$, ambos os limites laterais

$$\lim_{x\to a^-} f(x), \qquad \lim_{x\to a^+} f(x)$$

existirem, forem finitos e distintos entre si.

Note que se f possui uma descontinuidade removível no ponto a, então podemos tornar f contínua no ponto a simplesmente modificando o valor de f nesse ponto; daí o nome “removível”.

EXEMPLO 31.3 (derivadas não possuem descontinuidades de salto nem removíveis). Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável, em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Se $a \in I$ não é a extremidade direita de I, podemos aplicar o Teorema 31.1 à restrição da função f ao intervalo $[a, +\infty[\, \cap I$ para concluir que, se o limite à direita $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ existe[10], então ele é necessariamente finito e igual a $f'(a)$. Similarmente, se a não é a extremidade esquerda de I, aplicamos o Teorema 31.1 à restrição de f ao intervalo $]-\infty, a] \cap I$ e concluímos que, se o limite à esquerda $\lim_{x\to a^-} f'(x)$ existe, então ele é necessariamente finito e igual a $f'(a)$. Daí, se a função derivada f' for descontínua no ponto a, então um dos limites laterais de f' no ponto a não existe; mais precisamente, uma das seguintes coisas ocorre:

- a é um ponto interior de I e um dos limites laterais de f' no ponto a não existe;
- a é a extremidade direita de I e o limite de f' no ponto a (pela esquerda) não existe;
- a é a extremidade esquerda de I e o limite de f' no ponto a (pela direita) não existe.

Em particular, se f é uma função derivável num intervalo, então a função f' não pode apresentar nem uma descontinuidade de salto nem uma descontinuidade removível. Note que se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função que aparece no Exemplo 25.12 e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $h(x) = g(x)$ para todo $x \geq 0$ e $h(x) = 0$ para todo $x < 0$, então h é derivável e h' é descontínua no ponto zero, sendo que

$$\lim_{x\to 0^-} h'(x) = 0 = h'(0)$$

e o limite pela direita $\lim_{x\to 0^+} h'(x)$ não existe. Portanto, é possível que um dos limites laterais da derivada exista e o outro não.

32. A regra de L'Hospital

As técnicas que estudamos no Capítulo 1 para o cálculo de limites têm um poder bastante limitado e são ineficazes para o cálculo de vários limites até razoavelmente simples, tais como este:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}. \tag{32.1}$$

A regra de L'Hospital é uma técnica poderosa que nos permite calcular limites da forma

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{32.2}$$

que são indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. De maneira informal, a regra de L'Hospital diz que para calcular o limite (32.2) devemos tomar a derivada do numerador f e do denominador g e depois calcular o limite da nova fração $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ quando $x \to a$. Note que *não estamos falando em calcular a*

[10] Podendo a princípio ser igual a $+\infty$ ou a $-\infty$.

derivada do quociente, mas sim em derivar o numerador e o denominador separadamente. O enunciado preciso do teorema que justifica a regra de L'Hospital possui mais algumas hipóteses e é apresentado a seguir.

TEOREMA 32.1 (regra de L'Hospital). *Sejam dados um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, um ponto de acumulação $a \in [-\infty, +\infty]$ de I (que pode ou não pertencer ao intervalo I) e*

$$f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

funções deriváveis. Suponha que

$$g(x) \neq 0 \quad e \quad g'(x) \neq 0, \tag{32.3}$$

para todo $x \in I \setminus \{a\}$. Suponha também que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty \quad e \quad \lim_{x \to a} |g(x)| = +\infty.$$

Se o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{32.4}$$

existe e é igual a um certo $L \in [-\infty, +\infty]$, então o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{32.5}$$

também existe e é igual a L.

A demonstração completa do Teorema 32.1 não é tão simples e será deixada para o final da seção. Vamos primeiro destacar alguns pontos chave do enunciado e trabalhar em alguns exemplos. Em primeiro lugar, note que a regra de L'Hospital só funciona para limites da forma (32.5) que são indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Evidentemente, se o limite não for uma indeterminação, então geralmente é fácil calculá-lo diretamente e a regra de L'Hospital é desnecessária, mas é importante ressaltar que se usarmos a regra de L'Hospital para um limite de quociente que não é uma indeterminação de um desses dois tipos *obteremos provavelmente um resultado errado*. Por exemplo, temos que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x} = 2,$$

mas uma aplicação indevida da regra de L'Hospital produziria o resultado errado:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+1)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{1} = 1.$$

Dois pontos um pouco mais sutis do enunciado são os seguintes: a regra de L'Hospital diz que quando o limite (32.4) obtido derivando o numerador e o denominador existe, então o limite original (32.5) também existe e é igual a (32.4). A recíproca *não* é verdadeira, isto é, é possível que o limite original (32.5) exista, mas o limite (32.4) não exista (Exemplo 32.8). Outra sutileza é que realmente é importante que a derivada do denominador nunca se anule ou, ao menos, nunca se anule próximo ao ponto a em que estamos calculando o limite (veja a Observação 32.2 abaixo para mais detalhes). Na prática, essa hipótese é quase sempre satisfeita, mas há alguns exemplos um pouco exóticos em que ela não é satisfeita e a regra de L'Hospital falha (Exemplo 32.9).

Observação 32.2. Tendo em mente que o limite de uma função num ponto a só depende dos valores que a função assume em pontos próximos de a e diferentes de a (veja o Teorema 2.6 e suas versões[11] para limites infinitos e limites no infinito), vemos que para aplicar a regra de L'Hospital é suficiente que a hipótese (32.3) seja satisfeita apenas para todo $x \in I \setminus \{a\}$ próximo[12] de a. Note também que, pelo Teorema de Rolle (Teorema 27.2), entre dois zeros de uma função derivável num intervalo sempre há um zero da sua derivada; segue daí que se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$ próximo de a, então vale automaticamente que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$ próximo de a. Em outras palavras, precisamos nos preocupar apenas com a ausência de zeros da *derivada* do denominador próximos ao ponto a, mas não com a ausência de zeros do denominador em si.

Vejamos alguns exemplos de aplicação da regra de L'Hospital.

Exemplo 32.3 (uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$). Vamos calcular o limite (32.1) usando a regra de L'Hospital (veremos no Exemplo 33.11 como calculá-lo até de forma mais eficiente usando o polinômio de Taylor). Temos

$$\lim_{x\to 0}(x - \operatorname{sen} x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} x^3 = 0,$$

e portanto o limite (32.1) é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Como a derivada do denominador em (32.1) não se anula para $x \neq 0$, temos que o limite (32.1) é igual a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x - \operatorname{sen} x)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}, \tag{32.6}$$

caso esse limite exista. O limite (32.6) é também uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e pode ser calculado aplicando a regra de L'Hospital novamente. No entanto, esse limite já foi calculado anteriormente no Exemplo 13.1 sem a regra de L'Hospital e o resultado é:

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{6}.$$

Daí o limite (32.1) também é igual a $\frac{1}{6}$.

[11] Item (iii) do Teorema 8.12 e Teorema 8.14.

[12] Se $a \in \mathbb{R}$, isso significa que deve existir $r > 0$ tal que a hipótese (32.3) é satisfeita para todo $x \in I \setminus \{a\}$ tal que $|x - a| < r$. Se $a = +\infty$, então isso significa que deve existir $M \in \mathbb{R}$ tal que a hipótese (32.3) é satisfeita para todo $x > M$ e se $a = -\infty$, então isso significa que deve existir $M \in \mathbb{R}$ tal que a hipótese (32.3) é satisfeita para todo $x < M$.

Exemplo 32.4 (uma indeterminação do tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$). Vamos calcular o limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-3x+5)}{\ln(x^2+x+1)} \tag{32.7}$$

usando a regra de L'Hospital. Temos

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-3x+5)=\lim_{x\to+\infty}x^2\Big(1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\Big)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+x+1)=+\infty,$$

donde

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x^2-3x+5)=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\ln(x^2+x+1)=+\infty$$

e concluímos que o limite (32.7) é uma indeterminação do tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Derivando o numerador e o denominador obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x^2-3x+5)=\frac{2x-3}{x^2-3x+5},\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x^2+x+1)=\frac{2x+1}{x^2+x+1},$$

donde a derivada do denominador é não nula para $x>0$. Concluímos então que o limite (32.7) é igual a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x^2-3x+5)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x^2+x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-3)(x^2+x+1)}{(x^2-3x+5)(2x+1)},$$

caso esse limite exista. Calculando esse limite obtemos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-3)(x^2+x+1)}{(x^2-3x+5)(2x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\big(2-\frac{3}{x}\big)\big(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\big)}{x^3\big(1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\big)\big(2+\frac{1}{x}\big)}=1$$

e portanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-3x+5)}{\ln(x^2+x+1)}=1.$$

A regra de L'Hospital também é útil para calcular limites indeterminados que não são originalmente expressos na forma de um quociente, mas que podem ser transformados em um quociente. O caso mais simples é o de limites de produtos

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x) \tag{32.8}$$

que são indeterminações da forma $0\cdot(\pm\infty)$. O limite (32.8) pode ser reescrito na forma

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

que é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou na forma

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

que é uma indeterminação do tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (na verdade é possível que o denominador $\frac{1}{f(x)}$ não tenda nem a $+\infty$ nem a $-\infty$, mas seu módulo tende a $+\infty$, o que já é suficiente para satisfazer as hipóteses da regra de L'Hospital).

EXEMPLO 32.5 (uma indeterminação do tipo $0 \cdot (\pm\infty)$). Vamos calcular o limite:

$$\lim_{x\to 0} x\ln(e^x - 1). \tag{32.9}$$

Note que o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que a fórmula $x\ln(e^x - 1)$ está bem-definida é $]0, +\infty[$, de modo que:

$$\lim_{x\to 0} x\ln(e^x - 1) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(e^x - 1).$$

O limite (32.9) é uma indeterminação do tipo $0 \cdot (-\infty)$ e podemos reescrevê-lo na forma

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\frac{1}{x}} \tag{32.10}$$

o que nos dá uma indeterminação do tipo $\frac{-\infty}{+\infty}$. A derivada do denominador em (32.10) nunca se anula e portanto a regra de L'Hospital nos diz que o limite (32.10) é igual a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(e^x - 1)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-e^x x^2}{e^x - 1}$$

caso esse limite exista. Temos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-e^x x^2}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0^+} (-e^x x) \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^x - 1} = 0,$$

já que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (Teorema 12.6). Segue que o limite (32.9) é igual a zero.

Limites indeterminados do tipo 0^0, $1^{\pm\infty}$ e $(+\infty)^0$ também podem ser calculados usando a regra de L'Hospital, já que

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

e o cálculo do limite do expoente $g(x)\ln f(x)$ recai no problema do cálculo de um limite indeterminado do tipo $0 \cdot (\pm\infty)$.

EXEMPLO 32.6 (uma indeterminação do tipo 0^0). Vamos calcular o limite

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x},$$

que é uma indeterminação do tipo 0^0. Para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x > 0$, temos:

$$(\operatorname{sen} x)^{(\operatorname{sen} x)} = e^{(\operatorname{sen} x)\ln(\operatorname{sen} x)}.$$

Precisamos agora calcular o limite do expoente:

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)\ln(\operatorname{sen} x).$$

Trata-se de uma indeterminação do tipo $0 \cdot (-\infty)$ que pode ser reescrita como

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{cosec} x}, \tag{32.11}$$

que é uma indeterminação do tipo $\frac{-\infty}{+\infty}$. As derivadas do numerador e do denominador são dadas por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(\operatorname{sen} x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x,$$

e portanto a derivada do denominador é não nula para $0 < x < \frac{\pi}{2}$. A regra de L'Hospital nos diz então que o limite (32.11) é igual a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{cotg} x}{-\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x} = \lim_{x \to 0^+} (-\operatorname{sen} x) = 0.$$

Portanto:

$$\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1.$$

Problemas envolvendo indeterminações do tipo $(+\infty)+(-\infty)$ podem frequentemente ser resolvidos usando a regra de L'Hospital através do seguinte truque: se

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = +\infty,$$

escrevemos

$$F(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad G(x) = \frac{1}{g(x)},$$

de modo que $\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} G(x) = 0$ e

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{F(x)} - \frac{1}{G(x)} = \frac{G(x) - F(x)}{F(x)G(x)},$$

sendo que o limite da última expressão quando $x \to a$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Exemplo 32.7 (uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$). Vamos calcular o limite:

$$\lim_{x \to 0} \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\Big). \tag{32.12}$$

Trata-se de uma indeterminação do tipo $(+\infty) + (-\infty)$ se x tende a zero pela direita e uma indeterminação do tipo $(-\infty) + (+\infty)$ se x tende a zero pela esquerda. Temos

$$\lim_{x \to 0} \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\Big) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x}$$

e esse último limite é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Derivando o numerador e o denominador obtemos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sen} x - x) = \cos x - 1, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x + x \cos x.$$

Como

$$\operatorname{sen} x + x\cos x = x\Big(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x\Big)$$

e $\lim_{x\to 0}\big(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x\big) = 2$, concluímos que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\operatorname{sen} x)$ é diferente de zero para $x \ne 0$ próximo de zero. Aplicando a regra de L'Hospital concluímos então que o limite (32.12) é igual ao limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} \tag{32.13}$$

caso ele exista. O limite (32.13) é também uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e vamos calculá-lo aplicando a regra de L'Hospital novamente. Temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x - 1) = -\operatorname{sen} x,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sen} x + x\cos x) = \cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x = 2\cos x - x\operatorname{sen} x$$

e $\lim_{x\to 0}(2\cos x - x\operatorname{sen} x) = 2 \ne 0$, o que garante que $2\cos x - x\operatorname{sen} x \ne 0$ para x próximo de zero. Concluímos então que o limite (32.13) é igual a

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{2\cos x - x\operatorname{sen} x} = 0$$

e portanto que o limite (32.12) também é igual a zero.

Exemplo 32.8 (a recíproca da regra de L'Hospital não vale). Considere o limite:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x + \operatorname{sen} x}{x}. \tag{32.14}$$

Temos que $x + \operatorname{sen} x \ge x - 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que o Teorema do Sanduíche com um único pão (Teorema 8.18) nos diz que

$$\lim_{x\to +\infty}(x + \operatorname{sen} x) = +\infty$$

e portanto o limite (32.14) é uma indeterminação do tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Evidentemente, a derivada do denominador em (32.14) nunca se anula. Derivando o numerador e o denominador da fração em (32.14) obtemos o novo limite

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x + \operatorname{sen} x)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1 + \cos x}{1} = \lim_{x\to +\infty}(1 + \cos x)$$

que não existe (Exemplo 8.13). Porém, o limite original (32.14) é igual a:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = 1 + \lim_{x\to +\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Vemos então que, assumindo satisfeitas as hipóteses do Teorema 32.1, a existência do limite (32.4) implica na existência do limite (32.5), mas a recíproca não é verdadeira. Em outras palavras, se após a aplicação da regra de L'Hospital obtivermos um limite que não existe, nada podemos concluir sobre o limite original.

EXEMPLO 32.9 (a hipótese de que a derivada do denominador seja não nula é necessária). Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x + \operatorname{sen} x \cos x, \quad g(x) = e^{\operatorname{sen} x}(x + \operatorname{sen} x \cos x) = e^{\operatorname{sen} x} f(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que

$$f(x) \geq x - 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e

$$g(x) \geq e^{\operatorname{sen} x}(x - 1) \geq e^{-1}(x - 1)$$

para todo $x \geq 1$. Segue então do Teorema do Sanduíche com um único pão (Teorema 8.18) que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

e portanto o limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{32.15}$$

é uma indeterminação do tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. As derivadas das funções f e g são dadas por

$$f'(x) = 1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x,$$
$$g'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cos x f(x) + e^{\operatorname{sen} x} f'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cos x (x + \operatorname{sen} x \cos x + 2\cos x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Afirmamos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\cos x}{e^{\operatorname{sen} x}(x + \operatorname{sen} x \cos x + 2\cos x)} = 0. \tag{32.16}$$

De fato, $x + \operatorname{sen} x \cos x + 2\cos x \geq x - 3$ para todo $x \in \mathbb{R}$ donde

$$\lim_{x \to +\infty} (x + \operatorname{sen} x \cos x + 2\cos x) = +\infty$$

e portanto:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x + \operatorname{sen} x \cos x + 2\cos x} = 0;$$

além do mais

$$\left| \frac{2\cos x}{e^{\operatorname{sen} x}} \right| \leq \frac{2}{e^{\operatorname{sen} x}} \leq \frac{2}{e^{-1}} = 2e$$

e daí a igualdade (32.16) segue do Corolário 4.6 do Teorema do Sanduíche[13]. A primeira vista parece agora que podemos usar a regra de L'Hospital para concluir que o limite (32.15) é igual a zero, mas na verdade o limite (32.15) não existe. De fato

$$\frac{f(x)}{g(x)} = e^{-\operatorname{sen} x} \tag{32.17}$$

[13] Mais precisamente, devemos usar o Teorema 8.17 que é a versão do Corolário 4.6 adaptada para limites no infinito.

para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \neq 0$ e o limite $\lim_{x\to+\infty} e^{-\operatorname{sen} x}$ não existe, já que à medida que x tende a $+\infty$ o valor de $e^{-\operatorname{sen} x}$ oscila entre e^{-1} e e (a demonstração rigorosa da não existência desse limite é feita como no Exemplo 8.13). O que deu errado com a regra de L'Hospital aqui? Ocorre que $g'(x)$ não é sempre diferente de zero para x próximo de $+\infty$, isto é, não existe um intervalo da forma $]M, +\infty[$ em que a função g' nunca se anula.

Passemos agora à demonstração da regra de L'Hospital (Teorema 32.1). Antes de demonstrar o caso geral, será instrutivo provar um caso particular do teorema que é bem mais simples. Suponha que:

- o limite (32.5) é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$;
- $a \in I$, as funções $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ estão definidas em todo o intervalo I (inclusive no ponto a) e são deriváveis;
- as derivadas f' e g' são contínuas no ponto a e $g'(a) \neq 0$.

Assumindo tudo isso, temos

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

e a conclusão desejada já segue notando que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

A demonstração do caso geral é consideravelmente mais complicada e requer a seguinte generalização do Teorema do Valor Médio.

Teorema 32.10 (do valor médio generalizado). *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas, em que $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$. Se f e g são deriváveis em todos os pontos do intervalo aberto $]a, b[$ e se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in]a, b[$, então $g(a) \neq g(b)$ e existe $c \in]a, b[$ tal que:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstração. O fato que $g(a) \neq g(b)$ segue do Teorema de Rolle (Teorema 27.2) e do fato que g' nunca se anula em $]a, b[$. Seja $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$h(x) = \big(f(b) - f(a)\big)g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)f(x),$$

para todo $x \in [a, b]$. Temos que h é contínua e é derivável em todos os pontos do intervalo aberto $]a, b[$. Além do mais

$$h(b) - h(a) = \big(f(b) - f(a)\big)\big(g(b) - g(a)\big) - \big(g(b) - g(a)\big)\big(f(b) - f(a)\big) = 0$$

e portanto o Teorema de Rolle nos dá um $c \in]a, b[$ tal que $h'(c) = 0$. Mas

$$h'(c) = \big(f(b) - f(a)\big)g'(c) - \big(g(b) - g(a)\big)f'(c)$$

de onde a conclusão segue. □

Note que o Teorema do Valor Médio usual (Teorema 27.1) é o caso particular do Teorema 32.10 em que $g(x) = x$, para todo $x \in [a, b]$.

Estamos prontos agora para demonstrar a regra de L'Hospital no caso de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$. O caso de indeterminações do tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ é consideravelmente mais complicado e será demonstrado logo depois. A demonstração da regra de L'Hospital no caso de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ pode ser resumida de forma sucinta assim: se adicionamos o ponto a ao domínio das funções f e g e definimos $f(a) = g(a) = 0$, então as funções f e g se tornam contínuas e o Teorema do Valor Médio Generalizado nos dá

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

para algum c entre a e x. Quando $x \to a$, temos que também $c \to a$, já que c fica entre a e x; daí o quociente $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ tende a L e portanto $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Note que esse argumento não se aplica ao caso $a = \pm\infty$, que precisa ser tratado separadamente: isso é feito usando a substituição de variáveis $y = \frac{1}{x}$ para transformar o limite no infinito em um limite no ponto zero. Vamos agora passar esse esboço de prova a limpo.

Demonstração do Teorema 32.1 no caso $\frac{0}{0}$. Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0 \tag{32.18}$$

e vamos mostrar que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Tratemos primeiro o caso em que $a \in \mathbb{R}$. Como I é um intervalo e a é ou um ponto de I ou uma extremidade de I, temos que $J = I \cup \{a\}$ também é um intervalo. Definimos funções $\tilde{f} : J \to \mathbb{R}$ e $\tilde{g} : J \to \mathbb{R}$ fazendo

$$\tilde{f}(x) = f(x) \quad \text{e} \quad \tilde{g}(x) = g(x),$$

para todo $x \in J$ diferente de a e:

$$\tilde{f}(a) = \tilde{g}(a) = 0.$$

Como as funções f e g são deriváveis em todos os pontos de $I \setminus \{a\}$, segue que as funções $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são deriváveis em todos os pontos de $J \setminus \{a\} = I \setminus \{a\}$. Segue de (32.18) e do fato que $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ valem zero no ponto a que as funções $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são contínuas no ponto a. Para qualquer $x \in I$ diferente de a, podemos então aplicar o Teorema do Valor Médio Generalizado (Teorema 32.10) para a restrição das funções $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ ao intervalo fechado de extremidades a e x, já que a derivada de $\tilde{g}$ nunca se anula no interior desse intervalo. Obtemos assim a existência de um ponto c no intervalo aberto de extremidades a e x tal que

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(c)}{\tilde{g}'(c)};$$

daí:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{32.19}$$

Definimos agora uma função $\psi : I \setminus \{a\} \to I \setminus \{a\}$ da seguinte forma: para todo x em $I \setminus \{a\}$, escolhemos c no intervalo aberto de extremidades a e x tal que a igualdade (32.19) vale e tomamos $\psi(x) = c$. Daí

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'\big(\psi(x)\big)}{g'\big(\psi(x)\big)}, \tag{32.20}$$

para todo $x \in I \setminus \{a\}$,

$$a < \psi(x) < x, \tag{32.21}$$

para todo $x \in I$ maior do que a e

$$x < \psi(x) < a, \tag{32.22}$$

para todo $x \in I$ menor do que a. O Teorema do Sanduíche (Teorema 4.1) e a desigualdade (32.21) nos dão que $\lim_{x\to a^+} \psi(x) = a$, se a não for a extremidade direita de I; similarmente, o Teorema do Sanduíche e a desigualdade (32.22) nos dão que $\lim_{x\to a^-} \psi(x) = a$, se a não for a extremidade esquerda de I. Portanto:

$$\lim_{x\to a} \psi(x) = a.$$

Usamos agora o teorema sobre o limite de funções compostas[14] e obtemos:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'\big(\psi(x)\big)}{g'\big(\psi(x)\big)} = \lim_{y\to a} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L.$$

Segue então de (32.20) que também

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L,$$

como queríamos demonstrar. Vamos tratar agora do caso $a = +\infty$. Definimos um intervalo J fazendo

$$J = \big\{ y \in \,]0, +\infty[\, : \tfrac{1}{y} \in I \big\}$$

e funções $\tilde{f} : J \to \mathbb{R}$, $\tilde{g} : J \to \mathbb{R}$ por

$$\tilde{f}(y) = f\big(\tfrac{1}{y}\big), \quad \tilde{g}(y) = g\big(\tfrac{1}{y}\big),$$

para todo $y \in J$. Temos que 0 é um ponto de acumulação do intervalo J e:

$$\lim_{y\to 0} \tilde{f}(y) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{y\to 0} \tilde{g}(y) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0.$$

Além do mais, as funções $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são deriváveis e

$$\tilde{g}(y) \neq 0, \quad \tilde{f}'(y) = -\frac{f'\big(\frac{1}{y}\big)}{y^2}, \quad \tilde{g}'(y) = -\frac{g'\big(\frac{1}{y}\big)}{y^2} \neq 0,$$

[14] Mais precisamente, usamos o item (a) do Teorema 6.3 e o Teorema 8.20 que é sua adaptação para limites infinitos.

para todo $y \in J$. Daí

$$\lim_{y \to 0} \frac{\tilde{f}'(y)}{\tilde{g}'(y)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

e aplicando o caso da regra de L'Hospital que já demonstramos concluímos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0} \frac{\tilde{f}(y)}{\tilde{g}(y)} = L.$$

A demonstração do teorema no caso $a = -\infty$ é idêntica, trocando apenas a definição do intervalo J por $J = \big\{y \in \left]-\infty, 0\right[: \frac{1}{y} \in I\big\}$. $\square$

Passamos agora à demonstração da regra de L'Hospital para indeterminações do tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. A ideia central da prova é usar o fato que

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty, \quad \lim_{x \to a} |g(x)| = +\infty$$

para escolher para cada ponto $x \in I \setminus \{a\}$ um outro ponto $\lambda(x) \in I \setminus \{a\}$ de modo que x esteja muito mais próximo de a do que $\lambda(x)$, fazendo com que $|f(x)|$ seja muito maior do que $\big|f\big(\lambda(x)\big)\big|$ e $|g(x)|$ seja muito maior do que $\big|g\big(\lambda(x)\big)\big|$. Mais especificamente, queremos garantir que

$$\lim_{x \to a} \frac{f\big(\lambda(x)\big)}{f(x)} = 0, \quad \lim_{x \to a} \frac{g\big(\lambda(x)\big)}{g(x)} = 0 \tag{32.23}$$

e esse $\lambda(x)$ deve ser escolhido também de modo que $\lim_{x \to a} \lambda(x) = a$. De (32.23) seguirá que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f\big(\lambda(x)\big)}{g(x) - g\big(\lambda(x)\big)}$$

pois $f(x)$ é o termo dominante no numerador da fração

$$\frac{f(x) - f\big(\lambda(x)\big)}{g(x) - g\big(\lambda(x)\big)} \tag{32.24}$$

e $g(x)$ é o termo dominante no denominador. O Teorema do Valor Médio Generalizado pode agora ser usado para reescrever a fração (32.24) na forma $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ e daí finalizamos o argumento como na demonstração da regra de L'Hospital para indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$. Vejamos agora os detalhes.

Demonstração do Teorema 32.1 no caso $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Suponha que

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} |g(x)| = +\infty. \tag{32.25}$$

Para mostrar que $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$, nós trataremos os limites laterais[15] no ponto a separadamente, isto é, nós mostraremos que

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)} = L, \tag{32.26}$$

se a não for a extremidade esquerda do intervalo I e que

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L, \tag{32.27}$$

se a não for a extremidade direita do intervalo I. Como a demonstração da igualdade (32.26) é totalmente análoga à demonstração da igualdade (32.27), nós vamos mostrar apenas a igualdade (32.27) supondo que a não é a extremidade direita de I. Segue de (32.25) que as funções f e g não se anulam perto do ponto a (na verdade, g não se anula nunca, de acordo com as hipóteses do teorema) e podemos então para fins do cálculo do limite no ponto a assumir que f e g nunca se anulam. Mais precisamente, podemos escolher um ponto $b \in I$, com $b > a$, de modo que f e g nunca se anulam no intervalo

$$J = \left]a, b\right[$$

e consideramos a partir de agora apenas as restrições de f e g a esse intervalo.

A parte mais delicada da demonstração é a construção de uma função $\lambda : J \to J$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $\lambda(x) > x$, para todo $x \in J$;

(ii) $\lim_{x\to a^+}\lambda(x) = a$;

(iii) os limites

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f\big(\lambda(x)\big)}{f(x)} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^+}\frac{g\big(\lambda(x)\big)}{g(x)}$$

são iguais a zero.

A demonstração da existência da função λ será deixada para o final. Vamos primeiro verificar que a condição (iii) implica que:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x) - f\big(\lambda(x)\big)}{g(x) - g\big(\lambda(x)\big)}. \tag{32.28}$$

Para cada $x \in J$, como $f(x) \ne 0$ e $g(x) \ne 0$, podemos escrever

$$\frac{f(x) - f\big(\lambda(x)\big)}{g(x) - g\big(\lambda(x)\big)} = \frac{f(x)}{g(x)}\,\frac{1 - \frac{f(\lambda(x))}{f(x)}}{1 - \frac{g(\lambda(x))}{g(x)}}$$

---

[15] Se $a = \pm\infty$, então a rigor não falamos em "limites laterais" no ponto a. Para $a = +\infty$, o limite pela esquerda (32.26) deve ser entendido simplesmente como sendo o limite quando $x \to a$ e o limite pela direita (32.27) deve ser desconsiderado. A situação se reverte para $a = -\infty$.

e daí:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f\big(\lambda(x)\big)}{g(x) - g\big(\lambda(x)\big)} \, \frac{1 - \frac{g(\lambda(x))}{g(x)}}{1 - \frac{f(\lambda(x))}{f(x)}}.$$

Como a condição (iii) implica que o segundo fator do lado direito da igualdade acima tende a 1 quando $x \to a^+$, estabelecemos a igualdade (32.28). Para completar a demonstração do teorema, basta agora mostrar que:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f\big(\lambda(x)\big)}{g(x) - g\big(\lambda(x)\big)} = L.$$

Para isso, nós usamos a condição (i) e o Teorema do Valor Médio Generalizado (Teorema 32.10) para obter uma função $\psi : J \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in J$ vale que

$$x < \psi(x) < \lambda(x) \tag{32.29}$$

e também vale a igualdade:

$$\frac{f(x) - f\big(\lambda(x)\big)}{g(x) - g\big(\lambda(x)\big)} = \frac{f'\big(\psi(x)\big)}{g'\big(\psi(x)\big)}.$$

Da condição (ii) e das desigualdades (32.29) segue que

$$\lim_{x \to a^+} \psi(x) = a$$

e daí como na demonstração da regra de L'Hospital para indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ obtemos

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f\big(\lambda(x)\big)}{g(x) - g\big(\lambda(x)\big)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'\big(\psi(x)\big)}{g'\big(\psi(x)\big)} = \lim_{y \to a} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L$$

fazendo a substituição $y = \psi(x)$. Isso conclui a demonstração do teorema a menos da construção da função $\lambda : J \to J$ satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii). Essa construção é um tanto mais técnica e depende de uma habilidade maior em lidar com a definição de limite. Apresentamos um esboço. O primeiro passo é usar a definição de limite e as igualdades (32.25) para produzir uma sequência estritamente decrescente

$$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > \cdots$$

de pontos de J tal que $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$ e tal que:

$$|f(x)| \geq n|f(x_n)|, \quad |g(x)| \geq n|g(x_n)|, \tag{32.30}$$

para todo $x \in J$ com $x \leq x_{n+1}$ e todo inteiro positivo n. A construção dessa sequência é feita recursivamente: tomamos primeiro um $x_1 \in J$ arbitrário. Depois, para um dado $x_n \in J$, usamos (32.25) para obter $x_{n+1} < x_n$ em

J tal que (32.30) vale para todo $x \in J$ com $x \leq x_{n+1}$. A escolha de x_{n+1} também deve ser feita tomando o cuidado[16] de garantir que:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a. \tag{32.31}$$

Agora a função λ é definida assim: dado x em J, se $x > x_2$, escolhemos um $\lambda(x) \in J$ arbitrário com $\lambda(x) > x$. Se $x \leq x_2$, existe um único inteiro positivo n tal que $x_{n+2} < x \leq x_{n+1}$ e aí tomamos $\lambda(x) = x_n$. Segue então de (32.30) que para todo $x \in J$ com $x \leq x_2$ vale que

$$|f(x)| \geq n(x)\big|f\big(\lambda(x)\big)\big|, \quad |g(x)| \geq n(x)\big|g\big(\lambda(x)\big)\big|, \tag{32.32}$$

em que $n(x)$ é o único inteiro positivo tal que $x_{n(x)+2} < x \leq x_{n(x)+1}$. A condição (ii) agora segue de (32.31) e a condição (iii) segue de (32.32) verificando antes que:

$$\lim_{x \to a^+} n(x) = +\infty. \qquad \square$$

33. O polinômio de Taylor

Nesta seção nós estudaremos um método para produzir polinômios que aproximam os valores que uma função f dada assume em pontos x que são próximos a um certo ponto a fixado no domínio de f. A título de motivação, começamos olhando para os casos mais simples, que são os casos em que a aproximação polinomial para a função f é um polinômio constante ou um polinômio de grau 1. Seja então $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in D$ um ponto de acumulação de D. Se a função f for contínua no ponto a, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

o que significa que o valor de $f(x)$ é próximo de $f(a)$ quando x é próximo de a. Dito de outro modo, o erro $f(x) - f(a)$ que cometemos ao aproximar $f(x)$ pelo polinômio constante $p_0(x) = f(a)$ é pequeno quando x é próximo de a, ou seja:

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) - p_0(x)\big) = \lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) = 0. \tag{33.1}$$

Por exemplo, a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ é contínua no ponto $a = 0$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$, o que significa que $\operatorname{sen} x$ é próximo de zero para x próximo de zero. Se além de contínua a função f for derivável no ponto a, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \Longrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0.$$

Essa última igualdade nos diz o seguinte: se

$$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

---

[16] Basta fazer o seguinte: se $a > -\infty$, escolhemos sempre $x_{n+1} < a + \frac{1}{n}$ e se $a = -\infty$, escolhemos sempre $x_{n+1} < -n$.

é a função cujo gráfico é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $\big(a, f(a)\big)$, então a diferença $f(x) - p_1(x)$ não só tende a zero quando x tende a a, mas ela tende a zero *mais rápido do que* $x - a$ quando x tende a a, isto é:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - p_1(x)}{x - a} = 0. \tag{33.2}$$

Por exemplo, olhando de novo para o caso $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $a = 0$, temos $f(a) = 0$, $f'(a) = 1$ e $p_1(x) = x$. Daí, para x próximo de zero, erramos menos ao aproximar $\operatorname{sen} x$ por x do que ao aproximar simplesmente $\operatorname{sen} x$ por zero: o erro que cometemos ao aproximar $\operatorname{sen} x$ por zero tende a zero quando x tende a zero, mas o erro que cometemos ao aproximar $\operatorname{sen} x$ por x tende a zero *mais rápido do que* x quando x tende a zero, isto é:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x} = 0.$$

Note que a função p_1 cujo gráfico é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $\big(a, f(a)\big)$ é um polinômio de grau menor ou igual a 1. Mais especificamente, se $f'(a) \neq 0$, então o grau de p_1 é exatamente igual a 1 e se $f'(a) = 0$ e $f(a) \neq 0$, então o grau de p_1 é igual a zero. Se $f(a) = f'(a) = 0$, então p_1 é o polinômio nulo, para o qual não se define[17] grau, porém vamos convencionar por conveniência que, daqui em diante, quando falamos em "polinômio de grau menor ou igual a n" ou "polinômio de grau menor do que n" estamos incluindo aí a possibilidade de o polinômio ser nulo. Uma outra forma de comparar o polinômio p_1 com a função f no ponto a é dizer que f e p_1 possuem o mesmo valor e derivada no ponto a, ou seja:

$$f(a) = p_1(a) \quad \text{e} \quad f'(a) = p_1'(a).$$

Pensando em f e p_1 como funções que descrevem equações horárias de partículas (isto é, funções que nos dão a posição da partícula em função do tempo), temos que f e p_1 correspondem a partículas que passam pelo mesmo ponto com a mesma velocidade no instante a. Daí, é de se esperar que as trajetórias das duas partículas se mantenham razoavelmente próximas em instantes de tempo x próximos a a. Note que o fato que p_1 é um polinômio de grau menor ou igual a 1 nos diz que a partícula correspondente a p_1 possui velocidade constante. Se considerarmos agora uma partícula, com equação horária descrita por uma função p_2, que no instante a passa pelo mesmo ponto com a mesma velocidade *e aceleração* que a partícula cuja equação horária é descrita por f, então seria de se esperar que as trajetórias das partículas correspondentes a f e a p_2 ficassem ainda mais próximas

[17]De fato, dizemos que um polinômio p tem grau n se puder ser escrito na forma

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

em que c_n é diferente de zero; daí o polinômio nulo não tem grau definido. Porém, muitas vezes é conveniente convencionar que o polinômio nulo tem grau igual a $-\infty$, pois isso faz com que seja válida a fórmula que diz que o grau do produto de dois polinômios p e q é igual à soma do grau de p com o grau de q, mesmo quando $p = 0$ ou $q = 0$.

em instantes de tempo x próximos a a. A função p_2 satisfaz as seguintes condições:

$$f(a) = p_2(a), \quad f'(a) = p_2'(a) \quad \text{e} \quad f''(a) = p_2''(a); \tag{33.3}$$

evidentemente, aqui devemos supor que f é duas vezes derivável no ponto a. Se a partícula cuja equação horária é descrita por p_2 possui aceleração constante, então p_2 será um polinômio de grau menor ou igual a 2. Assim, o problema de encontrar a equação horária de uma partícula com aceleração constante que no instante a possui a mesma posição, velocidade e aceleração que a partícula correspondente a f é equivalente ao problema de encontrar uma função polinomial p_2 de grau menor ou igual a 2 tal que as igualdades (33.3) são satisfeitas. Mais geralmente, se f é n vezes derivável no ponto a, podemos estudar o problema de encontrar uma função polinomial p_n de grau menor ou igual a n tal que:

$$f^{(k)}(a) = p_n^{(k)}(a), \qquad \text{para todo } k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{33.4}$$

Como veremos mais adiante (Corolário 33.10), se o domínio de f é um intervalo, então a condição (33.4) implica que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{33.5}$$

A igualdade (33.5) é a generalização para n arbitrário da condição (33.2) satisfeita pelo polinômio p_1 de grau menor ou igual a 1 que possui o mesmo valor e derivada que f no ponto a e da condição (33.1) satisfeita pelo polinômio constante p_0 que possui o mesmo valor que f no ponto a. A condição (33.5) nos diz que o erro $f(x) - p_n(x)$ que cometemos ao aproximar $f(x)$ pelo polinômio $p_n(x)$ tende a zero mais rápido do que $(x-a)^n$ quando x tende a a. Essa é uma forma de expressar o fato que o erro $f(x) - p_n(x)$ se torna cada vez menor à medida que usamos polinômios aproximantes p_n de grau cada vez maior. No entanto, como veremos no Exemplo 33.21, em alguns casos não é verdade que o erro $f(x) - p_n(x)$ tende a zero quando n tende a infinito, para um ponto fixado x próximo de a. Observamos que a igualdade (33.5) nos dá apenas uma estimativa assintótica da ordem de grandeza do erro que cometemos ao aproximar $f(x)$ por $p_n(x)$ quando x tende a a e não dá muita informação sobre o tamanho desse erro para um valor específico de x. Um método para estimar mais concretamente o tamanho desse erro será dado pelo Teorema 33.17.

Terminada essa introdução, vejamos como determinar os polinômios aproximantes p_n. O nosso primeiro passo será encontar uma fórmula para uma função polinomial p de grau menor ou igual a n cujo valor e cujas n primeiras derivadas num ponto $a \in \mathbb{R}$ são dadas. Começamos pelo caso $a = 0$. Dados inteiros não negativos k e n, vamos calcular o valor da derivada k-ésima

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\, x^n$$

da função $f(x) = x^n$. Se $n \geq 1$, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^n = n x^{n-1},$$

e se $n \geq 2$ temos:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\, x^n = n(n-1)x^{n-2}.$$

É fácil ver então que para $n \geq k$ vale que:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\, x^n = n(n-1)(n-2)\cdots\big(n-(k-1)\big)x^{n-k}.$$

Se $k = n$, então

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\, x^n = n!,$$

e para $k > n$ vale que:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\, x^n = 0.$$

Avaliando as identidades acima em $x = 0$, obtemos:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\, x^n\Big|_{x=0} = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq n, \\ n!, & \text{se } k = n, \end{cases} \tag{33.6}$$

em que k e n são inteiros não negativos arbitrários. Usando (33.6), podemos agora calcular facilmente as derivadas de ordem superior no ponto zero de uma função polinomial qualquer. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial dada por

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0, \tag{33.7}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, em que n é um inteiro não negativo e $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Segue de (33.6) que a k-ésima derivada de p no ponto zero é dada por

$$p^{(k)}(0) = k! c_k,$$

para todo inteiro não negativo $k \leq n$; se k é um inteiro maior do que n, então a k-ésima derivada de p é nula em todo ponto. Essas considerações demonstram o seguinte resultado.

Teorema 33.1 (polinômio com derivadas prescritas no ponto zero). *Sejam n um inteiro não negativo e a_0, a_1, $\ldots$, a_n números reais. Temos que existe uma única função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grau menor ou igual a n tal que $p^{(k)}(0) = a_k$, para todo $k = 0, 1, \ldots, n$. Além do mais, essa função polinomial p é dada por*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \frac{a_3}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n!}x^n,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. □

Vamos agora tratar do problema de encontrar uma função polinomial de grau menor ou igual a n com valor e derivadas de ordem até n prescritas num ponto dado arbitrário $a \in \mathbb{R}$. Como proceder? Se escrevemos p na forma (33.7), então as expressões explícitas para as derivadas de ordem superior de p no ponto a não ficam tão simples como as derivadas de ordem superior de p no ponto zero. A forma inteligente de resolver esse problema é escrever $p(x)$ em termos de potências de $x - a$ em vez de potências de x. Em primeiro lugar, note que para qualquer inteiro não negativo n, quaisquer números reais c_0, c_1, $\ldots$, c_n e qualquer $a \in \mathbb{R}$, temos que a função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$p(x) = c_n(x-a)^n + c_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots + c_1(x-a) + c_0, \tag{33.8}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, é uma função polinomial de grau menor ou igual a n. Afirmamos que *toda* função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grau menor ou igual a n pode ser escrita na forma (33.8). De fato, se

$$p(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

é uma função polinomial arbitrária de grau menor ou igual a n, então a função $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(x) = p(x+a) = b_n(x+a)^n + b_{n-1}(x+a)^{n-1} + \cdots + b_1(x+a) + b_0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, é uma função polinomial de grau menor ou igual a n e portanto pode ser escrita na forma

$$q(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

para certos coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Daí

$$p(x) = q(x-a) = c_n(x-a)^n + c_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots + c_1(x-a) + c_0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 33.2 (reescrevendo um polinômio em potências de $x - a$). Considere a função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 3,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Vamos escrevê-la usando potências de $x - 2$ em vez de potências de x. Para isso, definimos $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $q(x) = p(x+2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e daí calculamos como segue:

$$\begin{aligned} q(x) = p(x+2) &= (x+2)^3 - 2(x+2)^2 + 5(x+2) - 3 \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 2x^2 - 8x - 8 + 5x + 10 - 3 \\ &= x^3 + 4x^2 + 9x + 7. \end{aligned}$$

Concluímos então que

$$p(x) = q(x-2) = (x-2)^3 + 4(x-2)^2 + 9(x-2) + 7,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Uma vez que uma função polinomial é escrita em termos de potências de $x-a$ como em (33.8), é fácil calcular as suas derivadas de ordem superior no ponto a. De fato, note primeiro que

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x-a)^n\Big|_{x=a} = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq n, \\ n!, & \text{se } k = n, \end{cases}$$

para quaisquer inteiros não negativos k e n. Daí, se p é dado por (33.8), temos que

$$p^{(k)}(a) = k!c_k, \tag{33.9}$$

para todo inteiro não negativo $k \leq n$. Nós provamos então a seguinte generalização do Teorema 33.1.

Teorema 33.3 (polinômio com derivadas prescritas num ponto). *Sejam n um inteiro não negativo e a_0, a_1, ..., a_n números reais. Para qualquer $a \in \mathbb{R}$, temos que existe uma única função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grau menor ou igual a n tal que $p^{(k)}(a) = a_k$, para todo $k = 0, 1, \ldots, n$. Além do mais, essa função polinomial p é dada por*

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + \frac{a_2}{2!}(x-a)^2 + \frac{a_3}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{a_n}{n!}(x-a)^n,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. □

Exemplo 33.4 (reescrevendo um polinômio em potências de $x-a$, segundo método). Considere a função polinomial p que aparece no Exemplo 33.2. Uma outra forma de escrever $p(x)$ usando potências de $x-2$ é através da fórmula (33.9) que nos dá que o coeficiente c_k de $(x-2)^k$ deverá ser igual à k-ésima derivada de p no ponto 2 dividida por $k!$. Em outas palavras, temos

$$p(x) = p(2) + p'(2)(x-2) + \frac{p''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{p'''(2)}{3!}(x-2)^3, \tag{33.10}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Calculamos então primeiro as derivadas de p num ponto $x \in \mathbb{R}$ qualquer, como segue:

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 3, \quad p'(x) = 3x^2 - 4x + 5,$$
$$p''(x) = 6x - 4, \quad p'''(x) = 6;$$

agora avaliamos essas derivadas no ponto 2:

$$p(2) = 7, \quad p'(2) = 9, \quad p''(2) = 8, \quad p'''(2) = 6.$$

Usando (33.10) obtemos então

$$p(x) = 7 + 9(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, como já havíamos visto no Exemplo 33.2.

Tendo em mãos o Teorema 33.3, podemos agora introduzir a definição central desta seção.

Definição 33.5 (polinômio de Taylor). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in D$ um ponto de acumulação de D. Dado um inteiro não negativo n, se f for n vezes derivável no ponto a, então o *polinômio de Taylor de ordem n de f em torno do ponto a* é o único polinômio p de grau menor ou igual a n tal que $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, para todo $k = 0, 1, \dots, n$.

Em vista do Teorema 33.3, temos que o polinômio de Taylor p de ordem n de f em torno do ponto a é dado por

$$\begin{aligned} p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \end{aligned} \tag{33.11}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Note que o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de a nem sempre tem grau n. De fato, o grau desse polinômio é menor do que n se, e somente se, $f^{(n)}(a) = 0$.

Exemplo 33.6 (polinômio de Taylor da função exponencial). Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que $f' = f$ e portanto $f^{(k)} = f$, para todo inteiro não negativo k. Daí

$$f^{(k)}(0) = e^0 = 1,$$

e portanto para todo inteiro não negativo n temos que o polinômio de Taylor p de ordem n de f em torno do ponto zero é dado por

$$p(x) = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 33.7 (polinômio de Taylor de seno e cosseno). Vamos determinar os polinômios de Taylor das funções seno e cosseno em torno do ponto zero. As derivadas de ordem superior da função seno, começando pela zero-ésima, estão listadas abaixo:

$$\operatorname{sen}, \quad \cos, \quad -\operatorname{sen}, \quad -\cos, \quad \operatorname{sen}, \quad \cos, \quad -\operatorname{sen}, \quad -\cos, \quad \dots$$

Como a quarta derivada da função seno é a própria função seno, concluímos que essa sequência de derivadas de ordem superior é períodica de período quatro. Avaliando essas derivadas no ponto zero obtemos

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad -1, \quad \dots,$$

ou seja, as derivadas de ordem par da função seno calculadas em zero são todas iguais a zero e as derivadas de ordem ímpar da função seno calculadas em zero são todas iguais a 1 e a -1, sendo que o sinal se alterna. Para todo inteiro não negativo n, temos então que o polinômio de Taylor p de ordem $2n+1$ da função seno em torno do ponto zero é dado por

$$p(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Note que esse também é o polinômio de Taylor de ordem $2n+2$ da função seno em torno de zero, já que a derivada de ordem $2n+2$ da função seno no ponto zero é nula. No caso da função cosseno, são as derivadas de ordem ímpar que se anulam no ponto zero e as derivadas de ordem par no ponto zero que se alternam entre 1 e -1. Assim, para todo inteiro não negativo n, o polinômio de Taylor q de ordem $2n$ da função cosseno em torno do ponto zero é dado por

$$q(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Esse também é o polinômio de Taylor de ordem $2n+1$ da função cosseno em torno de zero, já que a derivada de ordem $2n+1$ da função cosseno no ponto zero é nula.

Passemos agora ao problema de estimar o erro que cometemos ao aproximar uma função pelo seu polinômio de Taylor. Antes de mais nada, introduzimos um pouco de terminologia.

Definição 33.8 (resto do polinômio de Taylor). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in D$ um ponto de acumulação de D. Dado um inteiro não negativo n, se f for n vezes derivável no ponto a, então o *resto do polinômio de Taylor de ordem n de f em torno do ponto a* é a função $r : D \to \mathbb{R}$ definida por $r = f - p$, em que p é o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno do ponto a.

Evidentemente, se r é o resto do polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de a, então $r^{(k)}(a) = 0$, para todo $k = 0, 1, \ldots, n$. Vamos agora estabelecer a estimativa assintótica (33.5) para o resto do polinômio de Taylor.

Teorema 33.9 (estimativa assintótica de uma função com derivadas nulas até ordem n num ponto). *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função cujo domínio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo com mais de um ponto e seja $a \in I$. Suponha que f é n vezes derivável no ponto a para um certo inteiro positivo n e que $f^{(k)}(a) = 0$, para todo $k = 0, 1, \ldots, n$. Vale que:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{33.12}$$

Demonstração. Usamos indução em n. Se $n = 1$, o resultado segue diretamente da definição de derivada, já que $f(a) = 0$ e:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a) = 0.$$

Suponha agora que $n \geq 2$ e que o enunciado do teorema seja válido com $n-1$ no lugar de n (e para uma função arbitrária). Como f é duas vezes derivável no ponto a, temos que a restrição de f a um intervalo $J = \,]a-r, a+r[\, \cap I$ é derivável, para algum $r > 0$ (Definição 26.10). Para todo $x \in J$ com $x \neq a$ podemos então aplicar o Teorema do Valor Médio (Teorema 27.1) para a restrição de f ao intervalo fechado de extremidades a e x e obter c no interior desse intervalo de modo que:

$$\frac{f(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c). \tag{33.13}$$

Defina uma função $\psi : J \setminus \{a\} \to J \setminus \{a\}$ escolhendo para cada $x \in J \setminus \{a\}$ um ponto c no intervalo aberto de extremidades a e x satisfazendo (33.13) e tome $\psi(x) = c$. Daí

$$\frac{f(x)}{x-a} = f'\big(\psi(x)\big), \tag{33.14}$$

para todo $x \in J \setminus \{a\}$,

$$a < \psi(x) < x, \tag{33.15}$$

para todo $x \in J$ maior do que a e

$$x < \psi(x) < a, \tag{33.16}$$

para todo $x \in J$ menor do que a. Usando (33.15), (33.16) e o Teorema do Sanduíche (Teorema 4.1), obtemos que ambos os limites laterais — ou o único que fizer sentido, se a for uma extremidade de I — da função ψ no ponto a são iguais a a e portanto:

$$\lim_{x\to a} \psi(x) = a. \tag{33.17}$$

De (33.14), vem

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{f'\big(\psi(x)\big)}{(x-a)^{n-1}}, \tag{33.18}$$

para todo $x \in J$ diferente de a. Como a função derivada f' — ou melhor, a derivada de $f|_J$ — é uma função $n-1$ vezes derivável no ponto a e sua k-ésima derivada no ponto a é nula para $k = 0, 1, \ldots, n-1$, a igualdade (33.12) vale com f' no lugar de f e $n-1$ no lugar de n, isto é:

$$\lim_{y\to a} \frac{f'(y)}{(y-a)^{n-1}} = 0. \tag{33.19}$$

Usando a substituição de variáveis $y = \psi(x)$ em (33.19) (que é justificada pelo item (a) do Teorema 6.3) e (33.17), obtemos:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'\big(\psi(x)\big)}{\big(\psi(x)-a\big)^{n-1}} = 0. \tag{33.20}$$

Da igualdade (33.18) vem

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{f'\big(\psi(x)\big)}{\big(\psi(x)-a\big)^{n-1}} \Big(\frac{\psi(x)-a}{x-a}\Big)^{n-1}, \tag{33.21}$$

para todo $x \in J$ diferente de a. Como $\psi(x)$ está no intervalo aberto de extremidades a e x, obtemos

$$|\psi(x)-a| < |x-a|$$

e portanto

$$\Big|\Big(\frac{\psi(x)-a}{x-a}\Big)^{n-1}\Big| < 1, \tag{33.22}$$

para todo $x \in J$ diferente de a. A conclusão segue agora de (33.21), (33.20), (33.22) e do Corolário 4.6 do Teorema do Sanduíche. □

Corolário 33.10 (estimativa assintótica do resto do polinômio de Taylor). *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função cujo dominio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo com mais de um ponto, n um inteiro positivo e $a \in I$ um ponto em que f é n vezes derivável. Se $r : I \to \mathbb{R}$ denota o resto do polinômio de Taylor de ordem n de f em torno do ponto a, então:*

$$\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{33.23}$$

Demonstração. Basta notar que

$$r^{(k)}(a) = 0,$$

para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. □

Exemplo 33.11 (usando a estimativa assintótica do resto do polinômio de Taylor para calcular limites). O Corolário 33.10 é uma ferramenta muito útil para o cálculo de limites. Por exemplo, vamos usá-lo para calcular o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

que já havíamos calculado usando a regra de L'Hospital (Exemplo 32.3). Usando o polinômio de Taylor de ordem 3 da função seno em torno de zero calculado no Exemplo 33.7 e o Corolário 33.10, obtemos

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + r(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, em que o resto $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz:

$$\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^3} = 0.$$

Daí:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} - r(x)}{x^3} = \frac{1}{6} - \lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Vamos mostrar agora que o polinômio de Taylor de f em torno do ponto a é na verdade o *único* polinômio de grau menor ou igual a n para o qual a estimativa assintótica (33.23) para o resto é válida.

Corolário 33.12 (a estimativa assintótica do resto caracteriza o polinômio de Taylor). *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função cujo dominio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo com mais de um ponto, n um inteiro positivo e $a \in I$ um ponto em que f é n vezes derivável. Se $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial de grau menor ou igual a n tal que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^n} = 0, \tag{33.24}$$

então p é o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno do ponto a.

Demonstração. Seja $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno do ponto a e vamos mostrar que $p = q$. Segue do Corolário 33.10 que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - q(x)}{(x-a)^n} = 0 \tag{33.25}$$

e aí subtraindo (33.24) de (33.25) obtemos:

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x) - q(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{33.26}$$

Se fosse $p \neq q$, aí $p - q$ seria um polinômio não nulo de grau menor ou igual a n e poderíamos escrever $p(x) - q(x) = (x-a)^k r(x)$, em que r é um polinômio tal que $r(a) \neq 0$ e k é um inteiro tal que $0 \le k \le n$. Daí

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x) - q(x)}{(x-a)^k} = \lim_{x\to a} r(x) = r(a) \neq 0$$

e usando (33.26) obtemos

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x) - q(x)}{(x-a)^k} = \lim_{x\to a} \Big(\frac{p(x) - q(x)}{(x-a)^n} (x-a)^{n-k} \Big) = 0,$$

o que nos dá uma contradição. □

O Corolário 33.12 pode ser usado para encontrar o polinômio de Taylor de uma função sem ter que calcular explicitamente as suas derivadas.

Exemplo 33.13 (determinando o polinômio de Taylor sem o cálculo explícito das derivadas). Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = e^x \operatorname{sen} x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Vamos ver como usar o Corolário 33.12 para determinar o polinômio de Taylor da função f em torno de zero usando os polinômios de Taylor de ordem zero das funções exponencial e seno. Note que seria um tanto trabalhoso calcular as derivadas de ordem superior de f explicitamente e usar a fórmula (33.11) para determinar o polinômio de Taylor. No que segue, nós vamos a título de exemplo determinar o polinômio de Taylor de ordem 4 de f em torno de zero, mas usando a mesma técnica poderíamos determinar o polinômio de Taylor de qualquer ordem. Usando o polinômio de Taylor de ordem 3 da função exponencial em torno de zero calculado no

Exemplo 33.6 e o polinômio de Taylor de ordem 4 da função seno em torno de zero calculado no Exemplo 33.7, obtemos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + r_1(x), \tag{33.27}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + r_2(x), \tag{33.28}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, em que o Corolário 33.10 nos dá que os restos $r_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $r_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{r_1(x)}{x^3} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{r_2(x)}{x^4} = 0. \tag{33.29}$$

Multiplicando as igualdades (33.27) e (33.28) obtemos

$$f(x) = \Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\Big)\Big(x - \frac{x^3}{6}\Big) + r(x), \tag{33.30}$$

em que

$$r(x) = r_1(x)\Big(x - \frac{x^3}{6}\Big) + r_2(x)\Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\Big) + r_1(x)r_2(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Usando (33.29) agora é fácil verificar que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x^4} = 0.$$

Expandindo o lado direito de (33.30), obtemos

$$f(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \tilde{r}(x), \tag{33.31}$$

em que

$$\tilde{r}(x) = -\frac{x^5}{12} - \frac{x^6}{36} + r(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e portanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tilde{r}(x)}{x^4} = 0. \tag{33.32}$$

Usando o Corolário 33.12 e as igualdades (33.31) e (33.32), concluímos que o polinômio de Taylor p de ordem 4 da função f em torno de zero é dado por

$$p(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 33.14 (a hipótese de que f seja n vezes derivável no ponto a é fundamental no Corolário 33.12). O Corolário 33.12 nos diz que se a condição (33.24) é satisfeita para algum polinômio p de grau menor ou igual a n, então p é o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno do ponto a, *desde que f seja n vezes derivável no ponto a*. Evidentemente, se f não é n vezes derivável no ponto a, então f nem sequer possui um polinômio de Taylor de ordem n em torno de a bem-definido. Mas será que a condição

(33.24) poderia automaticamente implicar que f seja n vezes derivável no ponto a? Vejamos: em primeiro lugar, note que (33.24) implica que

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-p(x)\big)=\lim_{x\to a}\Big(\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^n}(x-a)^n\Big)=0$$

e portanto:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\big[p(x)+\big(f(x)-p(x)\big)\big]=p(a).$$

Agora, pode bem acontecer que $f(a)\neq p(a)$, já que a condição (33.24) nada tem a dizer sobre o valor de f no ponto a. Podemos simplesmente alterar a vontade o valor de f no ponto a e o limite que aparece em (33.24) não muda de valor. É bem possível portanto que f seja descontínua no ponto a, embora essa descontinuidade será necessariamente removível (Definição 31.2). Suponha então que f seja contínua no ponto a, isto é, que:

$$f(a)=p(a).$$

Como $n\geq 1$, a condição (33.24) nos dá

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-p(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\Big(\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^n}(x-a)^{n-1}\Big)=0,$$

e portanto:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\Big(\frac{f(x)-p(x)}{x-a}+\frac{p(x)-p(a)}{x-a}\Big)=p'(a).$$

Temos então que, se f for contínua no ponto a, então a condição (33.24) (para $n\geq 1$) implica que f é automaticamente derivável no ponto a; daí, se p tem grau menor ou igual a 1, então p é o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno do ponto a. Os resultados positivos terminam aí: para $n\geq 2$, a condição (33.24) já não garante que f seja duas vezes derivável no ponto a, nem mesmo assumindo que f seja contínua. Por exemplo, considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=x^3\operatorname{sen}\frac{1}{x},$$

para todo $x\neq 0$ e $f(0)=0$. Temos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}x\operatorname{sen}\frac{1}{x}=0,$$

ou seja, a condição (33.24) é satisfeita com $n=2$, $p=0$ e $a=0$. Vamos calcular a derivada de f. No ponto zero usamos a definição

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}=0$$

e num ponto $x\neq 0$ calculamos $f'(x)$ usando as regras de derivação:

$$f'(x)=3x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}+x^3\cos\frac{1}{x}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)=3x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}.$$

Vemos agora que a função f não é duas vezes derivável no ponto zero, isto é, a função f' não é derivável no ponto zero já que o limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\Big(3x\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\Big)$$

não existe; de fato, esse limite envolve a soma de uma função cujo limite existe e é finito com outra cujo limite não existe (veja o Exemplo 3.3 e adapte o argumento do Exemplo 3.2 para a função $\cos\frac{1}{x}$).

Uma outra aplicação interessante da estimativa assintótica para o resto do polinômio de Taylor (Corolário 33.10) é uma generalização do critério da derivada segunda (Corolário 27.10). Recorde que esse critério nos permite classificar um ponto crítico de uma função f — isto é, determinar se é um máximo local, um mínimo local ou nenhum dos dois — em termos do sinal da derivada segunda de f nesse ponto. Quando não só a derivada primeira, mas também a derivada segunda de f se anula num ponto, o critério da derivada segunda não nos dá nenhuma informação sobre que tipo de ponto crítico temos. O resultado que provaremos agora nos permite classificar um ponto crítico de uma função f definida num intervalo em termos das derivadas de ordem superior de f nesse ponto, desde que ao menos *alguma* derivada de ordem superior da função no ponto não se anule (isso nem sempre acontece, como veremos no Exemplo 33.16). Mais especificamente, se a é um ponto crítico de f e se n é o menor inteiro positivo tal que $f^{(n)}(a)\neq 0$, então podemos classificar o ponto crítico a olhando para a paridade de n e para o sinal de $f^{(n)}(a)$. Os detalhes estão no enunciado a seguir.

Teorema 33.15 (classificando pontos críticos usando derivadas de ordem superior). *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função cujo dominio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo com mais de um ponto, n um inteiro positivo e $a \in I$ um ponto em que f é n vezes derivável. Suponha que $f^{(k)}(a) = 0$ para $k = 1, \dots, n-1$ e que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Se n é par, temos que:*

(1) *se $f^{(n)}(a) > 0$, então a é um ponto de mínimo local estrito de f;*
(2) *se $f^{(n)}(a) < 0$, então a é um ponto de máximo local estrito de f;*

já se n é ímpar, temos que:

(3) *se a é um ponto interior de I, então a não é nem um ponto de máximo local nem um ponto de mínimo local de f;*
(4) *se a é a extremidade esquerda de I e se $f^{(n)}(a) > 0$, então a é um ponto de mínimo local estrito de f;*
(5) *se a é a extremidade esquerda de I e se $f^{(n)}(a) < 0$, então a é um ponto de máximo local estrito de f;*
(6) *se a é a extremidade direita de I e se $f^{(n)}(a) > 0$, então a é um ponto de máximo local estrito de f;*
(7) *se a é a extremidade direita de I e se $f^{(n)}(a) < 0$, então a é um ponto de mínimo local estrito de f.*

Demonstração. Temos que o polinômio de Taylor p de ordem n de f em torno de a é dado por

$$p(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\tilde{r}(x) = \frac{r(x)}{(x-a)^n},$$

para todo $x \in I$ diferente de a, em que $r = f - p$ denota o resto. Daí

$$f(x) - f(a) = (x-a)^n\Big(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \tilde{r}(x)\Big), \tag{33.33}$$

para todo $x \in I$ diferente de a. O Corolário 33.10 nos dá

$$\lim_{x\to a} \tilde{r}(x) = 0$$

e portanto:

$$\lim_{x\to a}\Big(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \tilde{r}(x)\Big) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \neq 0;$$

segue então do Teorema 10.1 que

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \tilde{r}(x)$$

possui o mesmo sinal que $f^{(n)}(a)$ para todo $x \in I$ com $x \neq a$ e x próximo de a. Usando agora (33.33) podemos analisar o sinal de $f(x) - f(a)$ para $x \in I$ com $x \neq a$ e x próximo de a em termos do sinal de $x - a$, da paridade de n e do sinal de $f^{(n)}(a)$. Pode-se completar a demonstração através de uma simples análise de casos. Por exemplo, o item (1) é demonstrado assim: se n é par e $f^{(n)}(a) > 0$, então $f(x) - f(a) > 0$ para todo $x \in I$ com $x \neq a$ e x próximo de a, de onde segue que a é um ponto de mínimo local estrito de f. Os outros itens são demonstrados por raciocínios similares. □

Vejamos agora um exemplo de uma função não nula de classe C^∞ que possui todas as derivadas nulas em um ponto. Esse exemplo mostra que há funções de classe C^∞ para as quais mesmo o Teorema 33.15 não permite classificar os pontos críticos da função.

Exemplo 33.16 (uma função não nula com todas as derivadas nulas num ponto). Sejam $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções polinomiais tais que $q(x) \neq 0$ para todo $x > 0$. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\, e^{-\frac{1}{x}},$$

para todo $x > 0$ e $f(x) = 0$, para todo $x \leq 0$. Vamos verificar que a função f é de classe C^∞ e que $f^{(k)}(0) = 0$, para todo inteiro não negativo

k. Começamos verificando que f é contínua. Evidentemente, f é contínua em todo ponto de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0).$$

Para calcular o limite de f no ponto zero pela direita, fatoramos a função polinomial q na forma $q(x) = x^n r(x)$, em que n é um inteiro não negativo e r é uma função polinomial tal que $r(0) \neq 0$. Daí:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{p(x)}{x^n r(x)}\, e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{p(x)}{r(x)} \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n}.$$

Como $r(0) \neq 0$ temos evidentemente que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{p(x)}{r(x)} = \frac{p(0)}{r(0)}$$

e usando a substituição $y = \frac{1}{x}$ obtemos:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^n}{e^y} = 0,$$

já que a exponencial e^y cresce mais rápido do que qualquer potência de y (Teorema 11.14). Segue que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

e portanto que f é contínua. Vamos mostrar agora que f é derivável. Em primeiro lugar, é claro que para todo $x < 0$ vale que f é derivável no ponto x e $f'(x) = 0$. Além do mais, para todo $x > 0$ vale que f é derivável no ponto x e:

$$f'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q(x)^2}\, e^{-\frac{1}{x}} + \frac{p(x)}{x^2 q(x)}\, e^{-\frac{1}{x}} = \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}\, e^{-\frac{1}{x}},$$

em que $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ são as funções polinomiais dadas por:

$$\tilde{p}(x) = x^2\big(p'(x)q(x) - p(x)q'(x)\big) + p(x)q(x) \quad \text{e} \quad \tilde{q}(x) = x^2 q(x)^2,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. A derivada de f no ponto zero é calculada diretamente pela definição. Temos evidentemente

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$$

e usando o mesmo raciocínio que usamos para mostrar que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ vê-se que:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{p(x)}{x q(x)} e^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

Daí f é derivável no ponto zero e $f'(0) = 0$. Agora note que a função f' é dada por uma expressão idêntica àquela que define f, trocando os polinômios p e q por $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$, de onde segue que f' também é derivável e que $f''(0) = 0$. Continuando esse raciocínio (a rigor, usando uma prova por indução) vê-se que f é uma função de classe C^∞ e que $f^{(k)}(0) = 0$, para todo inteiro não negativo k.

O próximo resultado dá uma estimativa concreta para o resto do polinômio de Taylor de uma função. Essa fórmula para o resto do polinômio de Taylor é conhecida como *resto de Lagrange*.

TEOREMA 33.17 (resto de Lagrange). *Sejam n um inteiro não negativo, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^n cujo domínio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, a e x pontos distintos de I e suponha que f é $n+1$ vezes derivável nos pontos do intervalo aberto de extremidades a e x. Se r denota o resto do polinômio de Taylor de ordem n de f em torno do ponto a, então existe um c no intervalo aberto de extremidades a e x tal que:*

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Como $x - a \neq 0$, existe evidentemente um número real K tal que:

$$r(x) = \frac{K}{(n+1)!}(x-a)^{n+1};$$

o que temos que provar é que K é igual a $f^{(n+1)}(c)$ para algum c no intervalo aberto de extremidades a e x. Denotando por p o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno do ponto a, temos:

$$f(x) = p(x) + \frac{K}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{33.34}$$

Com o propósito de mostrar que $K = f^{(n+1)}(c)$ para algum c no intervalo aberto de extremidades a e x, nós vamos olhar para a expressão que aparece do lado direito da igualdade (33.34) e nós vamos pensar nela como uma função de a; mais precisamente, nós vamos definir uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}$ fazendo

$$\begin{aligned}\varphi(t) = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{K}{(n+1)!}(x-t)^{n+1},\end{aligned} \tag{33.35}$$

para todo $t \in I$, de modo que $\varphi(a)$ é igual ao lado direito da igualdade (33.34) e portanto:

$$\varphi(a) = f(x).$$

Como f é de classe C^n e é $n+1$ vezes derivável nos pontos do intervalo aberto de extremidades a e x, temos que φ é contínua e é derivável nos pontos do intervalo aberto de extremidades a e x. Evidentemente, $\varphi(x) = f(x) = \varphi(a)$ e portanto o Teorema de Rolle (Teorema 27.2) nos dá que existe um ponto c no intervalo aberto de extremidades a e x tal que $\varphi'(c) = 0$. Vamos calcular a derivada de φ num ponto t desse intervalo aberto. Para cada $k = 1, \dots, n$, calculamos a derivada do termo

$$\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \tag{33.36}$$

que aparece na expressão (33.35). Temos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k &= \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \frac{f^{(k)}(t)}{k!}[k(x-t)^{k-1}](-1) \\ &= \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}. \end{aligned} \tag{33.37}$$

Daí:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(t) + [f''(t)(x-t) - f'(t)] + \Big[\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - f''(t)(x-t)\Big] \\ &\quad + \cdots + \Big[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\Big] \\ &\quad + \cdots + \Big[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\Big] - \frac{K}{n!}(x-t)^n. \end{aligned}$$

Verifica-se que na soma acima quase tudo se cancela e sobra apenas:

$$\varphi'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{K}{n!}(x-t)^n = \frac{f^{(n+1)}(t) - K}{n!}(x-t)^n.$$

Como $\varphi'(c) = 0$ e $x - c \neq 0$, segue que $K = f^{(n+1)}(c)$, como queríamos demonstrar. □

Antes de ver alguns exemplos de aplicações do Teorema 33.17, vamos mostrar um resultado que é útil para verificar em muitas situações que o resto do polinômio de Taylor de ordem n calculado num ponto x tende a zero quando n tende a $+\infty$.

TEOREMA 33.18 (fatorial cresce mais rápido do que uma exponencial). *Para qualquer número real x, vale que:*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!} = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Teorema 4.2, é suficiente mostrar que:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^n}{n!} = 0.$$

Em primeiro lugar, note que

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{1}\frac{|x|}{2}\cdots\frac{|x|}{n},$$

para qualquer inteiro positivo n. Fixe um inteiro positivo qualquer k tal que $k \geq 2|x|$. Para qualquer inteiro $n \geq k$, temos então

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{1}\frac{|x|}{2}\cdots\frac{|x|}{k-1}\frac{|x|}{k}\frac{|x|}{k+1}\cdots\frac{|x|}{n}$$

em que os $n-k+1$ fatores

$$\frac{|x|}{k}, \quad \frac{|x|}{k+1}, \quad \ldots, \quad \frac{|x|}{n}$$

são menores ou iguais a $\frac{1}{2}$. Daí

$$0 \leq \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{|x|}{1}\,\frac{|x|}{2}\cdots\frac{|x|}{k-1}\,\frac{1}{2^{n-k+1}}, \tag{33.38}$$

para todo inteiro $n \geq k$. Como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-k+1}} = 0,$$

a conclusão segue de (33.38) e do Teorema do Sanduíche para limites no infinito (Teorema 8.17). □

Exemplo 33.19 (estimativa do resto do polinômio de Taylor da função exponencial e estimativa do número e). Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Como vimos no Exemplo 33.6, para um inteiro não negativo n qualquer, temos que o polinômio de Taylor p_n de ordem n de f em torno do ponto zero é dado por

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $r_n = f - p_n$ denota o resto do polinômio de Taylor de ordem n, então para qualquer $x \in \mathbb{R}$ não nulo, o Teorema 33.17 nos diz que existe c no intervalo aberto de extremidades 0 e x tal que:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Evidentemente, $r_n(0) = 0$. Se $x > 0$, então $0 < c < x$ e portanto:

$$0 < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < r_n(x) < \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}; \tag{33.39}$$

já se $x < 0$, então $x < c < 0$ e daí:

$$|r_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{33.40}$$

Usando (33.39), (33.40), o Teorema 33.18 e o Teorema do Sanduíche para limites no infinito (Teorema 8.17), concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty} r_n(x) = 0,$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Como $f = p_n + r_n$, segue que

$$e^x = \lim_{n\to+\infty} p_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\Big(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\Big), \tag{33.41}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular:

$$e = \lim_{n\to+\infty}\Big(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\Big).$$

Como $n! = 2 \cdot 3 \cdots n$ é igual ao produto de $n-1$ fatores maiores ou iguais a 2, temos que $n! \geq 2^{n-1}$ e portanto

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1,$$

em que usamos a fórmula da soma de uma progressão geométrica. Daí

$$2 < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 3,$$

para todo inteiro $n \geq 2$; tomando o limite quando n tende a $+\infty$ nessas desigualdades (Corolário 10.3), obtemos:

$$2 \leq e \leq 3.$$

A estimativa $e \leq 3$ juntamente com (33.39) nos dá

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < r_n(x) < \frac{3^x}{(n+1)!}x^{n+1},$$

para todo $x > 0$ e todo inteiro não negativo n. Em particular

$$\frac{1}{(n+1)!} < r_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}, \tag{33.42}$$

para todo inteiro não negativo n. Como

$$e = e^1 = p_n(1) + r_n(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + r_n(1),$$

as desigualdades em (33.42) nos dão a seguinte estimativa para o número e

$$1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!} < e < 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{3}{(n+1)!}, \tag{33.43}$$

válida para todo inteiro não negativo n. A estimativa (33.43) é muito eficiente para obter aproximações do número e. Por exemplo, usando (33.43) com $n = 5$ obtemos

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} < e < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{3}{720}$$

e fazendo as contas vem

$$2 + \frac{517}{720} < e < 2 + \frac{519}{720}$$

ou em termos da expansão decimal:

$$2{,}7180555\ldots < e < 2{,}7208333\ldots.$$

Exemplo 33.20 (estimativa do resto do polinômio de Taylor da função seno). Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, para todo x em $\mathbb{R}$. Para todo inteiro não negativo n, denote por p_n o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de zero e por $r_n = f - p_n$ o resto correspondente. Como vimos no Exemplo 33.7, vale que

$$p_{2n+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo inteiro não negativo n. Pelo Teorema 33.17, para todo $x \neq 0$, temos que existe c no intervalo aberto de extremidades 0 e x tal que:

$$r_{2n+2}(x) = \frac{f^{(2n+3)}(c)}{(2n+3)!}x^{2n+3}. \tag{33.44}$$

Como $|f^{(2n+3)}(c)| \leq 1$, vem:

$$|r_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}. \tag{33.45}$$

Segue então do Teorema 33.18 que $\lim_{n\to+\infty} r_{2n+2}(x) = 0$ e portanto

$$\operatorname{sen} x = \lim_{n\to+\infty}\Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big), \tag{33.46}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. A desigualdade (33.45) pode ser usada para produzir estimativas concretas sobre o valor do seno de um número real x dado. Por exemplo, suponha que queiramos obter uma estimativa para $\operatorname{sen} 0{,}1$ cometendo um erro inferior a 10^{-7}. Para isso precisamos primeiro encontrar um inteiro não negativo n tal que

$$\frac{0{,}1^{2n+3}}{(2n+3)!} < 10^{-7}.$$

É fácil ver que tomando $n = 1$ essa desigualdade já é satisfeita:

$$\frac{0{,}1^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{1}{10^5\cdot 5!} = \frac{1}{1{,}2\cdot 10^7} < 10^{-7}.$$

Daí

$$\operatorname{sen} 0{,}1 = 0{,}1 - \frac{0{,}1^3}{3!} + r_4(0{,}1) = \frac{599}{6000} + r_4(0{,}1) = 0{,}0998333\ldots + r_4(0{,}1),$$

em que o resto $r_4(0{,}1)$ tem valor absoluto menor do que 10^{-7}. Na verdade, usando a fórmula (33.44) com $n = 1$ e $x = 0{,}1$, obtemos mais especificamente que:

$$r_4(0{,}1) = \frac{\cos c}{120}0{,}1^5,$$

para algum c tal que $0 < c < 0{,}1$. Como $0{,}1 < \frac{\pi}{2}$, temos que $\cos c > 0$ e portanto:

$$0 < r_4(0{,}1) < 10^{-7}.$$

Daí:

$$0{,}0998333\ldots < \operatorname{sen} 0{,}1 < 0{,}0998333\ldots + 10^{-7}.$$

Um raciocínio totalmente análogo ao que foi feito acima pode ser usado para mostrar que

$$\cos x = \lim_{n\to+\infty}\Big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\Big), \tag{33.47}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 33.21 (o resto do polinômio de Taylor de ordem n nem sempre tende a zero quando n tende a infinito). Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, para todo $x > 0$ e $f(x) = 0$, para todo $x \leq 0$. Como vimos no Exemplo 33.16, a função f é de classe C^∞ e $f^{(k)}(0) = 0$, para todo inteiro não negativo k. Em particular, para qualquer inteiro não negativo n, o polinômio de Taylor p_n de f de ordem n em torno do ponto zero é identicamente nulo e o resto correspondente $r_n = f - p_n$ é igual a f. Daí

$$\lim_{n \to +\infty} r_n(x) = f(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo que $f(x) > 0$ para todo $x > 0$.

CAPíTULO 3

Primitivas ("integrais indefinidas")

34. Definição e propriedades elementares

Damos início agora ao estudo de integrais ou, melhor dizendo, de algumas técnicas para se encontrar uma antiderivada de uma função dada. Integrais são uma espécie de generalização de soma e são usadas, por exemplo, para dar definições precisas das noções de área e volume, bem como para calcular áreas e volumes. Integrais são fundamentais em Física para calcular momentos lineares, centros de massa, momentos angulares, momentos de inércia e diversas outras grandezas físicas sempre que optamos por descrever a matéria como um *continuum* em vez de como sendo constituída por partículas isoladas. Integrais também aparecem em Física no cálculo do trabalho realizado por uma força, quando a força depende do tempo (aqui a matéria pode ser discreta — feita de partículas — mas o tempo é um *continuum* e por isso precisamos de uma integral). Existem muitas formas diferentes para se definir a noção de integral, sendo cada uma dessas formas melhor adaptada para um determinado propósito. A noção de integral que normalmente se estuda em cursos elementares de Cálculo Diferencial é a integral de Riemann, que é boa o suficiente para lidar com as funções que tipicamente aparecem nesses cursos e é a mais simples de se definir: a definição de integral de Riemann nada mais é que um limite de somas. Falando de forma bem resumida, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função limitada, então a *integral de Riemann* de f, denotada por

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

é definida assim: escolhemos uma coleção finita de pontos

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$$

no intervalo $[a, b]$ que são usados para produzir uma partição desse intervalo em intervalos menores $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Escolhemos também um ponto τ_i em cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ e olhamos para a soma:

$$\sum_{i=0}^{k-1} f(\tau_i)(t_{i+1} - t_i) = f(\tau_0)(t_1 - t_0) + f(\tau_1)(t_2 - t_1) + \cdots + f(\tau_{k-1})(t_k - t_{k-1}). \tag{34.1}$$

A integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ é então definida como sendo o limite da soma (34.1) quando os comprimentos $t_{i+1} - t_i$ dos intervalos $[t_i, t_{i+1}]$ tendem a zero (a formulação precisa do significado desse limite é feita usando um enunciado do tipo "para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, ..."). Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então a integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ é igual à área da região

$$\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\big\} \tag{34.2}$$

delimitada pelo gráfico de f, pelo eixo das abscissas e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$. As somas (34.1) que se aproximam da integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ são iguais às áreas de regiões formadas por um número finito de retângulos e que se aproximam da região (34.2). A notação $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ para a integral de f é motivada pelo fato que essa integral é uma espécie de soma infinita de produtos $f(x)\,\mathrm{d}x$, em que x percorre o intervalo $[a, b]$ e $\mathrm{d}x$ denota uma perturbação infinitesimal de x (veja a Seção 17 para uma discussão a respeito da história do Cálculo Diferencial e do uso de infinitesimais). A definição de integral de Riemann em termos do limite das somas (34.1) é uma versão precisa dessa ideia intuitiva: o fator $f(x)$ em $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ é trocado pelo valor de f no ponto escolhido τ_i e a perturbação infinitesimal $\mathrm{d}x$ é trocada pelo comprimento $t_{i+1} - t_i$ do intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ que posteriormente fazemos tender a zero[1]. O chamado *Teorema Fundamental do Cálculo* estabelece uma conexão íntima entre a noção de integral e a noção de antiderivada: mais precisamente, esse teorema diz que se uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admite uma integral de Riemann $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (o que ocorre, por exemplo, se f é contínua) e se existe uma função derivável $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $F' = f$, então vale a igualdade:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Por motivos óbvios, uma função F tal que $F' = f$ é chamada uma *antiderivada* ou *primitiva* de f. Em vista dessa conexão íntima entre integrais e primitivas, é muito comum também chamar uma primitiva de uma função de uma integral dessa função. A terminologia tradicional é a seguinte: a integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ é chamada de *integral definida de f de a até b* e uma primitiva F de f é chamada uma *integral indefinida* de f e é denotada normalmente por $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Em outras palavras, primitivas são denotadas da mesma forma que as integrais $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, mas omitindo os extremos de integração a e b. Os nomes "integral definida" e "integral indefinida" são usados porque se uma função f possui uma primitiva F, então ela possui na

[1] Uma outra noção de integral que é mais difícil de definir, mas é bem mais útil para demonstrar teoremas em Análise Matemática é a *integral de Lebesgue*, que generaliza a integral de Riemann, no seguinte sentido: toda função f que admite uma integral de Riemann (isto é, f é uma função limitada para a qual o limite das somas (34.1) existe) admite também uma integral de Lebesgue e nesse caso a integral de Riemann coincide com a integral de Lebesgue.

verdade infinitas outras primitivas $F + C$ obtidas somando uma constante C à função F. Assim, uma integral indefinida é uma integral que não possui uma resposta definida, já que a resposta obtida contém essa *constante de integração* C arbitrária que nas aplicações precisa tipicamente ainda ser determinada utilizando alguma condição adicional imposta pelo problema sobre a função F (o seu valor num ponto dado, por exemplo). A integral definida, por outro lado, tem um número específico como resultado e não envolve uma constante de integração a ser determinada. Neste curso, nós não estudaremos integrais propriamente ditas — ou seja integrais definidas — mas apenas técnicas para encontrar primitivas de funções, ou seja, técnicas para calcular integrais indefinidas. A integração de Riemann, suas aplicações e o Teorema Fundamental do Cálculo fazem parte da ementa do curso de Cálculo II.

Terminada essa introdução informal, passemos às definições e enunciados precisos.

Definição 34.1 (primitiva ou antiderivada). Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, com $D \subset \mathbb{R}$ um subconjunto sem pontos isolados. Dizemos que uma função $F : D \to \mathbb{R}$ é uma *primitiva* (também chamada *antiderivada* ou *integral indefinida*) de f se F for derivável e $F' = f$.

Nessa definição precisamos assumir que o domínio D não tenha pontos isolados para garantir que faça sentido falar da derivada de uma função definida em D em qualquer ponto de D (recorde as Definições 15.1 e 26.1). Na prática, D costuma ser um intervalo com mais de um ponto ou uma união de intervalos com mais de um ponto, caso em que a ausência de pontos isolados é automática. Evidentemente, se F é uma primitiva de f e $C \in \mathbb{R}$ é uma constante, então $F+C$ também é uma primitiva de f. Frequentemente estaremos interessados em funções cujo domínio é um intervalo e nesse caso duas primitivas de f sempre diferem por uma constante, isto é, se F é uma primitiva de f, então *todas* as outras primitivas de f são da forma $F+C$, com $C \in \mathbb{R}$. De fato, a diferença entre duas primitivas de f tem derivada zero e uma função definida em um intervalo cuja derivada é nula é necessariamente constante (item (c) do Teorema 27.4).

Como mencionamos na introdução da seção, uma primitiva de uma função f é normalmente denotada por $\int f(x)\,\mathrm{d}x$; mais precisamente, o fato que F é uma primitiva de f é normalmente expresso da seguinte forma:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C. \tag{34.3}$$

Como discutimos lá, essa notação é motivada pelo Teorema Fundamental do Cálculo que estabelece uma relação entre a primitiva F e a integral definida $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ que nos primórdios do Cálculo Diferencial era pensada como uma espécie de soma infinita de produtos $f(x)\,\mathrm{d}x$, com x percorrendo o intervalo $[a, b]$ e $\mathrm{d}x$ denotando uma perturbação infinitesimal de x. Modernamente, pensamos nesse $\mathrm{d}x$ meramente como uma notação para indicar qual é a "variável de integração", como explicamos a seguir. A situação aqui é similar àquela que ocorre quando queremos escrever a derivada de uma função para a qual não demos um nome (recorde a discussão ao final da Seção 17). Se queremos falar da primitiva de uma função para a qual introduzimos um nome — como f — basta escrever $\int f$ e não faz nenhum sentido poluir essa notação adicionando uma variável x sem significado. No entanto, na prática, na maior parte das vezes queremos falar de primitivas de funções para as quais temos uma fórmula — como x^2e^x — mas para as quais não nos demos ao trabalho de introduzir um nome. Nesse caso, a variável x na frente do símbolo d tem um papel de desambiguação, deixando clara qual é a função que queremos integrar. Por exemplo, se escrevemos apenas

$$\int x^2y^3e^{x+y}$$

não é claro se queremos integrar a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2y^3e^{x+y},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, ou a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(y) = x^2y^3e^{x+y},$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Por outro lado, se escrevemos

$$\int x^2y^3e^{x+y}\,\mathrm{d}x \tag{34.4}$$

fica explícito que queremos integrar f e se escrevemos

$$\int x^2y^3e^{x+y}\,\mathrm{d}y \tag{34.5}$$

fica explícito que queremos integrar g. Ressaltamos aqui que a expressão (34.4) não deve ser entendida como um nome para uma função que é primitiva de f, mas como uma notação para essa primitiva avaliada em x (isto é, se F é uma primitiva de f, a expressão (34.4) denota $F(x)$, não F). Similarmente, a expressão (34.5) deve ser entendida como uma primitiva de g avaliada em y, não como um nome para uma função que é primitiva de g.

Nós vamos adotar a notação (34.3) porque ela é totalmente padrão em livros de Cálculo Diferencial, mas na verdade trata-se de uma notação arcaica e um tanto problemática. A dificuldade com essa notação é que não é muito claro o que é que o termo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ deveria denotar, dado que f possui infinitas primitivas. Aquele "$+\,C$" na igualdade (34.3) supostamente está lá para indicar esse fato: há uma liberdade de somar uma constante arbitrária a uma primitiva de f (se o domínio da função não for um intervalo a liberdade é na verdade maior — veja o Exemplo 34.5). Mas qual primitiva o termo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ denota? Ele denota o *conjunto* de todas as primitivas de f? Essa é uma interpretação possível, mas se vamos levá-lá a sério deveríamos por coerência tratar o termo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ como se ele denotasse um conjunto, o que em geral não é feito em livros de Cálculo Diferencial. Outra opção seria pensar na expressão $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ como uma espécie de "termo multi-valorado" que denota várias coisas ao mesmo tempo, em vez de denotar uma coisa específica. A prática de usar "termos multi-valorados" não é usual na notação matemática e seria necessário esclarecer como interpretar corretamente[2] fórmulas em que termos desse tipo aparecem e tomar cuidados especiais na sua manipulação para não obter contradições. No Exemplo 35.5 veremos uma situação concreta em que essa notação para integral indefinida pode gerar contradições. Em vista dessas dificuldades com a notação $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, nós faremos o seguinte: os enunciados de teoremas conterão sempre uma versão resumida do resultado em que a notação problemática é usada e uma versão mais precisa em que essa notação não é usada. As situações concretas em que essa notação gera problemas ocorrem quando o mesmo termo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ aparece mais de uma vez ao longo de um cálculo e as várias ocorrências desse termo precisam ser entendidas como se referindo a funções diferentes. Nessas situações mais delicadas uma discussão mais cuidadosa será incluída (como no Exemplo 35.6).

Antes de iniciar a apresentação das técnicas de integração, enunciamos um resultado sobre existência de primitivas.

TEOREMA 34.2 (existência de primitivas). *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função cujo domínio $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo com mais de um ponto. Se f é contínua, então f possui uma primitiva.*

A demonstração do Teorema 34.2 usa integração de Riemann juntamente com uma variante do Teorema Fundamental do Cálculo[3] e por isso não podemos apresentá-la agora. Uma pergunta natural que surge a partir do Teorema 34.2 é se funções descontínuas podem ter primitivas e se há funções que não tem primitiva. Sobre a primeira pergunta, recorde que existem funções deriváveis cuja derivada não é contínua (Exemplo 26.6) e daí segue diretamente que existem funções descontínuas que possuem uma primitiva. Sobre a segunda pergunta, recorde que a derivada de uma função derivável em um intervalo nunca possui descontinuidades removíveis ou descontinuidades de salto (Exemplo 31.3) e portanto funções definidas em um intervalo que possuem alguma descontinuidade removível ou de salto nunca possuem uma primitiva.

Passamos agora à apresentação dos primeiros teoremas que nos ajudam a calcular integrais. Todo teorema a respeito do cálculo de derivadas possui um teorema correspondente "reverso" a respeito do cálculo de integrais. A seguir apresentamos as versões "reversas" da regra do tombo, do teorema da derivada da soma e do teorema da derivada do produto de função por

[2]Por exemplo, se $\mathfrak{t}_1$ e $\mathfrak{t}_2$ são "termos multi-valorados", o que uma expressão como $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2$ significa? Significa que o conjunto de *todos* os valores que $\mathfrak{t}_1$ pode assumir é igual ao conjunto de todos os valores que $\mathfrak{t}_2$ pode assumir? Ou significa apenas que *algum* dos valores que $\mathfrak{t}_1$ pode assumir é igual a algum dos valores que $\mathfrak{t}_2$ pode assumir? E o que uma expressão como $\mathfrak{t}_1 < \mathfrak{t}_2$ significa?

[3]Essa variante diz que se f é uma função contínua num intervalo, então a função F definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ é uma primitiva de f.

constante. Listamos também algumas funções cujas primitivas são imediatamente visíveis.

Teorema 34.3 (regra do tombo reversa). *Para qualquer* $b \in \mathbb{R}$ *com* $b \neq -1$ *vale que:*

$$\int x^b \, \mathrm{d}x = \frac{x^{b+1}}{b+1} + C. \tag{34.6}$$

Mais precisamente, para qualquer $b \in \mathbb{R}$ *com* $b \neq -1$ *vale que a função* $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = x^b,$$

para todo $x > 0$ *possui uma primitiva* $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *dada por*

$$F(x) = \frac{x^{b+1}}{b+1},$$

para todo $x > 0$*. Além do mais:*

- *se* $b \geq 0$*, então o que foi enunciado acima vale também trocando os domínios de* f *e* F *por* $[0, +\infty[$*;*
- *se* $b \neq -1$ *é da forma* $\frac{m}{n}$*, com* $m, n \in \mathbb{Z}$ *e* n *ímpar, então o que foi enunciado acima vale também trocando os domínios de* f *e* F *por* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*;*
- *se* $b \geq 0$ *e* b *é da forma* $\frac{m}{n}$*, com* $m, n \in \mathbb{Z}$ *e* n *ímpar, então o que foi enunciado acima vale também trocando os domínios de* f *e* F *por* $\mathbb{R}$*.*

Demonstração. Segue diretamente da regra do tombo, isto é, dos Teoremas 22.4 e 22.6 (veja também Observações 22.5 e 22.7). □

O caso do expoente $b = -1$ ficou de fora do Teorema 34.3, já que evidentemente o lado direito da igualdade (34.6) nem faz sentido nesse caso. Se $b = -1$, a função f é a função dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ e sabemos que o logaritmo neperiano é uma primitiva para essa função (Corolário 21.2). No entanto, o domínio do logaritmo neperiano é apenas o conjunto $]0, +\infty[$ dos números reais positivos, enquanto que podemos tomar como domínio de f o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de todos os reais não nulos. Qual seria uma primitiva para f definida em todo o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$? O resultado abaixo responde essa questão.

Teorema 34.4 (primitiva de $\frac{1}{x}$). *Vale que:*

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln |x| + C. \tag{34.7}$$

Mais precisamente, se $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *é a função definida por* $f(x) = \frac{1}{x}$*, para todo* $x \neq 0$*, então a função* $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *definida por* $F(x) = \ln |x|$*, para todo* $x \neq 0$*, é uma primitiva de* f*.*

Demonstração. Temos

$$F'(x) = \big(\ln' |x|\big) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x| = \frac{1}{|x|} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x|,$$

em que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x| = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

É fácil ver então que $F'(x) = \frac{1}{x}$ tanto para $x > 0$ como para $x < 0$. □

Exemplo 34.5 (todas as primitivas da função $\frac{1}{x}$). Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, para todo $x \neq 0$. Como vimos no Teorema 34.4, o logaritmo neperiano do valor absoluto é uma primitiva de f e, obviamente, qualquer função obtida do logaritmo neperiano do valor absoluto pela soma de uma constante é também uma primitiva de f. Porém, nesse exemplo o domínio de f não é um intervalo e f possui outras primitivas além dessas. De fato, para quaisquer $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, temos que a função $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1, & \text{se } x > 0, \\ \ln(-x) + C_2, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

é uma primitiva de f. Essas são de fato todas as primitivas de f, já que duas primitivas de f diferem por uma função definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ com derivada nula e uma tal função deve ser constante nos intervalos $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$. Note então que a igualdade (34.7) — que aparece em muitos livros de Cálculo Diferencial — não é correta se interpretada como afirmando que todas as primitivas de f são iguais à soma do logaritmo neperiano do valor absoluto com uma constante.

Teorema 34.6 (primitiva da soma). *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$ funções cujo domínio $D \subset \mathbb{R}$ não tem pontos isolados. Se f e g possuem primitivas, então $f + g$ possui uma primitiva e:*

$$\int (f + g)(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mais precisamente, se $F : D \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de f e $G : D \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de g, então $F + G$ é uma primitiva de $f + g$.

Demonstração. Segue diretamente do fato que a derivada da soma é a soma das derivadas (Teorema 18.1). □

Teorema 34.7 (primitiva de produto por constante). *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função cujo domínio $D \subset \mathbb{R}$ não tem pontos isolados. Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, se f possui uma primitiva, então cf possui uma primitiva e:*

$$\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mais precisamente, se $F : D \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de f, então cF é uma primitiva de cf.

Demonstração. Segue diretamente do fato que a derivada do produto de uma função por uma constante é o produto dessa constante pela derivada da função (Teorema 18.3). □

Teorema 34.8 (primitiva da exponencial). *Vale que*

$$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$$

e, mais geralmente, para qualquer $a > 0$ com $a \neq 1$ vale que:

$$\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Em outras palavras, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, é uma primitiva de f.

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 21.3. □

Teorema 34.9 (primitiva de seno e cosseno). *Vale que:*

$$\int \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C \quad e \quad \int \cos x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C.$$

Em outras palavras, a função $-\cos$ *é uma primitiva da função* sen *e a função* sen *é uma primitiva da função* cos.

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 20.1. □

Exemplo 34.10. Vamos calcular a integral indefinida:

$$\int \left(2e^x - \sqrt[3]{x} + 5\cos x\right) \mathrm{d}x.$$

Usando os Teoremas 34.6 e 34.7 obtemos

$$\int \left(2e^x - \sqrt[3]{x} + 5\cos x\right) \mathrm{d}x = 2\int e^x \, \mathrm{d}x - \int x^{\frac{1}{3}} \, \mathrm{d}x + 5\int \cos x \, \mathrm{d}x$$

e usando os Teoremas 34.3, 34.8 e 34.9 vem:

$$\int \left(2e^x - \sqrt[3]{x} + 5\cos x\right) \mathrm{d}x = 2e^x - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 5\operatorname{sen} x + C.$$

Neste ponto, o leitor talvez esteja esperando que o nosso próximo passo seja a apresentação de métodos para calcular a integral indefinida de produtos, quocientes e composições de funções, como fizemos no caso de derivadas. Infelizmente, no caso de integrais a situação é bem mais complicada. Enquanto o cálculo de derivadas pode ser realizado por uma simples aplicação mecânica de algumas poucas regras, o mesmo não vale para integrais. Não há uma regra geral simples para se calcular integrais de produtos, quocientes ou composições. Calcular integrais indefinidas é difícil! Há uma série de resultados e técnicas relevantes que estudaremos neste capítulo, mas a resolução de um dado problema específico em geral pode exigir considerável engenhosidade[4]. Além do mais, existem muitas funções elementares que não admitem uma primitiva elementar. Uma *função elementar* é uma função que pode ser "expressa por uma fórmula" ou, mais precisamente, uma função que pode ser obtida usando um número finito de somas, produtos, quocientes e composições juntamente com funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e trigonométricas inversas. Pequenas mudanças na fórmula de uma função podem transformar uma função cuja primitiva é muito fácil de calcular em uma função cuja primitiva é muito difícil de calcular ou até mesmo numa função que não admite primitiva elementar. Por exemplo, enquanto

$$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$$

é uma integral das mais fáceis de se calcular, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{x^2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, não possui sequer uma primitiva elementar! Note que, como f é contínua, ela certamente *admite* uma primitiva (pelo Teorema 34.2). O fato que essa primitiva não é uma função elementar não tem lá tanta importância: a definição de função elementar é muito ligada a uma contingência histórica, ao fato que alguém decidiu em algum período da história que certas funções mereciam um nome. Qualquer um pode inventar nomes para funções se achar conveniente e na verdade muitas funções não elementares possuem nomes padrão na literatura. Por exemplo, a chamada *função erro de Gauss* $\operatorname{erf} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função não elementar bastante importante em Probabilidade e Estatística que é definida como sendo a única primitiva da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \, e^{-x^2},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, satisfazendo a condição $\operatorname{erf}(0) = 0$. Usando métodos numéricos (para calcular integrais de Riemann) é possível encontrar aproximações com quantas casas decimais desejarmos do valor da função erf num ponto x dado, assim como fazemos com funções elementares tais como as funções seno, cosseno e exponencial. Uma primitiva da função $f(x) = e^{x^2}$ pode ser expressa em termos de uma variante da função erro de Gauss, a chamada *função erro de Gauss imaginária*[5] $\operatorname{erfi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mais especificamente, temos:

$$\int e^{x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfi}(x) + C.$$

[4] Na verdade existe um algoritmo para o cálculo de integrais indefinidas, o chamado *algoritmo de Risch*, mas ele é um tanto complicado e mais apropriado para implementação em computadores.

[5] A função erfi pode ser definida pela igualdade $\operatorname{erfi}(x) = -i \operatorname{erf}(ix)$ usando uma extensão apropriada da função erf para os números complexos. Aqui $i \in \mathbb{C}$ denota a unidade imaginária.

35. Integração por partes

O método de integração por partes é a "versão reversa" da regra da derivada do produto.

Teorema 35.1 (integração por partes). *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$ funções deriváveis, com $D \subset \mathbb{R}$. Se a função $f'g$ possui uma primitiva $H : D \to \mathbb{R}$, então a função $fg - H$ é uma primitiva para a função fg'. Informalmente:*

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstração. É uma consequência simples da regra da derivada do produto (Teorema 18.4):

$$(fg - H)' = f'g + fg' - H' = f'g + fg' - f'g = fg'. \qquad \square$$

Para usar eficientemente a técnica de integração por partes você precisa decompor o seu integrando como um produto $f(x)g'(x)$, de modo que você seja capaz de encontrar uma primitiva para o fator identificado como $g'(x)$ — essa será a função g — e de modo que a integral $\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ seja mais simples de calcular do que a integral original $\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 35.2. Vamos calcular a integral indefinida:

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x.$$

Tomando $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$, podemos escolher g como sendo dada por $g(x) = e^x$ e daí o Teorema 35.1 nos dá:

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C,$$

já que $f'(x) = 1$. Note que se tivéssemos escolhido em vez $f(x) = e^x$ e $g'(x) = x$ para fazer a integração por partes, a nova integral que teríamos obtido seria $\int \frac{1}{2}x^2e^x\,\mathrm{d}x$, que é mais difícil de calcular do que a integral original! De fato, para se calcular a integral $\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$ usa-se primeiro uma integração por partes para se cair na integral $\int xe^x\,\mathrm{d}x$ que é resolvida usando novamente uma integração por partes, como fizemos acima. Um exemplo similar de uma integral indefinida que é calculada usando duas integrações por partes é discutido a seguir.

Exemplo 35.3. Vamos calcular a integral indefinida:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x.$$

Usamos primeiro integração por partes tomando $f(x) = x^2$ e $g'(x) = \operatorname{sen} x$, obtendo

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -x^2\cos x - \int(-2x\cos x)\,\mathrm{d}x = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x,$$

em que escolhemos usar $g(x) = -\cos x$ como primitiva da função seno. Calculamos agora a integral $\int x \cos x \,\mathrm{d}x$ usando uma nova integração por partes com $f_1(x) = x$ e $g_1'(x) = \cos x$, como segue

$$\int x \cos x \,\mathrm{d}x = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x = x \operatorname{sen} x + \cos x + C,$$

em que escolhemos usar $g_1(x) = \operatorname{sen} x$ como primitiva da função cosseno. Daí:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C.$$

EXEMPLO 35.4 (integral do logaritmo). Vamos calcular a integral indefinida:

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x.$$

Apesar de o integrando não aparentar ser um produto, integração por partes acaba sendo uma boa pedida aqui! Tomamos $f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$ e daí

$$\begin{aligned}\int \ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = x \ln x - \int 1 \,\mathrm{d}x &= x \ln x - x + C \\ &= x(\ln x - 1) + C,\end{aligned}$$

em que escolhemos $g(x) = x$ como uma primitiva da função constante e igual a 1.

EXEMPLO 35.5 (uso descuidado da notação para integral indefinida gerando uma contradição). Calculando a integral

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$$

usando integração por partes com $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$ e $g'(x) = 1$, obtemos

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{x} x - \int x \Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \,\mathrm{d}x = 1 + \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x, \tag{35.1}$$

o que aparentemente leva à contradição $0 = 1$ se cancelamos o termo $\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$. Esse é um exemplo de uma situação em que a notação usual para integral indefinida gera problemas, já que duas ocorrências distintas do termo $\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$ em (35.1) referem-se necessariamente a duas primitivas diferentes da função $f(x) = \frac{1}{x}$. Boas práticas notacionais pedem que o mesmo termo denote sempre o mesmo objeto durante um cálculo, mas a notação usual para integrais indefinidas acaba gerando situações em que isso não ocorre! Evitando essa notação problemática e usando apenas a parte do enunciado do Teorema 35.1 que está expressa em linguagem precisa, vemos que o que vale de fato é que se H é uma primitiva da função $f'g$, então $fg - H$ é uma primitiva da função fg'. Como $fg = 1$, temos que $1 - H$ é uma primitiva de fg' e como

$$f(x)g'(x) = \frac{1}{x} = -f'(x)g(x),$$

concluímos que $-H$ também é uma primitiva de fg'. Essa conclusão é correta e não contém nenhuma contradição: ambas as funções $-H$ e $1-H$ são primitivas da função fg' e elas diferem por uma constante. O problema está em denotar essas duas primitivas diferentes pelo mesmo símbolo $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exemplo 35.6 (integração por partes com recursão). Vamos calcular a integral indefinida:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x.$$

Tomamos $f(x) = e^x$, $g'(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = -\cos x$ e usamos integração por partes:

$$\begin{aligned} \int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x &= -e^x \cos x - \int (-\cos x) e^x \, \mathrm{d}x \\ &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{35.2}$$

Vamos calcular a nova integral

$$\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$$

usando de novo uma integração por partes, agora escolhendo $f_1(x) = e^x$, $g_1'(x) = \cos x$ e $g_1(x) = \operatorname{sen} x$; obtemos:

$$\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x. \tag{35.3}$$

Parece agora que temos más notícias, já que caímos de volta na integral original que queríamos calcular. Mas substituindo (35.3) em (35.2) vem

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$$

e aí podemos resolver para $\int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$, obtendo:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C.$$

Cabe alguma suspeita sobre os cálculos acima, já que eles são muito parecidos com o tipo de manipulação que no Exemplo 35.5 levou à contradição $0 = 1$. Esse resultado está correto? A resposta é sim, o que pode ser verificado facilmente calculando a derivada da função obtida:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) &= \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + \frac{1}{2} e^x (\cos x + \operatorname{sen} x) \\ &= e^x \operatorname{sen} x. \end{aligned} \tag{35.4}$$

Mas o raciocínio que utilizamos para chegar a esse resultado é correto ou apenas tivemos sorte? Vejamos: se H é uma primitiva da função h dada por

$$h(x) = f_1'(x) g_1(x) = e^x \operatorname{sen} x,$$

então o Teorema 35.1 nos diz que $f_1 g_1 - H$ é uma primitiva de $f_1 g_1'$. Como $f_1 g_1' = -f'g$, vemos que $H - f_1 g_1$ é uma primitiva de $f'g$ e daí uma nova aplicação do Teorema 35.1 nos dá que $fg - (H - f_1 g_1)$ é uma primitiva de $fg' = h$. Como o domínio de h é um intervalo, temos que duas primitivas de h diferem por uma constante, de modo que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que:

$$H = fg - (H - f_1 g_1) + C = -H + fg + f_1 g_1 + C.$$

Daí $H = \frac{1}{2}(fg + f_1 g_1) + \frac{1}{2}C$, ou seja

$$H(x) = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + \frac{1}{2}C, \tag{35.5}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Nós provamos então que *se H é uma primitiva da função h*, então H é dada por (35.5) para algum $C \in \mathbb{R}$. Assim, *se soubermos que uma primitiva de h existe*, esse argumento mostra que (35.5) é uma primitiva de h e portanto que a função dada pela fórmula

$$\frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$$

também é uma primitiva de h. A existência de uma primitiva de h é garantida pelo Teorema 34.2, já que h é contínua e seu domínio é um intervalo. Portanto o raciocínio que usamos para encontrar uma primitiva de h está de fato completamente justificado, mas o apelo a esse teorema de existência é necessário se não queremos depender do cálculo explícito (35.4) para justificar a nossa conclusão.

36. Integração por substituição de variáveis

O método de integração por substituição de variáveis é a "versão reversa" da regra da cadeia.

TEOREMA 36.1 (integração por substituição de variáveis). *Sejam*

$$f : D \to \mathbb{R} \quad e \quad g : E \to \mathbb{R}$$

funções em que $D \subset \mathbb{R}$ e $E \subset \mathbb{R}$ não têm pontos isolados. Suponha que a imagem de g esteja contida no domínio de f e que g seja derivável. Se f possui uma primitiva $F : D \to \mathbb{R}$, então a função $F \circ g$ é uma primitiva de $(f \circ g)g'$, ou seja:

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x = F\big(g(x)\big) + C.$$

DEMONSTRAÇÃO. Segue diretamente da regra da cadeia (Teorema 22.1) que nos dá

$$(F \circ g)'(x) = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x),$$

para todo $x \in E$. □

O Teorema 36.1 é a justificativa por trás do seguinte método para calcular integrais, conhecido como *método de substituição de variáveis*. Começamos com uma integral indefinida

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x$$

que gostaríamos de calcular. Suponha que nós consigamos perceber que o integrando $h(x)$ pode ser escrito na forma

$$h(x) = f\big(g(x)\big)g'(x),$$

para certas funções f e g, em que g é derivável, possui o mesmo domínio que h e possui imagem contida no domínio de f. Fazemos agora a *substituição de variáveis*

$$y = g(x) \tag{36.1}$$

que deve ser acompanhada pela substituição

$$\mathrm{d}y = g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{36.2}$$

e nos dá:

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(g(x)\big)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Se formos capazes de calcular a integral indefinida $\int f(y)\,\mathrm{d}y$, ou seja, encontrar uma função F tal que

$$\int f(y)\,\mathrm{d}y = F(y) + C$$

aí usamos novamente a substituição (36.1) para obter o resultado da integral que originalmente queríamos calcular:

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x = F\big(g(x)\big) + C.$$

Essa conclusão — de que $F \circ g$ é uma primitiva de h — é precisamente o que nos diz o Teorema 36.1. Uma forma simples de memorizar a igualdade (36.2) é usar primeiro a notação de Leibniz para derivada

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g'(x)$$

e depois "multiplicar essa igualdade por $\mathrm{d}x$ dos dois lados". Aqui $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$ são meros símbolos que indicam a variável de integração e essa manipulação algébrica assim como a "substituição de variáveis" $y = g(x)$ devem ser pensadas meramente como uma forma prática de utilizar o Teorema 36.1, o qual é a verdadeira justificativa por trás do método.

Exemplo 36.2. Vamos calcular a integral indefinida:

$$\int \cos(3x + 7)\,\mathrm{d}x.$$

Usamos a substituição de variáveis

$$y = 3x + 7, \quad \mathrm{d}y = 3\,\mathrm{d}x$$

e obtemos:

$$\int \cos(3x+7)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3}\cos(3x+7)\cdot 3\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3}\cos y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\operatorname{sen} y + C.$$

Portanto:

$$\int \cos(3x+7)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x+7) + C.$$

Uma substituição de variáveis muito simples do tipo $y = ax + b$ é normalmente empregada mentalmente de forma automatizada, sem escrever explicitamente todos esses passos. Note que sempre que F é uma primitiva de uma função f, vale que

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$.

Exemplo 36.3. A integral indefinida

$$\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

pode ser calculada facilmente usando a substituição de variáveis

$$y = x^2, \quad \mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$$

que nos dá:

$$\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}e^{x^2}\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Exemplo 36.4. Vamos calcular a integral indefinida:

$$\int \frac{2x+7}{x^2+7x+13}\,\mathrm{d}x.$$

Notamos que o numerador é exatamente a derivada do denominador e isso nos motiva a usar a substituição de variáveis

$$y = x^2 + 7x + 13, \quad \mathrm{d}y = (2x+7)\,\mathrm{d}x$$

obtendo:

$$\int \frac{2x+7}{x^2+7x+13}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln|y| + C = \ln|x^2+7x+13| + C.$$

O método de substituição de variáveis que descrevemos no início da seção consiste em substituir alguma expressão $g(x)$ envolvendo a variável de integração x por uma nova variável y. Em alguns casos é útil fazer o inverso disso, isto é, substituir a variável de integração x por uma expressão $g(y)$ envolvendo uma nova variável y. Mais explicitamente, começamos com o problema de calcular a integral indefinida

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

e fazemos as substituições $x = g(y)$ e $\mathrm{d}x = g'(y)\,\mathrm{d}y$ para alguma função derivável g cuja imagem está contida no domínio de f; obtemos então:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(g(y)\big)g'(y)\,\mathrm{d}y.$$

A função g deve ser escolhida de modo que sejamos capazes de resolver a integral indefinida

$$\int f\big(g(y)\big)g'(y)\,\mathrm{d}y$$

obtendo uma função H tal que

$$\int f\big(g(y)\big)g'(y)\,\mathrm{d}y = H(y) + C,$$

isto é, tal que H é uma primitiva da função $h = (f \circ g)g'$. Como fazemos para obter uma primitiva de f agora? Precisamos de alguma forma desfazer a substituição $x = g(y)$ para transformar o resultado $H(y)$ numa expressão envolvendo x. Se g for injetora e a sua imagem for igual ao domínio de f, então g possui uma função inversa g^{-1} cujo domínio é igual ao domínio de f e podemos simplesmente substituir $y = g^{-1}(x)$ em $H(y)$ obtendo

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = H\big(g^{-1}(x)\big) + C$$

como resultado para a integral que queríamos originalmente calcular. Mas esse resultado está correto mesmo? Vamos agora enunciar e provar um teorema que justifica esse novo jeito de usar o método de substituição de variáveis sob certas hipóteses. O item (a) do teorema a seguir nos diz que, se g^{-1} for derivável, então $H \circ g^{-1}$ é de fato uma primitiva de f. O item (b) nos diz que é possível obter uma primitiva F para f a partir de H desfazendo a substituição $x = g(y)$ mesmo quando g não é injetora, desde que f seja contínua e o domínio de g seja um intervalo.

Teorema 36.5 (integração por substituição de variáveis, sentido inverso). *Sejam*

$$f : D \to \mathbb{R} \quad e \quad g : E \to \mathbb{R}$$

funções em que $D \subset \mathbb{R}$ e $E \subset \mathbb{R}$ não têm pontos isolados. Suponha que a imagem de g seja igual *ao domínio de f e que g seja derivável. Seja $H : E \to \mathbb{R}$ uma primitiva da função $h = (f \circ g)g'$.*

(a) *Se g for injetora e a sua função inversa $g^{-1} : D \to \mathbb{R}$ for derivável, então a função $H \circ g^{-1}$ é uma primitiva de f. (Recorde que o Teorema 24.3 nos diz que g^{-1} é derivável se g' nunca se anula e g^{-1} é contínua e que o Corolário 24.4 nos diz que g^{-1} é derivável se g' nunca se anula e o domínio de g é um intervalo.)*

(b) *Se f for contínua[6] e se o domínio de g for um intervalo, então a função $F : D \to \mathbb{R}$ obtida da seguinte forma é uma primitiva de f: para cada $x \in D$, escolhemos algum $y \in E$ com $g(y) = x$ e tomamos $F(x) = H(y)$; vale que o valor de $H(y)$ não dependerá da escolha de y tal que $g(y) = x$.*

[6]Na verdade, basta assumir que f possui uma primitiva.

Demonstração. Recorde que a fórmula (24.1) para a derivada de uma função inversa nos dá que se g^{-1} é derivável, então

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'\big(g^{-1}(x)\big)},$$

para todo $x \in D$. Para provar o item (a), usamos então a regra da cadeia obtendo

$$\begin{aligned}(H \circ g^{-1})'(x) &= H'\big(g^{-1}(x)\big)(g^{-1})'(x) = \frac{h\big(g^{-1}(x)\big)}{g'\big(g^{-1}(x)\big)} \\ &= \frac{f(x)g'\big(g^{-1}(x)\big)}{g'\big(g^{-1}(x)\big)} = f(x),\end{aligned}$$

para todo $x \in D$. Para provar o item (b), notamos primeiro que como g é contínua e seu domínio é um intervalo, então a imagem de g — que coincide com o domínio de f — também é um intervalo, pelo Teorema do Valor Intermediário (Teorema 10.5). Como f é contínua e seu domínio é um intervalo, o Teorema 34.2 nos diz que f possui uma primitiva $F_1 : D \to \mathbb{R}$. Da regra da cadeia vê-se imediatamente que $F_1 \circ g$ é uma primitiva de h:

$$(F_1 \circ g)' = (F_1' \circ g)g' = (f \circ g)g' = h.$$

Como H também é uma primitiva de h e como o domínio de h — que coincide com o domínio de g — é um intervalo, temos que existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $H = F_1 \circ g + C$. Daí se $x \in D$ e $y \in E$ é escolhido de forma que $g(y) = x$, temos que

$$H(y) = F_1\big(g(y)\big) + C = F_1(x) + C,$$

o que mostra que $H(y)$ não depende da escolha de $y \in E$ tal que $g(y) = x$ e que a função F definida no enunciado é igual a $F_1 + C$. Daí F é uma primitiva de f, como queríamos demonstrar. □

Os exemplos mais importantes de aplicação do método de substituição de variáveis "no sentido inverso" são as resoluções de integrais usando substituições trigonométricas que estudaremos na Seção 39.

37. Algumas integrais envolvendo funções trigonométricas

Nesta seção vamos utilizar as técnicas de integração que estudamos nas Seções 34, 35 e 36 para calcular as integrais de produtos de potências inteiras de senos e cossenos, o que inclui integrais de funções como tangente e secante e suas potências inteiras.

Exemplo 37.1 (integral de tangente e cotangente). A integral da função tangente

$$\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \,\mathrm{d}x$$

pode ser calculada facilmente usando a substituição de variáveis

$$y = \cos x, \quad \mathrm{d}y = -\operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x$$

que nos dá:

$$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = \int -\frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = -\ln|y| + C = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C.$$

A integral da função cotangente pode ser calculada de forma similar àquela usada acima ou obtida a partir da integral da função tangente notando que $\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x \neq 0$. Temos que (recorde o que foi observado no Exemplo 36.2 sobre substituições de variáveis do tipo $y = ax + b$):

$$\int \operatorname{cotg} x \, \mathrm{d}x = \int \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) \mathrm{d}x = \ln\left|\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\right| + C = \ln|\operatorname{sen} x| + C.$$

Exemplo 37.2 (integral de secante e cossecante). A integral da função secante

$$\int \sec x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos x} \, \mathrm{d}x$$

é um pouco mais complicada de calcular do que a integral da função tangente. Começamos multiplicando a fração $\frac{1}{\cos x}$ em cima e embaixo por $\cos x$, obtendo:

$$\int \sec x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} \, \mathrm{d}x.$$

Usando a substituição de variáveis

$$y = \operatorname{sen} x, \quad \mathrm{d}y = \cos x \, \mathrm{d}x$$

vem:

$$\int \sec x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1 - y^2} \, \mathrm{d}y.$$

Essa última integral pode ser calculada pelo método de decomposição em frações parciais que estudaremos mais adiante (Seção 38), mas aqui trata-se de um caso muito simples e não precisamos do método geral. Note que

$$\frac{1}{1 - y^2} = \frac{1}{(1 - y)(1 + y)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1 - y} + \frac{1}{1 + y}\Big),$$

para todo $y \in \mathbb{R}$ com $y \neq 1$ e $y \neq -1$. Daí

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1 - y^2} \, \mathrm{d}y &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 - y} \, \mathrm{d}y + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + y} \, \mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{2} \ln|1 - y| + \frac{1}{2} \ln|1 + y| + C = \frac{1}{2} \ln\Big|\frac{1 + y}{1 - y}\Big| + C\end{aligned}$$

e portanto:

$$\int \sec x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln\Big|\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}\Big| + C.$$

É possível escrever o resultado dessa integral de um modo um pouco mais elegante fazendo as seguintes manipulações:

$$\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} = \frac{(1 + \operatorname{sen} x)^2}{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)} = \Big(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\Big)^2 = (\sec x + \operatorname{tg} x)^2.$$

Obtemos então:

$$\int \sec x \,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

A integral da função cossecante pode ser obtida a partir da integral da secante usando que $\operatorname{cosec} x = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x \neq 0$. Temos:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{cosec} x \,\mathrm{d}x = \int \sec\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{d}x &= -\ln\left|\sec\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\right| + C \\ &= -\ln|\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x| + C.\end{aligned}$$

Exemplo 37.3 (integral de secante ao quadrado). Recorde que a derivada da função tangente é a função secante ao quadrado (Teorema 20.2) e portanto:

$$\int \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C.$$

Similarmente:

$$\int \operatorname{cosec}^2 x \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C.$$

Exemplo 37.4 (polinômios trigonométricos). Um *polinômio trigonométrico* é uma função que pode ser obtida das funções seno, cosseno e de funções constantes por meio de um número finito de produtos e somas. Para sermos capazes de integrar um polinômio trigonométrico qualquer, é suficiente que saibamos calcular integrais do tipo

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x, \tag{37.1}$$

em que n e m são inteiros não negativos. O caso mais simples é o caso em que ou n ou m é ímpar. Por exemplo, se $m = 2k + 1$ para um inteiro não negativo k, então

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x &= \int \operatorname{sen}^n x \cos^{2k} x \cos x \,\mathrm{d}x \\ &= \int \operatorname{sen}^n x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

e aí usando a substituição de variáveis

$$y = \operatorname{sen} x, \quad \mathrm{d}y = \cos x \,\mathrm{d}x \tag{37.2}$$

obtemos:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x = \int y^n (1 - y^2)^k \,\mathrm{d}y.$$

Essa última integral é simplesmente a integral de um polinômio e é muito fácil de calcular, embora possivelmente um pouco trabalhosa se k é grande, já que será necessário expandir o fator $(1-y^2)^k$. Por exemplo, vamos calcular a integral indefinida:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^7 x \,\mathrm{d}x.$$

Temos:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^7 x \,\mathrm{d}x = \int \operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^3 \cos x \,\mathrm{d}x = \int y^2 (1-y^2)^3 \,\mathrm{d}y,$$

em que usamos a substituição (37.2). Daí

$$\int y^2(1-y^2)^3 \,\mathrm{d}y = \int (y^2 - 3y^4 + 3y^6 - y^8) \,\mathrm{d}y = \frac{y^3}{3} - \frac{3}{5}y^5 + \frac{3}{7}y^7 - \frac{y^9}{9} + C$$

e portanto:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^7 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \frac{3}{5}\operatorname{sen}^5 x + \frac{3}{7}\operatorname{sen}^7 x - \frac{1}{9}\operatorname{sen}^9 x + C.$$

O cálculo da integral (37.1) no caso em que n é ímpar é feito de forma similar. Explicitamente, se $n = 2k+1$ para um inteiro não negativo k, então

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x &= \int \operatorname{sen}^{2k} x \cos^m x \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x\\ &= \int (1-\cos^2 x)^k \cos^m x \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

e aí usando a substituição de variáveis

$$y = \cos x, \quad \mathrm{d}y = -\operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x$$

obtemos:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x = -\int (1-y^2)^k y^m \,\mathrm{d}y.$$

O caso em que n e m são ambos pares precisa ser resolvido por um truque diferente. Uma opção prática é usar as identidades

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1,\\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x,\end{aligned}$$

que nos dão:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}. \tag{37.3}$$

Por exemplo, a integral

$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$$

pode ser calculada assim:

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos(2x)}{2} \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\Big) + C\\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C.\end{aligned} \tag{37.4}$$

Mais geralmente, se $n = 2k$ e $m = 2l$ para inteiros não negativos k e l, então:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{k+l}} \int \big(1-\cos(2x)\big)^k \big(1+\cos(2x)\big)^l \,\mathrm{d}x.$$

Pode-se usar agora aqui a substituição de variáveis $y = 2x$ para obter uma integral envolvendo apenas potências de $\cos y$. Integrais de potências ímpares de $\cos y$ podem ser calculadas diretamente usando a técnica que explicamos mais acima para calcular a integral (37.1) no caso em que m é ímpar. Para lidar com as potências pares de $\cos y$ pode-se usar a identidade $\cos^2 y = \frac{1+\cos(2y)}{2}$ e a substituição $z = 2y$ para obter uma nova integral envolvendo potências de $\cos z$ cujos expoentes são no máximo a metade dos expoentes que antes apareciam na potência de $\cos y$. Esse processo deve ser iterado até que eventualmente ele termina quando só temos funções constantes e potências ímpares de cosseno para integrar. Observamos que se a integral inicial envolve potências pares grandes de seno e cosseno, então esse processo pode ser um tanto longo e trabalhoso. A título de ilustração, vamos calcular a integral:

$$\int \cos^4 x \, \mathrm{d}x.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x \, \mathrm{d}x &= \int \Big(\frac{1+\cos(2x)}{2}\Big)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int \big(1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\big) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4} \int \Big(\frac{1+\cos(4x)}{2}\Big) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \operatorname{sen}(4x) + C \\
&= \frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32} \operatorname{sen}(4x) + C.
\end{aligned}$$

Exemplo 37.5 (relação recursiva entre integrais de potências de seno e cosseno). Há uma outra forma de calcular a integral

$$\int \cos^n x \, \mathrm{d}x$$

de uma potência da função cosseno, em que n é um inteiro positivo. A ideia consiste em usar integração por partes para estabelecer uma relação entre a integral da potência n-ésima do cosseno e a integral da potência $(n-2)$-ésima do cosseno. Escrevemos primeiro

$$\int \cos^n x \, \mathrm{d}x = \int \cos^{n-1} x \cos x \, \mathrm{d}x$$

e usamos integração por partes com

$$f(x) = \cos^{n-1} x, \quad f'(x) = -(n-1)\cos^{n-2} x \operatorname{sen} x,$$
$$g(x) = \operatorname{sen} x, \quad g'(x) = \cos x,$$

obtendo:

$$\int \cos^n x \, \mathrm{d}x = \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x.$$

Usando que $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ vem

$$\int \cos^n x \,\mathrm{d}x = \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \,\mathrm{d}x - (n-1)\int \cos^n x \,\mathrm{d}x$$

e daí resolvemos para $\int \cos^n x \,\mathrm{d}x$ e o resultado é[7]:

$$\int \cos^n x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x \,\mathrm{d}x. \tag{37.5}$$

Se n é ímpar é mais simples calcular a integral da n-ésima potência do cosseno usando a técnica explicada no Exemplo 37.4. Para n par, podemos usar a fórmula (37.5) da seguinte forma: digamos, por exemplo, que queremos calcular a integral da sexta potência do cosseno. A fórmula (37.5) com $n = 6$ exprime a integral da sexta potência do cosseno em termos da integral da quarta potência do cosseno e a mesma fórmula com $n = 4$ exprime a integral da quarta potência do cosseno em termos da integral do quadrado do cosseno. Finalmente, a integral do quadrado do cosseno pode ser calculada diretamente usando (37.3) ou também usando novamente a fórmula (37.5) com $n = 2$. Há também uma fórmula similar a (37.5) relacionando a integral de $\operatorname{sen}^n x$ com a integral de $\operatorname{sen}^{n-2} x$. Ela pode ser obtida seguindo passos análogos aos da dedução de (37.5) ou usando (37.5) juntamente com a identidade $\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e a substituição de variáveis $y = \frac{\pi}{2} - x$. A fórmula é:

$$\int \operatorname{sen}^n x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x \,\mathrm{d}x. \tag{37.6}$$

Exemplo 37.6 (integral de potências de secante e cossecante). Observe que a demonstração que demos das igualdades (37.5) e (37.6) não requer nenhuma hipótese a respeito do expoente n a não ser que n seja diferente de zero. Usando essas igualdades para n inteiro negativo podemos calcular as integrais das potências inteiras negativas das funções seno e cosseno, isto é, as integrais das potências inteiras positivas das funções secante e cossecante. Por exemplo, vamos calcular a integral

$$\int \sec^3 x \,\mathrm{d}x$$

[7] A justificativa completa por trás desse tipo de manipulação é feita como no Exemplo 35.6. Naquela justificativa era usado o fato que o domínio do integrando é um intervalo e que o integrando é contínuo (para garantir a existência da primitiva usando o Teorema 34.2). Se n é um inteiro positivo, temos que a n-ésima potência do cosseno é uma função contínua definida em $\mathbb{R}$ e a justificativa se aplica. Mais adiante usaremos a fórmula (37.5) também para n inteiro negativo e nesse caso o domínio da n-ésima potência do cosseno é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Esse conjunto não é um intervalo, mas a justificativa usada no Exemplo 35.6 pode ser aplicada considerando as restrições da n-ésima potência do cosseno a cada um dos intervalos $\left]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$, com $k \in \mathbb{Z}$.

usando a fórmula (37.5) com $n = -1$. Temos

$$\int \sec x \, \mathrm{d}x = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + 2\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x = -\sec x \operatorname{tg} x + 2\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x$$

e portanto:

$$\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(\sec x \operatorname{tg} x + \int \sec x \, \mathrm{d}x\Big). \tag{37.7}$$

A integral da secante é uma exceção e não pode ser calculada usando a fórmula (37.5), pois nesse caso precisaríamos usar essa fórmula com $n = 1$ e daí justamente o termo relevante — contendo a integral da secante — desaparece. Mas nós já calculamos a integral da secante de outro modo no Exemplo 37.2 e usando esse resultado concluímos que:

$$\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(\sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\Big) + C.$$

A integral da função secante ao cubo pode também ser calculada diretamente, sem a fórmula (37.5), usando uma integração por partes. Começamos escrevendo

$$\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x = \int \sec x \sec^2 x \, \mathrm{d}x$$

e daí usamos integração por partes com

$$f(x) = \sec x, \quad f'(x) = \operatorname{tg} x \sec x,$$
$$g(x) = \operatorname{tg} x, \quad g'(x) = \sec^2 x,$$

obtendo:

$$\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x = \sec x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^2 x \sec x \, \mathrm{d}x.$$

Como $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$, temos

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x &= \sec x \operatorname{tg} x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, \mathrm{d}x \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x \, \mathrm{d}x + \int \sec x \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

de onde a conclusão (37.7) é novamente obtida.

Exemplo 37.7 (integral do produto de uma potência inteira de seno por um potência inteira de cosseno). Vejamos um roteiro sobre como calcular a integral

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \, \mathrm{d}x \tag{37.8}$$

quando n e m são inteiros quaisquer (possivelmente negativos). Em primeiro lugar, notamos que se ou n ou m é ímpar, então a estratégia que descrevemos no Exemplo 37.4 pode ser utilizada, só que em vez de transformar a integral (37.8) na integral de um polinômio, ela pode transformar a integral (37.8) na integral de um quociente de polinômios. Integrais de quocientes de polinômios são em geral bem mais difíceis de calcular do que integrais de polinômios, mas podem ser resolvidas usando o método de decomposição em frações parciais que estudaremos nas Seções 38 e 41. Há um caso particular em que é bem simples calcular a integral (37.8), a saber, o caso em que $n+m=-2$. De fato, se $n+m=-2$, então

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x = \int \operatorname{tg}^n x \sec^2 x \,\mathrm{d}x$$

e essa última integral é resolvida facilmente usando a substituição de variáveis[8]:

$$y = \operatorname{tg} x, \quad \mathrm{d}y = \sec^2 x \,\mathrm{d}x.$$

Para lidar com o caso geral, pode-se usar uma fórmula recursiva que generaliza (37.5). Escrevemos primeiro

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x = \int \operatorname{sen}^n x \cos^{m-1} x \cos x \,\mathrm{d}x$$

e depois usamos integração por partes com

$$\begin{gathered} f(x) = \operatorname{sen}^n x \cos^{m-1} x, \\ f'(x) = n \operatorname{sen}^{n-1} x \cos^m x - (m-1) \operatorname{sen}^{n+1} x \cos^{m-2} x, \\ g(x) = \operatorname{sen} x, \quad g'(x) = \cos x, \end{gathered}$$

obtendo:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x &= \operatorname{sen}^{n+1} x \cos^{m-1} x \\ &\quad - \int \big(n \operatorname{sen}^n x \cos^m x - (m-1) \operatorname{sen}^{n+2} x \cos^{m-2} x\big) \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Usando agora a identidade $\operatorname{sen}^{n+2} x = \operatorname{sen}^n x(1-\cos^2 x)$ vem:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x &= \operatorname{sen}^{n+1} x \cos^{m-1} x + (m-1) \int \operatorname{sen}^n x \cos^{m-2} x \,\mathrm{d}x \\ &\quad - (n+m-1) \int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Finalmente, se $n+m \neq 0$, obtemos a fórmula:

$$\begin{aligned} \text{(37.9)} \quad \int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n+m} \operatorname{sen}^{n+1} x \cos^{m-1} x \\ &\quad + \frac{m-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^n x \cos^{m-2} x \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

[8]Há um detalhe a ser observado aqui: se $m \geq 0$, então os pontos $x \in \mathbb{R}$ em que $\cos x$ se anula pertencem ao domínio do integrando, mas não pertencem ao domínio da função tangente e portanto essa substituição de variáveis acaba por forçar uma redução do domínio do integrando, removendo os pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que $\cos x = 0$. Porém, a expressão $\frac{1}{n+1} \operatorname{tg}^{n+1} x$ que se obtém para a primitiva pode ser reescrita na forma $\frac{1}{n+1} \operatorname{cotg}^{-(n+1)} x$ e assim obtemos uma primitiva definida em todo o domínio do integrando.

Para que sejamos capazes de calcular a integral (37.8) para quaisquer inteiros n e m, falta cuidar do caso em que $n+m=0$ e o inteiro n (e portanto também m) é par. Se $n+m=0$, então:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x = \int \operatorname{tg}^n x \,\mathrm{d}x.$$

Se n é positivo, escrevemos $n=2k$ com k um inteiro positivo e aí:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x = \int \operatorname{tg}^n x \,\mathrm{d}x = \int (\operatorname{tg}^2 x)^k \,\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)^k \,\mathrm{d}x.$$

Expandindo a expressão $(\sec^2 x - 1)^k$, reduzimos o problema do cálculo dessa última integral ao cálculo de integrais de potências positivas da função secante, o qual foi resolvido no Exemplo 37.6. Por outro lado, se m é positivo, escrevemos $m=2k$ com k um inteiro positivo e daí:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x = \int \operatorname{cotg}^m x \,\mathrm{d}x = \int (\operatorname{cotg}^2 x)^k \,\mathrm{d}x = \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)^k \,\mathrm{d}x.$$

O cálculo dessa última integral reduz-se ao cálculo de integrais de potências positivas da função cossecante, que já foi resolvido no Exemplo 37.6. Observamos que a fórmula (37.9) possui uma versão em que é a potência do seno que diminui na nova integral:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n+m} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos^{m+1} x \\ + \frac{n-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^m x \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Essa fórmula pode por exemplo ser obtida de (37.9) usando a substituição $y = \frac{\pi}{2} - x$ (e trocando n por m).

Exemplo 37.8 (a substituição $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$). Há uma substituição de variáveis que é uma espécie de "último recurso" quando nada mais funciona para calcular uma integral envolvendo funções trigonométricas. Trata-se da substituição:

$$y = \operatorname{tg} \tfrac{x}{2}. \tag{37.10}$$

Essa substituição permite transformar qualquer quociente de polinômios trigonométricos num quociente de polinômios[9]. A integral de um quociente de polinômios pode ser resolvida usando o método de decomposição em frações

[9]Essa substituição frequentemente nos obriga a restringir o domínio do integrando. Mais explicitamente, se o integrando é $h(x)$ e a função h possui um domínio D, então antes de aplicar essa substituição de variáveis estaremos implicitamente restringindo a função h ao conjunto

$$S = \big\{x \in D : \cos\big(\tfrac{x}{2}\big) \neq 0\big\} = D \setminus \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

formado pelos pontos $x \in D$ para os quais a tangente de $\frac{x}{2}$ está bem-definida. Ao terminar a resolução da integral obteremos então uma função que é uma primitiva de $h|_S$. Uma primitiva $H : D \to \mathbb{R}$ do integrando original h é então obtida tendo em mente que H é uma função contínua e que a primitiva de $h|_S$ e a função H diferem no máximo por uma constante em qualquer intervalo contido em S.

parciais que estudaremos nas Seções 38 e 41. Para mostrar que a substituição (37.10) permite eliminar as funções trigonométricas da integral precisamos apenas verificar algumas identidades simples. Em primeiro lugar, a identidade

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \tfrac{x}{2} \cos \tfrac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \tfrac{x}{2} \cos^2 \tfrac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2y}{1 + y^2}$$

nos permite eliminar as ocorrências de $\operatorname{sen} x$ do integrando. Para eliminar as ocorrências de $\cos x$, usamos:

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos^2 \tfrac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \tfrac{x}{2} = \cos^2 \tfrac{x}{2}\big(1 - \operatorname{tg}^2 \tfrac{x}{2}\big) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 - y^2}{1 + y^2}.\end{aligned}$$

Finalmente, temos

$$\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2} \sec^2 \tfrac{x}{2} \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\big(1 + \operatorname{tg}^2 \tfrac{x}{2}\big) \, \mathrm{d}x$$

e portanto:

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1 + y^2} \, \mathrm{d}y.$$

Exemplo 37.9 (transformação de produtos de senos e cossenos em somas). As integrais

$$\int \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(lx) \, \mathrm{d}x, \quad \int \operatorname{sen}(kx) \cos(lx) \, \mathrm{d}x, \quad \int \cos(kx) \cos(lx) \, \mathrm{d}x,$$

para k e l inteiros, são muito importantes na teoria das séries de Fourier. Para calcular essas integrais usa-se as fórmulas para transformar produtos de senos e cossenos em somas. Vamos recordar a dedução dessas fórmulas. Partimos das fórmulas de seno e cosseno de soma e diferença:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta, \tag{37.11}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta, \tag{37.12}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta, \tag{37.13}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta. \tag{37.14}$$

Somando as identidades (37.11) e (37.12) obtemos:

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)].$$

Similarmente, somando e subtraindo (37.13) e (37.14) vem:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \tag{37.15}$$

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]. \tag{37.16}$$

Por exemplo, para calcular a integral

$$\int \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(lx)\,\mathrm{d}x$$

usamos a identidade (37.16) obtendo:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(lx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \cos\big((k-l)x\big)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos\big((k+l)x\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2(k-l)}\operatorname{sen}\big((k-l)x\big)\\ &\qquad - \frac{1}{2(k+l)}\operatorname{sen}\big((k+l)x\big) + C,\end{aligned}$$

para quaisquer $k, l \in \mathbb{R}$ com $k \neq l$ e $k \neq -l$. Se $k = l \neq 0$, então:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(lx)\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{sen}^2(kx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos(2kx)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4k}\operatorname{sen}(2kx) + C.\end{aligned}$$

Se $k = -l$, então $\int \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(lx)\,\mathrm{d}x = -\int \operatorname{sen}^2(kx)\,\mathrm{d}x$. Note que as igualdades (37.15) e (37.16) se reduzem a (37.3) para $\alpha = \beta = x$ e que o método que usamos agora para calcular a integral $\int \operatorname{sen}^2(kx)\,\mathrm{d}x$ é o mesmo que foi apresentado no Exemplo 37.4.

38. Decomposição em frações parciais: o caso mais simples

Começamos agora o estudo de um método usado para integrar funções racionais. Uma *função racional* é uma função que é um quociente de duas funções polinomiais, em que o denominador não é o polinômio nulo. O método de decomposição em frações parciais consiste em decompor uma função racional como uma soma de funções racionais mais simples que são fáceis, ou mais fáceis, de se integrar. Esse método já foi utilizado no Exemplo 37.2 quando calculamos a integral $\int \frac{1}{1-y^2}\,\mathrm{d}y$. Nesta seção nós apresentaremos o caso particular do método de decomposição em frações parciais que se aplica quando o denominador da função racional é um polinômio cujas raízes são todas simples (isto é, de multiplicidade 1) e reais.

Considere então uma função racional $f : D \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

para todo $x \in D$, em que p e q são funções polinomiais, com $q \neq 0$, e $D = \big\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\big\}$. Seja n o grau de q e suponha que q tenha n raízes reais distintas, o que implica que q pode ser fatorado assim

$$q(x) = c(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n),$$

em que $c \neq 0$ é o coeficiente dominante de q (isto é, o coeficiente de x^n) e α_1, α_2, …, α_n são as n raízes reais distintas de q. Vamos tentar escrever a função racional f na forma

$$f(x) = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - \alpha_n}, \tag{38.1}$$

em que A_1, A_2, …, A_n são números reais. Suponha que de fato existam $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ tais que (38.1) vale para todo x pertencente ao conjunto $D = \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. Multiplicando os dois lados de (38.1) por $q(x)$ obtemos que vale a igualdade

$$p(x) = A_1 Q_1(x) + A_2 Q_2(x) + \cdots + A_n Q_n(x), \tag{38.2}$$

para todo $x \in D$, em que $Q_i(x)$ denota o produto do coeficiente c pelos fatores $x - \alpha_1$, $x - \alpha_2$, …, $x - \alpha_n$ omitindo o i-ésimo fator $x - \alpha_i$, isto é

$$Q_i(x) = c(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_{i-1})(x - \alpha_{i+1}) \cdots (x - \alpha_n), \tag{38.3}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Afirmamos que se a igualdade (38.2) vale para todo x em D, então na verdade essa igualdade vale para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, temos que dois polinômios distintos podem assumir o mesmo valor no máximo num número finito de pontos, porque a diferença entre esses dois polinômios é um polinômio não nulo e um polinômio não nulo tem no máximo um número finito (igual ao seu grau) de raízes. A afirmação que fizemos segue então do fato que o conjunto D é infinito. Como o grau do polinômio que aparece do lado direito de (38.2) é menor do que n, vemos que *só há alguma chance de conseguirmos escrever f na forma* (38.1) *se p tiver grau menor do que n.* Suponha então que p tem grau menor do que n e vamos ver como é possível encontrar números reais A_1, A_2, …, A_n para os quais (38.1) vale. Em primeiro lugar, note que $Q_j(\alpha_i) = 0$ para $i \neq j$, porque o fator $x - \alpha_i$ aparece no produto que define Q_j para $i \neq j$. Além do mais, $Q_i(\alpha_i) \neq 0$, para todo i. Vemos então que avaliando os dois lados de (38.2) em $x = \alpha_i$ obtemos

$$p(\alpha_i) = A_i Q_i(\alpha_i)$$

e portanto

$$A_i = \frac{p(\alpha_i)}{Q_i(\alpha_i)}, \tag{38.4}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Isso mostra que se (38.1) vale, então os números reais A_i são necessariamente dados pela fórmula (38.4). Mas é verdade que se definimos os números reais A_i por essa fórmula, então a igualdade (38.1) vale para todo $x \in D$? A resposta é afirmativa: de fato, se os números reais A_i são dados por (38.4), então a igualdade (38.2) vale com $x = \alpha_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Mas os dois lados da igualdade (38.2) são polinômios de grau menor do que n e portanto se seus valores coincidem em n pontos, então esses polinômios são necessariamente idênticos (caso contrário a sua diferença seria um polinômio não nulo de grau menor do que n com n raízes distintas). Nós provamos então o seguinte resultado.

TEOREMA 38.1 (decomposição em frações parciais, denominador com raízes reais distintas). *Sejam $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções polinomiais e suponha que, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale que*

$$q(x) = c(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n),$$

para algum $c \in \mathbb{R}$ não nulo, algum inteiro positivo n e certos números reais distintos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Se p tem grau menor do que n, então existem e são únicos números reais $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tais que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - \alpha_n},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ com $q(x) \neq 0$. Os números reais A_i são dados pela igualdade (38.4), *em que Q_i é definido por* (38.3). □

A decomposição em frações parciais (38.1) torna o cálculo da integral de f bastante simples, já que:

$$\int \frac{A_i}{x - \alpha_i} \, \mathrm{d}x = A_i \ln |x - \alpha_i| + C.$$

Mas veja que essa decomposição só é possível quando o grau de p é menor do que o grau de q. Quando essa condição é satisfeita, dizemos que a função racional f dada por

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

é *própria*. Quando o grau de p é maior ou igual ao grau de q, dizemos que f é *imprópria*. Usando o algoritmo de divisão de polinômios, segue que para quaisquer polinômios p e q com q não nulo, podemos encontrar (únicos) polinômios u e v tais que

$$p(x) = u(x)q(x) + v(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, em que o resto v tem grau menor do que o grau de q. Daí

$$\frac{p(x)}{q(x)} = u(x) + \frac{v(x)}{q(x)}, \tag{38.5}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ com $q(x) \neq 0$. Temos então que toda função racional pode ser escrita como a soma de uma função polinomial com uma função racional própria com o mesmo denominador que a função racional original. Como o cálculo da integral de um polinômio é trivial, obtemos então um método para o cálculo da integral de qualquer função racional cujo denominador tenha apenas raízes reais simples (supondo que sejamos capazes de encontrar as raízes do denominador). O método para integrar funções racionais arbitrárias é um tanto mais complicado e será estudado na Seção 38.

Exemplo 38.2. Vamos calcular a integral:

$$\int \frac{x^5 + x^4 - x^2 + x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}\,\mathrm{d}x.$$

Como a funcional racional no integrando é imprópria, precisamos primeiro fazer a divisão de polinômios para reescrevê-la como soma de um polinômio com uma função racional própria. Temos

$$x^5 + x^4 - x^2 + x + 1 = (x^2 + 4x + 10)(x^3 - 3x^2 + 2x) + (21x^2 - 19x + 1),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e portanto:

$$\int \frac{x^5 + x^4 - x^2 + x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}\,\mathrm{d}x = \int (x^2 + 4x + 10)\,\mathrm{d}x + \int \frac{21x^2 - 19x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}\,\mathrm{d}x.$$

A integral da parte polinomial é muito simples de calcular:

$$\int (x^2 + 4x + 10)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 10x + C. \tag{38.6}$$

Para calcular a integral

$$\int \frac{21x^2 - 19x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}\,\mathrm{d}x$$

começamos fatorando o denominador

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2)$$

e aí devemos procurar números reais A_1, A_2 e A_3 tais que

$$\frac{21x^2 - 19x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-2},$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$. Multiplicando os dois lados dessa igualdade por $x(x-1)(x-2)$ vem

$$21x^2 - 19x + 1 = A_1(x-1)(x-2) + A_2x(x-2) + A_3x(x-1), \tag{38.7}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Avaliando os dois lados de (38.7) em $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$ obtemos

$$1 = 2A_1, \quad 3 = -A_2, \quad 47 = 2A_3$$

e portanto:

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = -3 \quad \text{e} \quad A_3 = \frac{47}{2}.$$

Daí:

$$\begin{aligned} \int \frac{21x^2 - 19x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{A_1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{A_2}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{A_3}{x-2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| - 3\ln|x-1| + \frac{47}{2}\ln|x-2| + C. \end{aligned} \tag{38.8}$$

Somando (38.6) e (38.8) obtemos finalmente o resultado da integral que queríamos originalmente calcular:

$$\int \frac{x^5 + x^4 - x^2 + x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 10x + \frac{1}{2} \ln|x| - 3\ln|x-1| + \frac{47}{2} \ln|x-2| + C.$$

39. Substituições trigonométricas

O método das substituições trigonométricas é usado para calcular integrais contendo expressões do tipo

$$\sqrt{ax^2 + bx + c}, \tag{39.1}$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ são constantes, $a \neq 0$ e o polinômio $ax^2 + bx + c$ não é um quadrado perfeito, isto é, não é o quadrado de um polinômio de grau 1. A técnica funciona para calcular qualquer integral em que o integrando é obtido de funções polinomiais e da raiz quadrada (39.1) por um número finito de somas, produtos e quocientes. Os valores de a, b e c devem ser os mesmos em todas as ocorrências da expressão (39.1), isto é, o método não necessariamente pode ser aplicado se temos, por exemplo, um produto de duas raízes quadradas de polinômios de grau 2 distintos. A estratégia consiste em encontrar uma substituição adequada da variável x por uma função trigonométrica de modo que o integrando se transforme num polinômio trigonométrico ou num quociente de polinômios trigonométricos. A integral obtida após a substituição pode então ser resolvida usando as técnicas que estudamos na Seção 37. Começamos ilustrando o método pelos exemplos mais simples.

Exemplo 39.1. Vamos calcular a integral

$$\int \sqrt{1 - x^2} \, \mathrm{d}x \tag{39.2}$$

usando a substituição de variáveis

$$x = \operatorname{sen}\theta, \quad \mathrm{d}x = \cos\theta \, \mathrm{d}\theta,$$

com $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Temos

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta \tag{39.3}$$

e portanto:

$$\int \sqrt{1 - x^2} \, \mathrm{d}x = \int \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta.$$

Note que a exigência de que θ pertença ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ é relevante para garantir que vale a igualdade (39.3), já que em geral temos apenas $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} = |\cos\theta|$. É importante também ter em mente que quando θ percorre o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ então $x = \operatorname{sen}\theta$ percorre *todo* o intervalo $[-1, 1]$ que é o domínio do integrando em (39.2). Mais explicitamente, a justificativa completa do raciocínio que estamos usando aqui consiste em utilizar o item (b) do Teorema 36.5 com $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ e $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{e} \quad g(\theta) = \operatorname{sen}\theta,$$

para todo $x \in [-1, 1]$ e todo $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Esse teorema pressupõe que a imagem de g seja *igual* ao domínio de f. Para concluir o cálculo da integral (39.2), recorde que a integral do quadrado do cosseno foi calculada em (37.4) e o resultado é:

$$\int \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\theta) + C. \tag{39.4}$$

Precisamos agora escrever o lado direito da igualdade (39.4) em termos da variável original x. Como θ pertence ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e a função arcoseno é, por definição, precisamente a inversa da restrição da função seno a esse mesmo intervalo, temos:

$$\theta = \operatorname{arcsen} x.$$

Além do mais

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2x\sqrt{1 - x^2}$$

e daí:

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + C.$$

Exemplo 39.2. Vamos calcular a integral:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, \mathrm{d}x.$$

A identidade

$$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta$$

nos leva a considerar a substituição de variáveis

$$x = \operatorname{tg}\theta, \quad \mathrm{d}x = \sec^2\theta \, \mathrm{d}\theta,$$

com $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Note que quando θ percorre o intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que $x = \operatorname{tg}\theta$ percorre o conjunto de todos os números reais; além do mais, para θ nesse intervalo temos que $\sec\theta > 0$ e portanto:

$$\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta} = \sec\theta.$$

Daí:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, \mathrm{d}x = \int \sec^3\theta \, \mathrm{d}\theta.$$

A integral da função secante ao cubo foi calculada no Exemplo 37.6 e o resultado é:

$$\int \sec^3\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\Big(\sec\theta\operatorname{tg}\theta + \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|\Big) + C; \tag{39.5}$$

note que para $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ temos $\sec\theta + \operatorname{tg}\theta = \frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} > 0$, de modo que o valor absoluto em (39.5) é redundante. Reescrevemos agora o lado direito da igualdade (39.5) em termos da variável original x e obtemos o resultado da integral que queríamos calcular:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[x\sqrt{1+x^2} + \ln\Big(x+\sqrt{1+x^2}\Big)\Big] + C.$$

Exemplo 39.3. Vamos calcular a integral:

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x. \tag{39.6}$$

Nesse caso o domínio do integrando não é um intervalo, mas a união dos intervalos $]-\infty,-1]$ e $[1,+\infty[$. A identidade

$$\sec^2\theta - 1 = \operatorname{tg}^2\theta$$

sugere que usemos a substituição

$$x = \sec\theta, \quad \mathrm{d}x = \operatorname{tg}\theta\sec\theta\,\mathrm{d}\theta, \tag{39.7}$$

mas aqui será necessário analisar separadamente a restrição do integrando ao intervalo $]-\infty,-1]$ e ao intervalo $[1,+\infty[$. Consideramos primeiro a restrição do integrando ao intervalo $[1,+\infty[$. Nesse caso a substituição (39.7) é usada com $\theta \in \big[0,\frac{\pi}{2}\big[$. Quando θ percorre o intervalo $\big[0,\frac{\pi}{2}\big[$ temos que $x=\sec\theta$ percorre o intervalo $[1,+\infty[$ e que $\operatorname{tg}\theta \geq 0$, de modo que

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\theta} = \operatorname{tg}\theta$$

e daí

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{tg}^2\theta\sec\theta\,\mathrm{d}\theta. \tag{39.8}$$

A integral do lado direito da igualdade (39.8) pode ser calculada notando que

$$\int \operatorname{tg}^2\theta\sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \int (\sec^2\theta-1)\sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta - \int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta$$

e usando os resultados das integrais das funções secante e secante ao cubo que foram obtidos nos Exemplo 37.2 e 37.6 vem:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^2\theta\sec\theta\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\Big(\sec\theta\operatorname{tg}\theta + \ln|\sec\theta+\operatorname{tg}\theta|\Big) - \ln|\sec\theta+\operatorname{tg}\theta| + C\\ &= \frac{1}{2}\Big(\sec\theta\operatorname{tg}\theta - \ln|\sec\theta+\operatorname{tg}\theta|\Big) + C.\end{aligned}$$

Reescrevemos agora o resultado dessa última integral em termos da variável original x e obtemos

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{x^2-1} - \ln\Big|x+\sqrt{x^2-1}\Big|\Big) + C, \tag{39.9}$$

para $x \geq 1$. Vamos agora calcular a integral (39.6) com o integrando restrito ao intervalo $]-\infty,-1]$ usando a substituição de variáveis (39.7) com θ no intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Note que quando θ percorre o intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ temos que $x = \sec\theta$ percorre o intervalo $]-\infty, -1]$ e que $\operatorname{tg}\theta \leq 0$, de modo que

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\theta} = -\operatorname{tg}\theta$$

e daí:

$$\int \sqrt{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x = -\int \operatorname{tg}^2\theta \sec\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

A integral $\int \operatorname{tg}^2\theta \sec\theta\,\mathrm{d}\theta$ já foi calculada logo acima; devemos multiplicar seu resultado por -1 e reescrevê-lo em termos da variável x, tendo em mente que agora $\operatorname{tg}\theta$ é igual a $-\sqrt{x^2 - 1}$. Obtemos então

$$\int \sqrt{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{x^2 - 1} + \ln\Big|x - \sqrt{x^2 - 1}\Big|\Big) + C, \tag{39.10}$$

para $x \leq -1$. Será que é possível escrever uma fórmula unificada para o resultado da integral $\int \sqrt{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x$ para $x \geq 1$ e para $x \leq -1$? Vejamos: note que

$$\Big(x - \sqrt{x^2 - 1}\Big)\Big(x + \sqrt{x^2 - 1}\Big) = x^2 - (x^2 - 1) = 1,$$

para todo $x \in \,]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ e portanto:

$$\ln\Big|x - \sqrt{x^2 - 1}\Big| = -\ln\Big|x + \sqrt{x^2 - 1}\Big|.$$

Temos então que na verdade os lados direitos de (39.9) e (39.10) são iguais, de modo que a igualdade

$$\int \sqrt{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{x^2 - 1} - \ln\Big|x + \sqrt{x^2 - 1}\Big|\Big) + C$$

vale para qualquer x em $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Os Exemplos 39.1, 39.2 e 39.3 são os casos paradigmáticos de substituição trigonométrica e todos os outros exemplos são variantes de um desses três. Antes de tratar o caso geral, vamos olhar para mais um exemplo parecido com o Exemplo 39.1.

Exemplo 39.4. Vamos calcular a integral:

$$\int \sqrt{36 - 4x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{39.11}$$

Em primeiro lugar, note que:

$$\int \sqrt{36 - 4x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{4(9 - x^2)}\,\mathrm{d}x = 2\int \sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

A integral $\int \sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x$ é muito similar à integral (39.2) que foi resolvida usando a substituição $x = \operatorname{sen}\theta$, mas evidentemente aqui essa substituição não ajuda, já que o termo $\sqrt{9 - \operatorname{sen}^2\theta}$ não admite uma simplificação interessante como o termo $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$ admitia. O que fazer? Note que

$$9 - 9\operatorname{sen}^2\theta = 9\cos^2\theta$$

de modo que a substituição útil aqui é

$$x = 3\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \mathrm{d}x = 3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

com $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, que nos dá

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9\cos^2\theta} = 3\cos\theta,$$

já que $\cos\theta \geq 0$ para $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Daí:

$$\int \sqrt{36 - 4x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int \sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x = 18\int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Completamos agora a resolução da integral (39.11) de modo similar ao que fizemos no Exemplo 39.1. Temos

$$\int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2\theta) + C$$

e

$$\theta = \mathrm{arcsen}\,\frac{x}{3}, \quad \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2\theta) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = \frac{1}{18}x\sqrt{9 - x^2},$$

donde:

$$\int \sqrt{36 - 4x^2}\,\mathrm{d}x = 9\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{3} + x\sqrt{9 - x^2} + C.$$

Para empregar o método de substituição trigonométrica no caso de uma integral que envolve a raiz quadrada de um polinômio de grau 2 arbitrário, devemos antes utilizar um *completamento de quadrados* que consiste em pegar um polinômio de grau 2

$$ax^2 + bx + c$$

e reescrevê-lo na forma

$$a[(x + \beta)^2 + \gamma],$$

para certos números reais β e γ. Fazemos assim: primeiro colocamos o coeficiente dominante a em evidência

$$ax^2 + bx + c = a\Big(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\Big)$$

e daí tomamos

$$\beta = \frac{b}{2a}, \tag{39.12}$$

o que nos dá

$$ax^2 + bx + c = a[(x + \beta)^2 + \gamma]$$

em que γ é escolhido de modo que $\beta^2 + \gamma = \frac{c}{a}$, isto é:

$$\gamma = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \tag{39.13}$$

EXEMPLO 39.5 (completando quadrados). Vamos fazer um completamento de quadrados no polinômio

$$3x^2 - 12x + 15.$$

Temos

$$3x^2 - 12x + 15 = 3(x^2 - 4x + 5)$$

e

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$$

donde:

$$3x^2 - 12x + 15 = 3\big((x-2)^2 + 1\big).$$

Voltando ao problema de resolver uma integral envolvendo a raiz quadrada

$$\sqrt{ax^2 + bx + c},$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ são constantes e $a \neq 0$, começamos fazendo um completamento de quadrados:

$$ax^2 + bx + c = a[(x+\beta)^2 + \gamma].$$

O próximo passo depende de uma análise de casos a respeito dos sinais de a e γ. Dependendo desses sinais, caímos numa situação similar àquela do Exemplo 39.1, numa situação similar àquela do Exemplo 39.2 ou numa situação similar àquela do Exemplo 39.3. Antes de fazer uma análise completa dos casos possíveis, vamos tratar de um exemplo específico.

EXEMPLO 39.6. Suponha que queremos calcular a integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 12x + 26}}\,\mathrm{d}x.$$

Fazemos primeiro o completamento de quadrados no polinômio de grau 2 que aparece dentro da raiz quadrada:

$$2x^2 - 12x + 26 = 2(x^2 - 6x + 13) = 2[(x-3)^2 + 4].$$

Daí:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 12x + 26}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2 + 4}}\,\mathrm{d}x.$$

Como os sinais dos dois termos dentro da raiz quadrada $\sqrt{(x-3)^2 + 4}$ são positivos, estamos numa situação similar àquela do Exemplo 39.2. Devemos escolher uma substituição de variáveis de modo que

$$(x-3)^2 = 4\operatorname{tg}^2\theta,$$

o que nos dará:

$$(x-3)^2 + 4 = 4(1 + \operatorname{tg}^2\theta) = 4\sec^2\theta.$$

A substituição de variáveis que resolve o problema é

$$x = 3 + 2\operatorname{tg}\theta, \quad \mathrm{d}x = 2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

com $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Temos então

$$\sqrt{(x-3)^2+4} = 2\sec\theta$$

e portanto:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-12x+26}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2+4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Usando o resultado da integral da função secante que foi calculada no Exemplo 37.2 obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C, \tag{39.14}$$

em que o valor absoluto em torno da expressão $\sec\theta + \operatorname{tg}\theta$ é redundante para $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Reescrevendo o lado direito de (39.14) em termos da variável original x chegamos então ao resultado final:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-12x+26}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left[\frac{1}{2}\Big(x-3+\sqrt{x^2-6x+13}\Big)\right] + C.$$

Passamos agora à análise completa dos casos possíveis no cálculo de uma integral em que o integrando é obtido por um número finito de somas, produtos e quocientes envolvendo funções polinomiais e a raiz quadrada:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}. \tag{39.15}$$

Em primeiro lugar, notamos que se $a=0$, então substituições trigonométricas não são necessárias para o cálculo da integral. De fato, se também $b=0$, então (39.15) é meramente uma constante. Se $a=0$ e $b\neq 0$, então a integral pode ser resolvida usando a substituição[10] de variáveis $y=\sqrt{bx+c}$ ou às vezes a substituição mais simples $y = bx+c$ já resolve o problema. Se $a \neq 0$, começamos fazendo o completamento de quadrados

$$ax^2+bx+c = a[(x+\beta)^2+\gamma]$$

em que β e γ são dados por (39.12) e (39.13). A escolha da substituição trigonométrica apropriada depende agora dos sinais de a e γ. Note que o sinal de γ é precisamente o sinal oposto ao sinal do discriminante b^2-4ac. Vejamos os casos possíveis.

Caso 1. Se a e γ são ambos positivos, estamos numa situação similar àquela do Exemplo 39.2. Usamos a substituição

$$x = \sqrt{\gamma}\operatorname{tg}\theta - \beta, \quad \mathrm{d}x = \sqrt{\gamma}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

com $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ obtendo

$$(x+\beta)^2+\gamma = \gamma(1+\operatorname{tg}^2\theta) = \gamma\sec^2\theta$$

[10] Mais precisamente, usamos a substituição $x = \frac{1}{b}(y^2-c)$ com $y \geq 0$ (justificada pelo item (b) do Teorema 36.5) em vez de $y=\sqrt{bx+c}$, para evitar que tenhamos que remover do domínio do integrando o ponto x em que $bx+c=0$; nesse ponto a derivada $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ não existe.

e:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\gamma}\sec\theta.$$

Caso 2. Se a é positivo e γ é negativo, estamos numa situação similar àquela do Exemplo 39.3. Usamos a substituição

$$x = \sqrt{-\gamma}\sec\theta - \beta, \quad \mathrm{d}x = \sqrt{-\gamma}\,\mathrm{tg}\,\theta\sec\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

com $\theta \in [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ obtendo

$$(x+\beta)^2 + \gamma = -\gamma(\sec^2\theta - 1) = -\gamma\,\mathrm{tg}^2\,\theta$$

e:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a\gamma}\,|\,\mathrm{tg}\,\theta|.$$

Caso 3. Se a e γ são ambos negativos, estamos numa situação similar àquela do Exemplo 39.1. Usamos a substituição

$$x = \sqrt{-\gamma}\,\mathrm{sen}\,\theta - \beta, \quad \mathrm{d}x = \sqrt{-\gamma}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

com $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ obtendo

$$(x+\beta)^2 + \gamma = \gamma(1 - \mathrm{sen}^2\,\theta) = \gamma\cos^2\theta$$

e:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\gamma}\cos\theta.$$

Caso 4. Se a é negativo e γ é positivo, então $ax^2+bx+c < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e portanto não há nenhum x real para o qual a raiz quadrada $\sqrt{ax^2+bx+c}$ esteja definida. Dessa forma, se o integrando envolve essa raiz quadrada, o seu domínio é vazio.

Caso 5. Se $\gamma = 0$, então só faz sentido considerar o caso $a > 0$, pois para $a < 0$ a raiz quadrada $\sqrt{ax^2+bx+c}$ só está definida para $x = -\beta$ e o domínio de um integrando que envolva essa raiz quadrada terá apenas um ponto. Se $\gamma = 0$ e $a > 0$, então

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,|x+\beta|,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso a integral não é resolvida usando uma substituição trigonométrica: basta tratar separadamente a restrição do integrando aos intervalos $[-\beta, +\infty[$ e $]-\infty, -\beta]$. Para x no primeiro intervalo temos $|x+\beta| = x+\beta$ e para x no segundo intervalo temos $|x+\beta| = -(x+\beta)$.

39.1. Funções hiperbólicas. As funções hiperbólicas são funções que satisfazem várias identidades muito similares às identidades satisfeitas pelas funções trigonométricas e, graças a essas identidades, elas podem também ser usadas para resolver integrais envolvendo raízes quadradas do tipo

$$\sqrt{ax^2+bx+c}$$

por um método similar ao das substituições trigonométricas. Em alguns casos é mais fácil resolver essas integrais usando substituições com funções hiperbólicas do que com funções trigonométricas. Vamos às definições.

Definição 39.7 (seno e cosseno hiperbólicos). As funções *seno hiperbólico* e *cosseno hiperbólico*, denotadas respectivamente por $\operatorname{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, são definidas por

$$\operatorname{senh}\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cosh\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2},$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

É fácil verificar que vale a identidade

$$\cosh^2\theta - \operatorname{senh}^2\theta = 1, \tag{39.16}$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Essa identidade nos diz que, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, o ponto $(\cosh\theta, \operatorname{senh}\theta)$ pertence à hipérbole de equação

$$x^2 - y^2 = 1$$

e daí o nome "hiperbólico". A igualdade (39.16) é análoga à identidade

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1,$$

que nos diz que o ponto $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ pertence ao círculo unitário de equação

$$x^2 + y^2 = 1,$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Como veremos agora, todas as identidades envolvendo as funções trigonométricas usuais possuem versões para as funções hiperbólicas que, tipicamente, diferem por algum sinal[11]. Note que $\cosh 0 = \cos 0 = 1$ e que, assim com o cosseno usual, o cosseno hiperbólico é uma *função par*, isto é

$$\cosh(-\theta) = \cosh\theta,$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Além do mais, $\operatorname{senh} 0 = \operatorname{sen} 0 = 0$ e, assim como o seno usual, o seno hiperbólico é uma *função ímpar*, isto é

$$\operatorname{senh}(-\theta) = -\operatorname{senh}\theta,$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Vejamos como ficam as derivadas do seno e do cosseno hiperbólicos.

Teorema 39.8 (derivada de seno e cosseno hiperbólicos). *A derivada da função seno hipernólico é a função cosseno hiperbólico e a derivada da função cosseno hiperbólico é a função seno hiperbólico, isto é:*

$$\operatorname{senh}' = \cosh \quad \textit{e} \quad \cosh' = \operatorname{senh}.$$

---

[11]Isso não é uma coincidência. Usando as séries de Taylor (33.41), (33.46) e (33.47) das funções exponencial, seno e cosseno é possível definir uma extensão dessas funções para os números complexos que satisfazem as mesmas identidades que elas satisfazem para os números reais. Além do mais, vale a *fórmula de Euler* que diz que

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x,$$

para todo $x \in \mathbb{C}$. Trocando x por $-x$ nessa fórmula obtemos $e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$ e daí segue que $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ e $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, para todo $x \in \mathbb{C}$. Portanto as funções hiperbólicas se relacionam com as funções trigonométricas pelas igualdades $\cosh\theta = \cos(i\theta)$ e $\operatorname{senh}\theta = -i \operatorname{sen}(i\theta)$.

Demonstração. Basta fazer a conta. □

Corolário 39.9. *A função seno hiperbólico é uma bijeção estritamente crescente de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *e a restrição da função cosseno hiperbólico ao intervalo* $[0,+\infty[$ *é estritamente crescente (em particular injetora) e sua imagem é o intervalo* $[1,+\infty[$.

Demonstração. Como $\cosh\theta > 0$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$ e $\operatorname{senh}' = \cosh$, segue que a função seno hiperbólico é estritamente crescente (Teorema 27.4) e em particular injetora. O fato que a imagem da função seno hiperbólico é $\mathbb{R}$ segue do Teorema do Valor Intermediário (Teorema 10.5) e do fato que:

$$\lim_{\theta\to-\infty} \operatorname{senh}\theta = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{\theta\to+\infty} \operatorname{senh}\theta = +\infty.$$

Similarmente, como $\operatorname{senh}\theta > 0$ para todo $\theta > 0$ e $\cosh' = \operatorname{senh}$, segue que a restrição da função cosseno hiperbólico ao intervalo $[0,+\infty[$ é estritamente crescente. O fato que a imagem da restrição da função cosseno hiperbólico ao intervalo $[0,+\infty[$ é o intervalo $[1,+\infty[$ segue do Teorema do Valor Intermediário e das igualdades $\cosh 0 = 1$ e $\lim_{\theta\to+\infty}\cosh\theta = +\infty$. □

Note que o cosseno hiperbólico não é injetor, já que é uma função par. Vamos ver agora como ficam as fórmulas para o seno e o cosseno hiperbólico de uma soma.

Teorema 39.10 (seno e cosseno hiperbólico da soma). *Para quaisquer* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$*, vale que:*

$$\operatorname{senh}(\alpha+\beta) = \operatorname{senh}\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\operatorname{senh}\beta,$$
$$\cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \operatorname{senh}\alpha\operatorname{senh}\beta.$$

Em particular

$$\operatorname{senh}(2\alpha) = 2\operatorname{senh}\alpha\cosh\alpha, \tag{39.17}$$

$$\cosh(2\alpha) = \cosh^2\alpha + \operatorname{senh}^2\alpha, \tag{39.18}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Basta fazer as contas. □

Exemplo 39.11. Vamos calcular a integral

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

que já havíamos calculado no Exemplo 39.2, mas agora usando a substituição

$$x = \operatorname{senh}\theta, \quad \mathrm{d}x = \cosh\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

com $\theta \in \mathbb{R}$. De (39.16) e do fato que o cosseno hiperbólico é sempre positivo vem

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{senh}^2\theta} = \cosh\theta,$$

e portanto:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \cosh^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

A integral do cosseno hiperbólico ao quadrado pode ser calculada da mesma forma que calculamos a integral do cosseno ao quadrado no Exemplo 37.4. De fato, usando (39.18) e (39.16) obtemos a identidade

$$\cosh^2\theta = \frac{1+\cosh(2\theta)}{2},$$

que é similar à identidade em (37.3) que relaciona o cosseno ao quadrado com o cosseno do dobro do ângulo. Daí

$$\int \cosh^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{senh}(2\theta) + C$$

e de (39.17) vem:

$$\frac{1}{4}\operatorname{senh}(2\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{senh}\theta\cosh\theta = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}.$$

Para escrever θ em função de x, multiplicamos a igualdade

$$\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} = x$$

dos dois lados por e^θ obtendo:

$$(e^\theta)^2 - 2xe^\theta - 1 = 0.$$

Daí

$$e^\theta = \frac{2x + \sqrt{4x^2+4}}{2} = x + \sqrt{x^2+1}$$

e portanto:

$$\theta = \ln\Big(x + \sqrt{x^2+1}\Big).$$

Assim, o resultado da integral que queremos calcular é:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\ln\Big(x+\sqrt{x^2+1}\Big) + x\sqrt{1+x^2}\Big] + C.$$

O seno e o cosseno hiperbólico podem ser usados para definir versões hiperbólicas das funções tangente, cotangente, secante e cossecante.

Definição 39.12 (mais funções hiperbólicas). Para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$, definimos a *tangente hiperbólica* de θ por

$$\operatorname{tgh}\theta = \frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta}$$

e a *secante hiperbólica* de θ por:

$$\operatorname{sech}\theta = \frac{1}{\cosh\theta}.$$

Similarmente, para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$ não nulo definimos a *cotangente hiperbólica* de θ por

$$\operatorname{cotgh}\theta = \frac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta}$$

e a *cossecante hiperbólica* de θ por:

$$\operatorname{cosech}\theta = \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}.$$

É fácil verificar que a derivada da tangente hiperbólica é dada por

$$\operatorname{tgh}'\theta = \operatorname{sech}^2\theta,$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Daí a tangente hiperbólica é uma função estritamente crescente. A sua imagem é o intervalo aberto $]-1,1[$, o que segue do Teorema do Valor Intermediário (Teorema 10.5) e das igualdades

$$\lim_{\theta\to-\infty}\operatorname{tgh}\theta = \lim_{\theta\to-\infty}\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{e^{\theta}+e^{-\theta}} = \lim_{\theta\to-\infty}\frac{e^{-\theta}(e^{2\theta}-1)}{e^{-\theta}(e^{2\theta}+1)} = -1$$

e:

$$\lim_{\theta\to+\infty}\operatorname{tgh}\theta = \lim_{\theta\to+\infty}\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{e^{\theta}+e^{-\theta}} = \lim_{\theta\to+\infty}\frac{e^{\theta}(1-e^{-2\theta})}{e^{\theta}(1+e^{-2\theta})} = 1.$$

A tangente hiperbólica e a secante hiperbólica estão relacionadas pela identidade

$$1-\operatorname{tgh}^2\theta = \operatorname{sech}^2\theta$$

e daí é possível resolver a integral

$$\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

usando a substituição $x = \operatorname{tgh}\theta$ (removendo a princípio do domínio do integrando os pontos $x = 1$ e $x = -1$ que não pertencem à imagem da função tangente hiperbólica), mas o método que usamos no Exemplo 39.1 com a substituição trigonométrica $x = \operatorname{sen}\theta$ é bem mais simples nesse caso.

40. Funções racionais com denominador de grau dois

Na Seção 38 nós iniciamos o estudo do método de decomposição em frações parciais que é usado para o cálculo de integrais de funções racionais. Naquela seção consideramos apenas funções racionais cujo denominador possui todas as raízes simples e reais. Antes de partir para o caso geral, vamos tratar do caso de funções racionais cujo denominador tem grau 2 e não tem raiz real ou tem uma única raiz real dupla. Considere então uma função racional f dada por

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ com $q(x) \neq 0$, em que p e q são polinômios e q tem grau 2. Se q possui uma única raiz real dupla, então q se escreve na forma

$$q(x) = a(x-\alpha)^2,$$

em que a e α são números reais e $a \neq 0$. Nesse caso a integral

$$\int\frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int\frac{p(x)}{(x-\alpha)^2}\,\mathrm{d}x$$

pode ser resolvida facilmente usando a substituição de variáveis

$$y = x - \alpha, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}x,$$

como ilustraremos no Exemplo 40.1 logo adiante. Vamos analisar então o caso em que q não tem raiz real. Recorde que vimos na Seção 38 que o problema de integrar funções racionais quaisquer é reduzido, via algoritmo de divisão de polinômios, ao problema de integrar funções racionais próprias, isto é, funções racionais em que o grau do numerador é menor do que o grau do denominador. De fato, toda função racional pode ser escrita como a soma de um polinômio com uma função racional própria possuindo o mesmo denominador que a função racional original (veja (38.5)). Vamos então supor que o numerador p tem grau menor ou igual a 1. O caso trivial é aquele em que p é exatamente igual à derivada de q. De fato, a integral

$$\int \frac{q'(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

pode ser calculada facilmente usando a substituição de variáveis

$$y = q(x), \quad \mathrm{d}y = q'(x)\,\mathrm{d}x,$$

já que essa substituição nos dá:

$$\int \frac{q'(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln|y| + C = \ln|q(x)| + C.$$

Se p é um polinômio de grau menor ou igual a 1 arbitrário então, como q' tem grau 1, podemos escrever p na forma

$$p = uq' + v,$$

para certos números reais u e v. Daí

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = u\int \frac{q'(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x + v\int \frac{1}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

e portanto o calculo da integral de uma função racional cujo denominador q tem grau 2 se reduz ao cálculo de:

$$\int \frac{1}{q(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{40.1}$$

O cálculo dessa integral é feito através de uma substituição trigonométrica. Iniciamos por um completamento de quadrados

$$q(x) = a[(x+\beta)^2 + \gamma]$$

e notamos que o fato que q não tem raiz real implica que $\gamma > 0$ (veja (39.13)). A integral (40.1) é resolvida então usando uma substituição similar àquela usada no Exemplo 39.2. Mais explicitamente, fazemos a substituição

$$x = \sqrt{\gamma}\operatorname{tg}\theta - \beta, \quad \mathrm{d}x = \sqrt{\gamma}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

com $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, que nos dá:

$$q(x) = a[(x+\beta)^2 + \gamma] = a\gamma(1 + \operatorname{tg}^2\theta) = a\gamma\sec^2\theta.$$

Daí:

$$\int \frac{1}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{\gamma}}{a\gamma}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{a\sqrt{\gamma}} + C = \frac{1}{a\sqrt{\gamma}}\operatorname{arctg}\Big(\frac{x+\beta}{\sqrt{\gamma}}\Big) + C.$$

Vejamos alguns exemplos. Começamos por uma integral em que o denominador tem uma única raiz real dupla.

Exemplo 40.1 (denominador com uma única raiz real dupla). Vamos calcular a integral:

$$\int \frac{x^4+1}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x. \tag{40.2}$$

Temos que

$$x^2-4x+4 = (x-2)^2$$

e daí a integral (40.2) é resolvida usando a substituição de variáveis:

$$y = x-2, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}x.$$

De fato:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4+1}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^4+1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(y+2)^4+1}{y^2}\,\mathrm{d}y\\
&= \int \frac{y^4+8y^3+24y^2+32y+17}{y^2}\,\mathrm{d}y\\
&= \int \Big(y^2+8y+24+\frac{32}{y}+\frac{17}{y^2}\Big)\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{y^3}{3}+4y^2+24y+32\ln|y|-\frac{17}{y}+C\\
&= \frac{(x-2)^3}{3}+4(x-2)^2+24(x-2)\\
&\qquad +32\ln|x-2|-\frac{17}{x-2}+C.
\end{aligned}$$

Exemplo 40.2 (denominador de grau 2 sem raiz real). Vamos calcular a integral:

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^2+6x+11}\,\mathrm{d}x.$$

Começamos dividindo o polinômio x^3+x+1 pelo polinômio $x^2+6x+11$ obtendo

$$x^3+x+1 = (x-6)(x^2+6x+11) + (26x+67)$$

e

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+6x+11} = x-6+\frac{26x+67}{x^2+6x+11},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Daí:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x+1}{x^2+6x+11}\,\mathrm{d}x &= \int (x-6)\,\mathrm{d}x + \int \frac{26x+67}{x^2+6x+11}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2} - 6x + \int \frac{26x+67}{x^2+6x+11}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Para calcular a integral

$$\int \frac{26x+67}{x^2+6x+11}\,\mathrm{d}x$$

começamos tomando a derivada do denominador

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+6x+11) = 2x+6$$

e aí escrevemos o numerador como a soma da derivada do denominador multiplicada por um número real com outro número real:

$$26x+67 = 13(2x+6) - 11.$$

Daí:

$$\int \frac{26x+67}{x^2+6x+11}\,\mathrm{d}x = 13\int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}\,\mathrm{d}x - 11\int \frac{1}{x^2+6x+11}\,\mathrm{d}x.$$

A primeira integral

$$\int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}\,\mathrm{d}x$$

é calculada usando a substituição de variáveis

$$y = x^2+6x+11, \quad \mathrm{d}y = (2x+6)\,\mathrm{d}x$$

como segue:

$$\int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln|y| + C = \ln|x^2+6x+11| + C.$$

Para calcular a integral remanescente

$$\int \frac{1}{x^2+6x+11}\,\mathrm{d}x$$

começamos completando quadrados

$$x^2+6x+11 = (x+3)^2+2$$

e aí usamos a substituição de variáveis

$$x = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\theta - 3, \quad \mathrm{d}x = \sqrt{2}\,\sec^2\theta,$$

com $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e obtemos:

$$x^2+6x+11 = (x+3)^2+2 = 2(1+\mathrm{tg}^2\,\theta) = 2\sec^2\theta.$$

Daí:

$$\int \frac{1}{x^2+6x+11}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Juntando todos os pedaços vem

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^2+6x+11}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 6x + 13\ln(x^2+6x+11) - \frac{11\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\Big(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\Big) + C,$$

em que podemos eliminar o valor absoluto em torno de $x^2+6x+11$ já que $x^2+6x+11 = (x+3)^2+2 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

41. Decomposição em frações parciais: o caso geral

Nesta seção nós generalizaremos o Teorema 38.1 e obteremos um método que permite integrar funções racionais arbitrárias. Antes de apresentar os resultados principais da seção, precisamos fazer uma breve revisão de alguns fatos importantes sobre polinômios, inclusive tocando de leve no tema de raízes complexas e polinômios com coeficientes complexos, já que agora precisaremos tratar de funções racionais cujo denominador possui raízes que não são reais.

Sejam p e q polinômios, em que q é não nulo. Recorde que o *algoritmo de divisão de polinômios* nos dá polinômios u e v tais que:

(i) $p = qu + v$;

(ii) v tem grau[12] menor do que o grau de q.

Os polinômios u e v satisfazendo as propriedades (i) e (ii) são únicos. O algoritmo de divisão de polinômios funciona tanto para polinômios com coeficientes reais quanto para polinômios com coeficientes complexos: se p e q têm coeficientes reais, então u e v têm coeficientes reais, e se p e q têm coeficientes complexos, então u e v têm coeficientes complexos. O polinômio u é chamado o *quociente* da divisão de p por q e o polinômio v o *resto* dessa divisão. Se u é não nulo, então o grau de u é igual ao grau de p menos o grau de q. Dizemos que q é um *divisor* de p se o resto da divisão de p por q é nulo. Equivalentemente, q é um divisor de p se existe um polinômio u tal que $p = qu$. Se p é não nulo e q é um divisor de p, então o grau de q é menor ou igual ao grau de p. Se $q(x) = x - \alpha$, em que α é um número real ou complexo, então segue de (ii) que o resto v da divisão de p por q é um polinômio constante e de (i) que $v = p(\alpha)$. Daí:

$$\alpha \text{ é uma raiz de } p \Longleftrightarrow x - \alpha \text{ é um divisor de } p.$$

Se p é o polinômio nulo, então qualquer polinômio q é um divisor de p, já que $p = qu$ com $u = 0$. Se p é não nulo e α é uma raiz de p, então o maior inteiro positivo k tal que $(x-\alpha)^k$ é um divisor de p é chamado a *multiplicidade* da raiz α em p. Dado um inteiro positivo k, vale que α é uma raiz de p de multiplicidade k se, e somente se, p pode ser escrito na forma $p(x) = (x-\alpha)^k u(x)$, em que u é um polinômio do qual α não é raiz. Uma raiz α de p é chamada *simples* se a sua multiplicidade é igual a 1 e *múltipla*

[12]Como na Seção 33, convencionamos que sentenças do tipo "o grau do polinômio v é menor do que ..." ou "o grau do polinômio v é menor ou igual a ..." são verdadeiras se v for o polinômio nulo (veja a nota de rodapé na página 155).

se a sua multiplicidade é maior do que 1. Note que se $p(x) = (x - \alpha)u(x)$, para um certo polinômio u, então toda raiz de u é uma raiz de p, toda raiz de p distinta de α é uma raiz de u e α é uma raiz de u se, e somente se, α é uma raiz múltipla de p.

O *Teorema Fundamental da Álgebra* diz que todo polinômio não constante com coeficientes complexos (e, em particular, todo polinômio não constante com coeficiente reais) possui uma raiz complexa. Desse teorema e das considerações acima, segue que todo polinômio não constante q com coeficientes complexos pode ser escrito na forma

$$q(x) = c(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \cdots (x - \alpha_n)^{k_n}, \tag{41.1}$$

em que c é uma constante complexa não nula, n, k_1, k_2, $\ldots$, k_n são inteiros positivos e α_1, α_2, $\ldots$, α_n são números complexos dois a dois distintos. Temos que α_1, α_2, $\ldots$, α_n são precisamente as raízes de q e que k_i é a multiplicidade da raiz α_i, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Um polinômio não constante q com coeficientes reais também pode ser escrito na forma (41.1), mas os números complexos α_i não são necessariamente reais. Vejamos agora como podemos obter uma fatoração similar a (41.1) para um polinômio com coeficientes reais em que cada fator também tenha coeficientes reais. Recorde que o *complexo conjugado* de um número complexo α é o número complexo $\overline{\alpha}$ obtido de α pela troca do sinal da parte imaginária de α, mantendo-se a parte real inalterada. Um cálculo simples mostra que se α e β são números complexos, então:

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} \quad \text{e} \quad \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}. \tag{41.2}$$

Se α é uma raiz complexa de um polinômio q *com coeficientes reais*, então usando (41.2) e tomando o complexo conjugado dos dois lados da igualdade $q(\alpha) = 0$, obtemos que $\overline{\alpha}$ também é uma raiz de q. Se α não é real, então α e $\overline{\alpha}$ são raízes distintas de q e portanto quando escrevemos $q(x) = (x-\alpha)u(x)$, temos que $\overline{\alpha}$ é uma raiz de u. Segue daí que se um número complexo não real α é raiz de um polinômio q com coeficientes reais, então o polinômio $(x - \alpha)(x - \overline{\alpha})$ é um divisor de q. Note que $(x - \alpha)(x - \overline{\alpha})$ é um polinômio de grau 2 com coeficientes reais, mas sem raiz real. Essas considerações demonstram o seguinte resultado.

Teorema 41.1 (fatoração de um polinômio real). *Se q é um polinômio não constante com coeficientes reais, então podemos escrever q na forma*

$$q(x) = cu_1(x)^{k_1}u_2(x)^{k_2} \cdots u_n(x)^{k_n},$$

em que c é uma constante real não nula, n, k_1, k_2, $\ldots$, k_n são inteiros positivos, u_1, u_2, $\ldots$, u_n são polinômios mônicos dois a dois distintos com coeficientes reais e, para todo $i = 1, \ldots, n$, vale que ou u_i tem grau 1 ou u_i tem grau 2 e não tem raiz real. □

Recorde que um polinômio *mônico* é um polinômio cujo coeficiente dominante é igual a 1. Para enunciar o nosso principal teorema sobre decomposição de funções racionais precisamos de mais uma definição.

DEFINIÇÃO 41.2 (polinômios relativamente primos). Dizemos que dois polinômios[13] p e q são *relativamente primos* se p e q não possuem divisores comuns não triviais, isto é, se qualquer polinômio que seja um divisor tanto de p como de q for constante.

Note que um polinômio constante não nulo é um divisor de qualquer polinômio e por isso dizemos que polinômios constantes não nulos são *divisores comuns triviais* de p e q. Segue do Teorema Fundamental da Álgebra que dois polinômios p e q são relativamente primos se, e somente se, p e q não possuem uma raiz complexa comum.

Se q é um polinômio não constante com coeficientes reais e se fatoramos q como no Teorema 41.1, então os polinômios q_i definidos por

$$q_i(x) = u_i(x)^{k_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

são dois a dois relativamente primos e vale a igualdade:

$$q(x) = cq_1(x)q_2(x)\cdots q_n(x). \tag{41.3}$$

O teorema de decomposição de uma função racional que enunciamos agora trata precisamente de funções racionais próprias em que o denominador q está fatorado na forma (41.3) e q_1, q_2, $\dots$, q_n são dois a dois relativamente primos. Recorde que o problema de integração de funções racionais quaisquer se reduz ao problema de integração de funções racionais próprias, isto é, funções racionais em que o grau do numerador é menor do que o grau do denominador (veja Seção 38 e, mais especificamente, (38.5)). O teorema a seguir e os outros que enunciaremos adiante valem tanto para polinômios com coeficientes reais quanto para polinômios com coeficientes complexos, mas estamos interessados apenas no caso de coeficientes reais.

TEOREMA 41.3 (decomposição em frações parciais). *Sejam p e q polinômios e suponha que*

$$q(x) = cq_1(x)q_2(x)\cdots q_n(x),$$

em que c é uma constante não nula, q_1, q_2, $\dots$, q_n são polinômios dois a dois relativamente primos e n é um inteiro positivo. Se o grau de p é menor do que o grau de q, então existem e são únicos polinômios p_1, p_2, $\dots$, p_n tais que p_i tem grau menor do que o grau de q_i, para todo $i = 1, 2, \dots, n$ e

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)} + \cdots + \frac{p_n(x)}{q_n(x)}, \tag{41.4}$$

para todo x tal que $q(x) \neq 0$.

[13] A definição se aplica tanto para polinômios com coeficientes reais como para polinômios com coeficientes complexos. Observamos que se p e q tem coeficientes reais, então p e q possuem um divisor comum não constante com coeficientes complexos se, e somente se, p e q possuem um divisor comum não constante com coeficientes reais. De fato, se p e q possuem um divisor comum não constante com coeficientes complexos e se α é uma raiz complexa desse divisor comum, então ou α é real e $x - \alpha$ é um divisor comum com coeficientes reais de p e q ou α não é real e $(x - \alpha)(x - \overline{\alpha})$ é um divisor comum com coeficientes reais de p e q.

A demonstração do Teorema 41.3 é um tanto complicada e será deixada para o final da seção. Note que o Teorema 38.1 é um caso particular do Teorema 41.3: de fato, se q só tem raízes reais e simples, isto é, se podemos escrever q na forma

$$q(x) = c(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n),$$

para algum $c \in \mathbb{R}$ não nulo, algum inteiro positivo n e certos números reais distintos α_1, α_2, ..., α_n, então os polinômios

$$q_1(x) = x - \alpha_1, \quad q_2(x) = x - \alpha_2, \quad \ldots, \quad q_n(x) = x - \alpha_n$$

são dois a dois relativamente primos e aplicando o Teorema 41.3 obtemos precisamente a conclusão do Teorema 38.1.

Vejamos agora como fazer para encontrar na prática os polinômios p_i cuja existência é garantida pelo Teorema 41.3. Note primeiramente que multiplicando a igualdade (41.4) dos dois lados por $q(x)$ vem

$$p(x) = p_1(x)Q_1(x) + p_2(x)Q_2(x) + \cdots + p_n(x)Q_n(x), \tag{41.5}$$

em que Q_i é igual ao produto dos fatores c, q_1, q_2, ..., q_n omitindo o fator q_i, isto é:

$$Q_i(x) = cq_1(x)q_2(x) \cdots q_{i-1}(x)q_{i+1}(x) \cdots q_n(x). \tag{41.6}$$

Como argumentamos na Seção 38 (usando o fato que dois polinômios distintos podem assumir o mesmo valor no máximo num número finito de pontos), temos que (41.4) vale para todo x tal que $q(x) \neq 0$ se, e somente se, (41.5) vale para todo x. Precisamos então encontrar polinômios p_i tais que (41.5) vale para todo x e tais que cada p_i tem o grau menor do que o grau de q_i. Para isso, escrevemos os coeficientes do polinômio p_i como incógnitas e usamos a igualdade (41.5) para obter um sistema de equações para determinar esses coeficientes desconhecidos. Como o grau de p_i deverá ser menor do que o grau de q_i, o número de coeficientes a serem determinados para p_i é igual ao grau de q_i e portanto o número total de coeficientes a serem determinados para todos os polinômios p_1, p_2, ..., p_n é igual ao grau de q. Denotando por m o grau de q, temos que ambos os lados da igualdade (41.5) são polinômios de grau menor do que m; de fato, p tem grau menor do que m por hipótese e p_iQ_i tem grau menor do que $q_iQ_i = q$. Igualando os coeficientes dos polinômios que aparecem dos dois lados de (41.5) obteremos então um sistema linear de m equações com m incógnitas que nos permite determinar todos os m coeficientes dos polinômios p_1, p_2, ..., p_n. Uma outra maneira de encontrar m equações para determinar os coeficientes dos polinômios p_1, p_2, ..., p_n é escolher m números reais (ou complexos) distintos e substituir x em ambos os lados de (41.5) por cada um desses m números. No caso particular que tratamos na Seção 38, em que q possuía m raízes reais distintas, bastava substituir x por cada uma das raízes de q e rapidamente podíamos determinar os polinômios p_1, p_2, ..., p_n que naquele caso eram todos constantes. Aqui ainda é verdade que substituir x por raízes de q em (41.5) é uma boa ideia, pois se α é uma raiz de q, então α é uma raiz de algum q_i e vale que $Q_j(\alpha) = 0$, para todo $j \neq i$. Infelizmente, não é necessariamente verdade que q tem m raízes distintas, de modo que usando apenas raízes de q podemos não obter as m equações que precisamos para determinar os coeficientes dos polinômios p_1, p_2, ..., p_n. Notamos também que, embora seja possível substituir x por raízes complexas não reais de q em (41.5), esse tipo de substituição pode gerar algumas contas trabalhosas para fazer.

Exemplo 41.4 (decomposição em frações parciais). Considere os polinômios

$$p(x) = 3x^3 + x^2 + 7x + 7,$$
$$q(x) = x^4 - 4x + 3$$

e a função racional f definida por

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ com $q(x) \neq 0$. Uma breve inspeção mostra que 1 é uma raiz de q. Dividindo $q(x)$ por $x - 1$ obtemos:

$$q(x) = (x-1)(x^3 + x^2 + x - 3).$$

Vemos que 1 também é raiz de $x^3 + x^2 + x - 3$ e portanto podemos dividir esse novo polinômio por $x - 1$, obtendo:

$$x^3 + x^2 + x - 3 = (x-1)(x^2 + 2x + 3).$$

Daí:

$$q(x) = (x-1)^2(x^2 + 2x + 3). \tag{41.7}$$

Note que o polinômio $x^2 + 2x + 3$ não tem raiz real e portanto (41.7) é uma fatoração de q como no Teorema 41.1. Pelo Teorema 41.3, a função racional própria f pode ser decomposta na forma

$$f(x) = \frac{p_1(x)}{(x-1)^2} + \frac{p_2(x)}{x^2 + 2x + 3}, \tag{41.8}$$

em que p_1 e p_2 tem grau menor ou igual a 1. Multiplicando os dois lados de (41.8) por $q(x)$ vem:

$$3x^3 + x^2 + 7x + 7 = p_1(x)(x^2 + 2x + 3) + p_2(x)(x-1)^2. \tag{41.9}$$

Os polinômios p_1 e p_2 podem ser escritos na forma

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x, \quad p_2(x) = b_0 + b_1 x, \tag{41.10}$$

para certos $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$. Substituindo (41.10) em (41.9) e expandindo o lado direito de (41.9) obtemos:

$$\begin{aligned} 3x^3 + x^2 + 7x + 7 = {} & (a_1 + b_1)x^3 + (a_0 + 2a_1 + b_0 - 2b_1)x^2 \\ & + (2a_0 + 3a_1 - 2b_0 + b_1)x + (3a_0 + b_0). \end{aligned} \tag{41.11}$$

A igualdade (41.11) é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 3, \\ a_0 + 2a_1 + b_0 - 2b_1 = 1, \\ 2a_0 + 3a_1 - 2b_0 + b_1 = 7, \\ 3a_0 + b_0 = 7 \end{cases} \tag{41.12}$$

e resolvendo esse sistema obtemos:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = 2. \tag{41.13}$$

Logo

$$p_1(x) = 2 + x, \quad p_2(x) = 1 + 2x$$

e:

$$f(x) = \frac{2+x}{(x-1)^2} + \frac{1+2x}{x^2+2x+3}.$$

Poderíamos também ter determinado os coeficientes desconhecidos a_0, a_1, b_0, b_1 escolhendo 4 números reais (ou complexos) distintos e substituindo x por cada um desses quatro números dos dois lados de (41.9) para obter quatro equações. Por exemplo, usando $x = 1$, que é uma raiz de q, obtemos facilmente a equação

$$6(a_0 + a_1) = 18$$

e aí precisamos de mais três equações. Utilizar as outras raízes de q para obter mais equações poderia ser uma boa ideia, mas essas raízes são $-1+i\sqrt{2}$ e $-1 - i\sqrt{2}$ e substituir x por esses valores em (41.9) produz umas contas um pouco feias. Outra opção é simplesmente escolher mais três números reais quaisquer para substituir no lugar de x em (41.9) e obter as equações que faltam. Isso funciona, mas não é vantajoso computacionalmente em relação ao método que já usamos acima para determinar a_0, a_1, b_0 e b_1. Por exemplo, se substituímos x pelos valores 1, 0, -1 e 2 dos dois lados de (41.9) obtemos as equações

$$\begin{cases} 6a_0 + 6a_1 = 18, \\ 3a_0 + b_0 = 7, \\ 2a_0 - 2a_1 + 4b_0 - 4b_1 = -2, \\ 11a_0 + 22a_1 + b_0 + 2b_1 = 49 \end{cases}$$

e resolvendo esse sistema chegamos novamente a (41.13), mas esse sistema não é mais simples de resolver do que (41.12).

O Teorema 41.3 nos permite reduzir o problema de integrar uma função racional arbitrária ao problema de integrar uma função racional cujo denominador é uma potência de um polinômio de grau 1 ou uma potência de um polinômio de grau 2 sem raiz real. Uma função racional f cujo denominador é uma potência de um polinômio de grau 1 pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-\alpha)^k},$$

em que p é um polinômio, α é um número real e k é um inteiro positivo. A integral de f pode ser calculada facilmente usando a substituição de variáveis

$$y = x - \alpha, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}x,$$

como fizemos na Seção 40 no caso $k = 2$. Vejamos um exemplo.

Exemplo 41.5 (integral de uma função racional cujo denominador é uma potência de um polinômio de grau 1). Vamos calcular a integral

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 1}{(x-1)^4}\,\mathrm{d}x$$

usando a substituição de variáveis

$$y = x - 1, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}x.$$

Temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 1}{(x-1)^4}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(y+1)^3 - 2(y+1)^2 + 3(y+1) + 1}{y^4}\,\mathrm{d}y \\ &= \int \frac{y^3 + y^2 + 2y + 3}{y^4}\,\mathrm{d}y \\ &= \int \Big(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^3} + \frac{3}{y^4}\Big)\,\mathrm{d}y \\ &= \ln|y| - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^3} + C \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} + C.\end{aligned}$$

O cálculo de integrais de funções racionais cujo denominador é uma potência de um polinômio de grau 2 sem raiz real é mais complicado e requer mais um teorema de decomposição de funções racionais. Essa decomposição segue de um resultado sobre decomposição de polinômios que nada mais é que uma versão para polinômios da decomposição que se usa para escrever um inteiro positivo numa determinada base[14].

Teorema 41.6 (expansão de um polinômio como combinação de potências de um outro polinômio). *Sejam p e q polinômios, n um inteiro positivo e suponha que o grau de p é menor do que n vezes o grau de q. Temos que existem e são únicos polinômios p_0, p_1, ..., p_{n-1} cujos graus são menores do que o grau de q e tais que, para todo x, vale a igualdade:*

$$\begin{aligned}p(x) = p_{n-1}(x)q(x)^{n-1} + p_{n-2}(x)q(x)^{n-2} + \cdots + p_2(x)q(x)^2 \\ + p_1(x)q(x) + p_0(x).\end{aligned} \tag{41.14}$$

[14]Se n é um inteiro não negativo e b é um inteiro maior ou igual a 2, então os dígitos da expansão de n na base b são os números inteiros n_k, n_{k-1}, ..., n_2, n_1, n_0 tais que $n = n_k b^k + n_{k-1} b^{k-1} + \cdots + n_2 b^2 + n_1 b + n_0$ e $0 \le n_i \le b - 1$, para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, k$.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração mais rigorosa deveria ser feita por indução, mas optamos por apresentá-la na forma de um algoritmo para encontrar efetivamente os polinômios p_0, p_1, ..., p_{n-1}, que é o que precisaremos para calcular as integrais. Denote por m o grau do polinômio q. Começamos dividindo p por q obtendo polinômios u_1 e p_0 tais que p_0 tem grau menor do que m e:

$$p(x) = u_1(x)q(x) + p_0(x). \tag{41.15}$$

Note que o fato que o grau de p é menor do que nm implica que o grau de u_1 é menor do que $nm - m = (n-1)m$. Agora dividimos u_1 por q e obtemos polinômios u_2 e p_1 tais que p_1 tem grau menor do que m e:

$$u_1(x) = u_2(x)q(x) + p_1(x); \tag{41.16}$$

note que o grau de u_2 é menor do que $(n-2)m$. Substituindo (41.16) em (41.15) vem:

$$p(x) = u_2(x)q(x)^2 + p_1(x)q(x) + p_0(x). \tag{41.17}$$

Aí dividimos u_2 por q e obtemos polinômios u_3 e p_2 tais que p_2 tem grau menor do que m e:

$$u_2(x) = u_3(x)q(x) + p_2(x); \tag{41.18}$$

note que o grau de u_3 é menor do que $(n-3)m$. Substituindo (41.18) em (41.17) obtemos:

$$p(x) = u_3(x)q(x)^3 + p_2(x)q(x)^2 + p_1(x)q(x) + p_0(x). \tag{41.19}$$

E assim por diante: continuamos dividindo u_3 por q e substituindo o resultado em (41.19) e depois dividindo cada novo quociente por q até que chegamos em

$$\begin{aligned} p(x) = u_{n-1}(x)q(x)^{n-1} &+ p_{n-2}(x)q(x)^{n-2} + \cdots + p_2(x)q(x)^2 \\ &+ p_1(x)q(x) + p_0(x), \end{aligned}$$

em que u_{n-1} tem grau menor do que $\big(n-(n-1)\big)m = m$. Para concluir, basta tomar $p_{n-1} = u_{n-1}$. □

COROLÁRIO 41.7 (decomposição de uma função racional cujo denominador é uma potência de um polinômio dado). *Sejam p e q polinômios, n um inteiro positivo e suponha que o grau de p é menor do que n vezes o grau de q. Temos que existem e são únicos polinômios p_1, p_2, ..., p_n cujos graus são menores do que o grau de q e tais que*

$$\frac{p(x)}{q(x)^n} = \frac{p_1(x)}{q(x)} + \frac{p_2(x)}{q(x)^2} + \cdots + \frac{p_n(x)}{q(x)^n},$$

para todo x com $q(x) \neq 0$

DEMONSTRAÇÃO. Segue diretamente do Teorema 41.6 dividindo os dois lados da igualdade (41.14) por $q(x)^n$ e trocando p_i por p_{n-i}. □

Exemplo 41.8 (decomposição de uma função racional cujo denominador é uma potência de um polinômio de grau 2). Considere a função racional f dada por

$$f(x) = \frac{x^7 - 2x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 5}{(x^2 - 2x + 4)^4},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Vamos encontrar a decomposição para f cuja existência é garantida pelo Corolário 41.7. Em primeiro lugar, devemos encontrar uma decomposição como (41.14), em que os polinômios p e q são dados por:

$$p(x) = x^7 - 2x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 5 \quad \text{e} \quad q(x) = x^2 - 2x + 4.$$

Começamos dividindo p por q, o que nos dá

$$p(x) = u_1(x)q(x) + (-x + 1), \tag{41.20}$$

com:

$$u_1(x) = x^5 - x^3 + x + 1.$$

Agora dividimos u_1 por q, obtendo

$$u_1(x) = u_2(x)q(x) + (-15x + 41), \tag{41.21}$$

em que:

$$u_2(x) = x^3 + 2x^2 - x - 10.$$

Substituindo (41.21) em (41.20) chegamos em:

$$p(x) = u_2(x)q(x)^2 + (-15x + 41)q(x) + (-x + 1). \tag{41.22}$$

Dividindo u_2 por q vem

$$u_2(x) = u_3(x)q(x) + (3x - 26), \tag{41.23}$$

em que:

$$u_3(x) = x + 4.$$

Como u_3 tem grau menor do que o grau de q, substituindo (41.23) em (41.22) obtemos a decomposição desejada

$$p(x) = u_3(x)q(x)^3 + (3x - 26)q(x)^2 + (-15x + 41)q(x) + (-x + 1)$$

e agora basta dividir os dois lados dessa última igualdade por $q(x)^4$:

$$f(x) = \frac{x + 4}{x^2 - 2x + 4} + \frac{3x - 26}{(x^2 - 2x + 4)^2} + \frac{-15x + 41}{(x^2 - 2x + 4)^3} + \frac{-x + 1}{(x^2 - 2x + 4)^4}.$$

Em vista do Corolário 41.7, resta agora resolver o problema de calcular integrais de funções racionais em que o numerador tem grau menor ou igual a 1 e o denominador é uma potência de um polinômio de grau 2 sem raiz real, isto é, integrais da forma

$$\int \frac{p(x)}{q(x)^k}\,\mathrm{d}x \tag{41.24}$$

em que p é um polinômio de grau menor ou igual a 1, q é um polinômio de grau 2 sem raiz real e k é um inteiro positivo. O método usado para calcular esse tipo de integral é quase idêntico ao método que usamos na Seção 40 no caso particular em que $k = 1$. Começamos escrevendo p na forma

$$p = uq' + v,$$

em que u e v são números reais. Reduzimos então o problema do cálculo de (41.24) ao cálculo das integrais

$$\int \frac{q'(x)}{q(x)^k}\,\mathrm{d}x \tag{41.25}$$

e:

$$\int \frac{1}{q(x)^k}\,\mathrm{d}x. \tag{41.26}$$

A integral (41.25) pode ser calculada facilmente usando a substituição de variáveis

$$y = q(x), \quad \mathrm{d}y = q'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Quanto à integral (41.26), começamos completando quadrados

$$q(x) = a[(x+\beta)^2 + \gamma],$$

em que $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e γ é positivo porque q não tem raiz real; daí usamos a substituição trigonométrica

$$x = \sqrt{\gamma}\,\mathrm{tg}\,\theta - \beta, \quad \mathrm{d}x = \sqrt{\gamma}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

com $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, que nos dá:

$$q(x) = a[(x+\beta)^2 + \gamma] = a\gamma(1 + \mathrm{tg}^2\,\theta) = a\gamma\sec^2\theta.$$

Obtemos então:

$$\int \frac{1}{q(x)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\gamma}}{a^k\gamma^k}\int \frac{1}{\sec^{2k-2}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{\gamma}}{a^k\gamma^k}\int \cos^{2k-2}\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Essa última integral é a integral de uma potência inteira não negativa par da função cosseno e pode ser calculada usando as técnicas apresentadas nos Exemplos 37.4 e 37.5 (mais especificamente, veja (37.3) e (37.5)). Note que no caso $k = 1$, que foi o que tratamos na Seção 40, essa integral é trivial.

Exemplo 41.9 (integral de uma função racional cujo denominador é uma potência de um polinômio de grau 2 sem raiz real e o numerador tem grau menor ou igual a 1). Vamos calcular a integral:

$$\int \frac{6x+7}{(x^2+4x+7)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+4x+7) = 2x+4$$

e

$$6x+7 = 3(2x+4) - 5,$$

de modo que:

$$\int \frac{6x+7}{(x^2+4x+7)^2}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{2x+4}{(x^2+4x+7)^2}\,\mathrm{d}x - 5\int \frac{1}{(x^2+4x+7)^2}\,\mathrm{d}x.$$

A integral

$$\int \frac{2x+4}{(x^2+4x+7)^2}\,\mathrm{d}x$$

é calculada usando a substituição de variáveis:

$$y = x^2+4x+7, \quad \mathrm{d}y = (2x+4)\,\mathrm{d}x.$$

Temos:

$$\int \frac{2x+4}{(x^2+4x+7)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{y} + C = -\frac{1}{x^2+4x+7} + C.$$

Para calcular a integral

$$\int \frac{1}{(x^2+4x+7)^2}\,\mathrm{d}x$$

fazemos o completamento de quadrados

$$x^2+4x+7 = (x+2)^2+3$$

e usamos a substituição trigonométrica

$$x = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\theta - 2, \quad \mathrm{d}x = \sqrt{3}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

com $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, que nos dá:

$$x^2+4x+7 = (x+2)^2+3 = 3(1+\mathrm{tg}^2\,\theta) = 3\sec^2\theta. \tag{41.27}$$

Daí:

$$\int \frac{1}{(x^2+4x+7)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{9}\int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

A integral do quadrado do cosseno foi calculada em (37.4) e o resultado é:

$$\int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2\theta) + C.$$

Precisamos agora reescrever esse resultado em termos da variável original x. Temos

$$\theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)$$

e

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2\theta) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\theta\cos^2\theta = \frac{\mathrm{tg}\,\theta}{2\sec^2\theta}.$$

Usando $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$ e (41.27) vem

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x+2}{x^2+4x+7}$$

e daí:

$$\int \frac{1}{(x^2+4x+7)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{18}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x+2}{6(x^2+4x+7)} + C.$$

Juntando tudo obtemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{6x+7}{(x^2+4x+7)^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{3}{x^2+4x+7} - \frac{5\sqrt{3}}{18}\operatorname{arctg}\Big(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\Big)\\ &\quad - \frac{5(x+2)}{6(x^2+4x+7)} + C\\ &= -\frac{5x+28}{6(x^2+4x+7)} - \frac{5\sqrt{3}}{18}\operatorname{arctg}\Big(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\Big) + C.\end{aligned}$$

Finalizamos a seção apresentando a demonstração do Teorema 41.3. Precisamos de um resultado preparatório.

Teorema 41.10. *Sejam n um inteiro positivo e Q_1, Q_2, $\dots$, Q_n polinômios que não admitem um divisor comum não trivial, isto é, todo divisor comum de Q_1, Q_2, $\dots$, Q_n é um polinômio constante. Temos que, para qualquer polinômio p, existem polinômios p_1, p_2, $\dots$, p_n tais que:*

$$p = p_1Q_1 + p_2Q_2 + \cdots + p_nQ_n.$$

Demonstração. Considere o conjunto $\mathcal{I}$ formado por todos os polinômios que podem ser escritos na forma

$$p_1Q_1 + p_2Q_2 + \cdots + p_nQ_n,$$

para certos polinômios p_1, p_2, $\dots$, p_n. Nós queremos mostrar que todo polinômio está em $\mathcal{I}$. É fácil ver que Q_1, Q_2, $\dots$, Q_n estão em $\mathcal{I}$, que a soma de dois elementos de $\mathcal{I}$ está em $\mathcal{I}$ e que o produto de um elemento de $\mathcal{I}$ por um polinômio qualquer está em $\mathcal{I}$. Se conseguirmos mostrar que há um polinômio constante não nulo em $\mathcal{I}$, concluiremos então que todo polinômio está em $\mathcal{I}$. Note que os polinômios Q_1, Q_2, $\dots$, Q_n não podem ser todos nulos, já que qualquer polinômio é um divisor do polinômio nulo e esses polinômios não possuem divisor comum não trivial. Temos então que existem polinômios não nulos em $\mathcal{I}$ e podemos portanto tomar um polinômio não nulo r em $\mathcal{I}$ que tenha grau mínimo, isto é, tal que nenhum polinômio não nulo em $\mathcal{I}$ tenha grau menor do que o grau de r. Afirmamos que r é um divisor de Q_i, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. De fato, se r não fosse um divisor de Q_i, poderíamos dividir Q_i por r e obter polinômios u e v tais que

$$Q_i = ur + v,$$

em que v é não nulo e possui grau menor do que o grau de r. Mas o fato que Q_i e r estão em $\mathcal{I}$ implica que $v = Q_i - ur$ está em $\mathcal{I}$, o que contradiz a minimalidade do grau de r. Do fato que r é um divisor comum dos polinômios Q_1, Q_2, $\dots$, Q_n segue que r é um polinômio constante e como r é não nulo e pertence a $\mathcal{I}$ a demonstração está completa. $\square$

COROLÁRIO 41.11. *Sejam p, q_1 e q_2 polinômios. Se p é um divisor de $q_1 q_2$ e se p e q_1 são relativamente primos, então p é um divisor de q_2.*

DEMONSTRAÇÃO. Como os polinômios p e q_1 não tem um divisor comum não trivial, o Teorema 41.10 nos diz que existem polinômios u_1 e u_2 tais que:

$$u_1 p + u_2 q_1 = 1.$$

Multiplicando essa igualdade dos dois lados por q_2 vem

$$u_1 p q_2 + u_2 q_1 q_2 = q_2$$

de onde a conclusão segue. □

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 41.3. Defina Q_i como em (41.6), para $i = 1, 2, \ldots, n$. Devemos mostrar que existem e são únicos polinômios p_1, p_2, $\ldots$, p_n tais que p_i tem grau menor do que o grau de q_i, para todo $i = 1, \ldots, n$, e:

$$p = p_1 Q_1 + p_2 Q_2 + \cdots + p_n Q_n. \tag{41.28}$$

Afirmamos que todo divisor comum de Q_1, Q_2, $\ldots$, Q_n é constante. De fato, se esses polinômios tivessem um divisor comum não constante, o Teorema Fundamental da Álgebra implicaria que eles possuem uma raiz complexa comum α. Como α é uma raiz de Q_1, temos que α é raiz de q_i para algum $i \neq 1$. Mas α também é raiz de Q_i e daí segue que α é raiz de q_j para algum $j \neq i$. Logo q_i e q_j possuem uma raiz complexa comum, o que contradiz o fato que eles são relativamente primos. O Teorema 41.10 nos dá então polinômios p_1, p_2, $\ldots$, p_n tais que (41.28) vale, mas a princípio nada garante que cada p_i tenha grau menor do que o grau de q_i. Para resolver esse problema, fazemos assim: dividimos p_i por q_i obtendo um quociente u_i e um resto $\tilde{p}_i$ tais que

$$p_i = u_i q_i + \tilde{p}_i \tag{41.29}$$

e de modo que o grau de $\tilde{p}_i$ seja menor do que o grau de q_i. Vamos mostrar que:

$$p = \tilde{p}_1 Q_1 + \tilde{p}_2 Q_2 + \cdots + \tilde{p}_n Q_n. \tag{41.30}$$

Substituindo (41.29) em (41.28) obtemos

$$\begin{aligned} p = p_1 Q_1 + p_2 Q_2 + \cdots + p_n Q_n = u_1 q_1 Q_1 + u_2 q_2 Q_2 + \cdots + u_n q_n Q_n \\ + \tilde{p}_1 Q_1 + \tilde{p}_2 Q_2 + \cdots + \tilde{p}_n Q_n \end{aligned}$$

e usando o fato que $q_i Q_i = q$ vem:

$$p = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) q + (\tilde{p}_1 Q_1 + \tilde{p}_2 Q_2 + \cdots + \tilde{p}_n Q_n). \tag{41.31}$$

Note que o fato que o grau de $\tilde{p}_i$ é menor do que o grau de q_i e a igualdade $q_i Q_i = q$ implicam que o polinômio $\tilde{p}_1 Q_1 + \tilde{p}_2 Q_2 + \cdots + \tilde{p}_n Q_n$ tem grau menor do que o grau de q, e daí a igualdade (41.31) nos diz que $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ e $\tilde{p}_1 Q_1 + \tilde{p}_2 Q_2 + \cdots + \tilde{p}_n Q_n$ são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de p por q. Mas o grau de p é menor do que o grau de q, de onde segue que o quociente da divisão de p por q é zero e o resto é o próprio polinômio p. Isso prova (41.30).

Para completar a demonstração do teorema, resta agora mostrar a unicidade dos polinômios p_1, p_2, …, p_n tais que (41.28) vale e tais que o grau de p_i é menor do que o grau de q_i, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Sejam então

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n, \qquad \tilde{p}_1, \quad \tilde{p}_2, \quad , \ldots, \quad \tilde{p}_n$$

polinômios tais que

$$p = p_1Q_1 + p_2Q_2 + \cdots + p_nQ_n = \tilde{p}_1Q_1 + \tilde{p}_2Q_2 + \cdots + \tilde{p}_nQ_n \tag{41.32}$$

e tais que p_i e $\tilde{p}_i$ tenham ambos grau menor do que o grau de q_i, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Devemos verificar que:

$$p_1 = \tilde{p}_1, \quad p_2 = \tilde{p}_2, \quad \ldots, \quad p_n = \tilde{p}_n.$$

Fixado um $i = 1, 2, \ldots, n$, mostraremos agora que q_i é um divisor de $p_i - \tilde{p}_i$ e daí seguirá que $p_i - \tilde{p}_i = 0$, pois q_i não pode ser divisor de um polinômio não nulo cujo grau é menor do que o grau de q_i. Ao mostrarmos que q_i é um divisor de $p_i - \tilde{p}_i$, a demonstração estará então completa. De (41.32) vem

$$(p_1 - \tilde{p}_1)Q_1 + (p_2 - \tilde{p}_2)Q_2 + \cdots + (p_n - \tilde{p}_n)Q_n = 0 \tag{41.33}$$

e como q_i é um divisor de Q_j para todo $j \neq i$, segue de (41.33) que q_i é um divisor de $(p_i - \tilde{p}_i)Q_i$. O fato que q_i é um divisor de $p_i - \tilde{p}_i$ segue agora do Corolário 41.11 e do fato que q_i e Q_i são relativamente primos. $\square$