Prova Substitutiva

MAT0234 – Análise Matemática I

Prof. Daniel Victor Tausk

09/12/2004

Boa Prova!

Questão 1. (valor 2,0 pontos) Dados subconjuntos disjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$, mostre que:

$$\mathfrak{m}_*(A \cup B) \geq \mathfrak{m}_*(A) + \mathfrak{m}_*(B),$$

onde $\mathfrak{m}_*$ denota a medida interior de Lebesgue.

Questão 2. (valor 0,5 ponto cada item) Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

(a) O limite pontual de uma seqüência $(f_k)_{k\geq 1}$ de funções mensuráveis $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável.

(b) O limite pontual de uma seqüência $(f_k)_{k\geq 1}$ de funções integráveis $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função integrável.

(c) Se $A \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ é um Boreleano então para todo $x \in \mathbb{R}^m$ a fatia vertical A_x de A é um Boreleano de $\mathbb{R}^n$.

(d) Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma aplicação linear e se A é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^2$ então $T(A)$ é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}$.

Questão 3. (valor 2,0 pontos) Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função mensurável e limitada. Calcule o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x)\, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x).$$

Questão 4. (valor 2,0 pontos) Sejam A, B subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ e suponha que para todo $x \in \mathbb{R}^m$ a fatia vertical B_x de B é uma translação da fatia vertical A_x de A, i.e., existe $v(x) \in \mathbb{R}^n$ com $B_x = A_x + v(x)$. Mostre que $\mathfrak{m}(A) = \mathfrak{m}(B)$.

Questão 5. (valor 2,0 pontos) Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < +\infty$. Se uma seqüência $(f_k)_{k\geq 1}$ de funções integráveis $f_k : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f : X \to \mathbb{R}$, mostre que f é integrável e que $\int_X f\, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X f_k\, \mathrm{d}\mu$.

Questão 6. (valor 3,0 pontos) Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to [0, +\infty]$ uma função mensurável; denote por $\nu_f : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ a medida definida por $\nu_f(A) = \int_A f\, \mathrm{d}\mu$, para todo $A \in \mathcal{A}$. Se $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável, mostre que g é quase integrável com respeito à medida ν_f se e somente se o produto gf é quase integrável com respeito à medida μ e, nesse caso, $\int_X g\, \mathrm{d}\nu_f = \int_X gf\, \mathrm{d}\mu$.

Gabarito da Prova Substitutiva

MAT0234 – Análise Matemática I

Prof. Daniel Victor Tausk

09/12/2004

Questão 1. Dados subconjuntos disjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$, mostre que:

$$\mathfrak{m}_*(A \cup B) \geq \mathfrak{m}_*(A) + \mathfrak{m}_*(B),$$

onde $\mathfrak{m}_*$ denota a medida interior de Lebesgue.

Resolução 1. Se K é um subconjunto compacto de A e K' é um subconjunto compacto de B então $K \cup K'$ é um subconjunto compacto de $A \cup B$ e portanto:

$$\mathfrak{m}_*(A \cup B) \geq \mathfrak{m}(K \cup K') = \mathfrak{m}(K) + \mathfrak{m}(K'),$$

já que K e K' são mensuráveis e disjuntos. Daí:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_*(A \cup B) &\geq \sup\big\{\mathfrak{m}(K) + \mathfrak{m}(K') : K \subset A,\ K' \subset B \text{ compactos}\big\}\\ &= \sup\big\{\mathfrak{m}(K) : K \subset A \text{ compacto}\big\} + \sup\big\{\mathfrak{m}(K') : K' \subset B \text{ compacto}\big\}\\ &= \mathfrak{m}_*(A) + \mathfrak{m}_*(B). \quad \square\end{aligned}$$

Resolução 2. Pelo resultado do Exercício 1.28 das notas de aula, existem subconjuntos $W \subset A$, $W' \subset B$ de tipo F_σ tais que $\mathfrak{m}(W) = \mathfrak{m}_*(A)$ e $\mathfrak{m}(W') = \mathfrak{m}_*(B)$. Daí $W \cup W' \subset A \cup B$ e portanto:

$$\mathfrak{m}_*(A \cup B) \geq \mathfrak{m}_*(W \cup W') = \mathfrak{m}(W \cup W') = \mathfrak{m}(W) + \mathfrak{m}(W') = \mathfrak{m}_*(A) + \mathfrak{m}_*(B),$$

já que W e W' são mensuráveis e disjuntos. $\square$

Questão 2. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

(a) O limite pontual de uma seqüência $(f_k)_{k \geq 1}$ de funções mensuráveis $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável.

(b) O limite pontual de uma seqüência $(f_k)_{k \geq 1}$ de funções integráveis $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função integrável.

(c) Se $A \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ é um Boreleano então para todo $x \in \mathbb{R}^m$ a fatia vertical A_x de A é um Boreleano de $\mathbb{R}^n$.

(d) Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma aplicação linear e se A é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^2$ então $T(A)$ é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}$.

Resolução.

(a) **Verdadeiro.**
Segue do Corolário 2.1.24 das notas de aula.

(b) **Falso.**
Se $f_k = \chi_{[0,k]}$ então $f_k : I\!R \to I\!R$ é uma função integrável para todo $k \geq 1$, mas $(f_k)_{k\geq 1}$ converge pontualmente para a função $\chi_{[0,+\infty[}$, que não é integrável.

(c) **Verdadeiro.**
Para cada $x \in I\!R^m$, a função $i_x : I\!R^n \to I\!R^m \times I\!R^n$ definida por $i_x(y) = (x, y)$, para todo $y \in I\!R^n$, é contínua e portanto Borel mensurável. Como A é um Boreleano de $I\!R^m \times I\!R^n \cong I\!R^{m+n}$, segue que $i_x^{-1}(A) = A_x$ é um Boreleano de $I\!R^n$, para todo $x \in I\!R^m$.

(d) **Falso.**
Seja $T : I\!R^2 \to I\!R$ a aplicação linear definida por $T(x, y) = x$, para todo $(x, y) \in I\!R^2$. Se A é um subconjunto não mensurável de $I\!R$ então $A \times \{0\}$ é um subconjunto mensurável de $I\!R^2$ (com medida exterior nula), mas $T\big(A \times \{0\}\big) = A$.

Questão 3. Seja $f : [0, +\infty[\to I\!R$ uma função mensurável e limitada. Calcule o limite:
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x).$$

Resolução. Seja $c < +\infty$ tal que $|f(x)| \leq c$, para todo $x \geq 0$. Daí, para todo $n \geq 1$ e todo $x \geq 0$, temos:
$$\big|e^{-nx} f(x)\big| \leq c\,e^{-x};$$
a função $[0, +\infty[\ni x \mapsto c\,e^{-x}$ é integrável e para todo $n \geq 1$ a função $[0, +\infty[\in x \mapsto e^{-nx} f(x)$ é mensurável. Além do mais:
$$\lim_{n\to\infty} e^{-nx} f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x > 0, \\ f(0), & \text{se } x = 0. \end{cases}$$
Segue do Teorema da Convergência Dominada que:
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) &= \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} e^{-nx} f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\ &= \int_0^{+\infty} f(0)\,\chi_{\{0\}}(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = 0. \quad \square\end{aligned}$$

Questão 4. Sejam A, B subconjuntos mensuráveis de $I\!R^m \times I\!R^n \cong I\!R^{m+n}$ e suponha que para todo $x \in I\!R^m$ a fatia vertical B_x de B é uma translação da fatia vertical A_x de A, i.e., existe $v(x) \in I\!R^n$ com $B_x = A_x + v(x)$. Mostre que $\mathfrak{m}(A) = \mathfrak{m}(B)$.

Resolução. Para todo $x \in \mathbb{R}^m$, temos $\mathfrak{m}^*(A_x) = \mathfrak{m}^*(B_x)$, pelo Lema 1.4.10 das notas de aula. A Proposição 2.7.3 das notas de aula nos dá:

$$\mathfrak{m}(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{m}(A_x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{m}(B_x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \mathfrak{m}(B). \qquad \square$$

Questão 5. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < +\infty$. Se uma seqüência $(f_k)_{k\geq 1}$ de funções integráveis $f_k : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f : X \to \mathbb{R}$, mostre que f é integrável e que $\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X f_k\,\mathrm{d}\mu$.

Resolução. Temos que a função f é mensurável, sendo um limite pontual de funções mensuráveis. Como $f_k \to f$ uniformemente, existe $k \geq 1$ tal que $|f_k(x) - f(x)| \leq 1$, para todo $x \in X$; daí:

$$|f| \leq |f - f_k| + |f_k| \leq |f_k| + 1,$$

e portanto:

$$\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu \leq \int_X |f_k| + 1\,\mathrm{d}\mu = \int_X |f_k|\,\mathrm{d}\mu + \mu(X) < +\infty.$$

Isso prova que $|f|$ é integrável, donde f também é integrável. Além do mais, temos:

$$\begin{aligned}\Big|\int_X f_k\,\mathrm{d}\mu - \int_X f\,\mathrm{d}\mu\Big| = \Big|\int_X f_k - f\,\mathrm{d}\mu\Big| &\leq \int_X |f_k - f|\,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \sup_{x\in X} \big|f_k(x) - f(x)\big|\,\mu(X).\end{aligned}$$

A convergência uniforme de $(f_k)_{k\geq 1}$ para f nos dá:

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in X} \big|f_k(x) - f(x)\big| = 0,$$

e como $\mu(X) < +\infty$, segue que $\lim_{k\to\infty} \int_X f_k\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu$. $\square$

Questão 6. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to [0, +\infty]$ uma função mensurável; denote por $\nu_f : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ a medida definida por $\nu_f(A) = \int_A f\,\mathrm{d}\mu$, para todo $A \in \mathcal{A}$. Se $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável, mostre que g é quase integrável com respeito à medida ν_f se e somente se o produto gf é quase integrável com respeito à medida μ e, nesse caso, $\int_X g\,\mathrm{d}\nu_f = \int_X gf\,\mathrm{d}\mu$.

Resolução. Suponha inicialmente que g é uma função simples, mensurável e não negativa; daí $g = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i}$, com $c_i \in [0, +\infty]$ e $A_i \in \mathcal{A}$, para $i = 1, \ldots, k$. Temos:

$$\int_X g \, \mathrm{d}\nu_f = \sum_{i=1}^{k} c_i \nu_f(A_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i \int_{A_i} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X g f \, \mathrm{d}\mu.$$

Suponha agora que g é uma função mensurável e não negativa arbitrária. Daí existe uma seqüência $(g_k)_{k \geq 1}$ de funções simples, mensuráveis e não negativas $g_k : X \to [0, +\infty]$ tal que $g_k \nearrow g$. Temos então que $g_k f \nearrow g f$ e o Teorema da Convergência Monotônica nos dá:

$$\int_X g \, \mathrm{d}\nu_f = \lim_{k \to \infty} \int_X g_k \, \mathrm{d}\nu_f = \lim_{k \to \infty} \int_X g_k f \, \mathrm{d}\mu = \int_X g f \, \mathrm{d}\mu.$$

Finalmente, se $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável arbitrária então:

$$\int_X g^+ \, \mathrm{d}\nu_f = \int_X g^+ f \, \mathrm{d}\mu, \quad \int_X g^- \, \mathrm{d}\nu_f = \int_X g^- f \, \mathrm{d}\mu;$$

a conclusão segue observando que $(gf)^+ = g^+ f$ e $(gf)^- = g^- f$. $\square$