Terceira Prova

MAT0234 – Análise Matemática I

Prof. Daniel Victor Tausk

02/12/2004

Boa Prova!

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Calcule o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \operatorname{sen}\big(\tfrac{x}{n}\big) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x).$$

Questão 2. (valor 0,5 ponto cada item) Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

(a) Se $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ é uma função mensurável não negativa então as integrais iteradas $\int_{\mathbb{R}^m} \big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\big) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x)\big) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(y)$ são iguais.

(b) Se A é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ e se toda fatia vertical A_x, $x \in \mathbb{R}^m$, de A tem medida nula em $\mathbb{R}^n$ então A tem medida nula.

(c) Se A é um subconjunto de medida nula de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ então toda fatia vertical A_x, $x \in \mathbb{R}^m$, de A tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.

(d) Se $(f_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência de funções integráveis $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que converge pontualmente para uma função integrável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ então $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mathfrak{m}$.

(e) Se $f : [0, +\infty[\, \to [0, +\infty]$ é uma função mensurável e não negativa então $\int_0^{+\infty} f \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \lim_{u\to+\infty} \int_0^u f \, \mathrm{d}\mathfrak{m}$.

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Considere o conjunto:

$$A = \big\{ t_1 b_1 + t_2 b_2 + t_3 b_3 : t_1, t_2, t_3 \in [0, 1] \big\} \subset \mathbb{R}^3,$$

onde $b_1 = (1, 2, 3)$, $b_2 = (0, 2, 3)$ e $b_3 = (0, 0, 3)$. Mostre que A é mensurável e calcule sua medida de Lebesgue.

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma função Lipschitziana. Mostre que a imagem de ϕ tem medida nula em $\mathbb{R}^2$.

Questão 5. (valor 2,5 pontos) Seja $f : [0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que existem $c > 0$ e $k \geq 0$ com $|f(x)| \leq k e^{cx}$, para todo $x \in [0, +\infty[$. A *transformada de Laplace* de f é a função $\tilde{f} : \,]c, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\tilde{f}(t) = \int_0^{+\infty} f(x) \, e^{-tx} \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x),$$

para todo $t > c$. Se $g : [0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ é definida por $g(x) = x f(x)$, mostre que $\tilde{f}$ é derivável e que sua derivada é igual a $-\tilde{g}$, onde $\tilde{g}$ denota a transformada de Laplace de g.

Gabarito da Terceira Prova

MAT0234 – Análise Matemática I

Prof. Daniel Victor Tausk

02/12/2004

Questão 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Calcule o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \operatorname{sen}\big(\tfrac{x}{n}\big) \, d\mathfrak{m}(x).$$

Resolução. Para cada $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} f(x) \operatorname{sen}\big(\tfrac{x}{n}\big) = 0.$$

Além do mais, $\big|f(x)\operatorname{sen}\big(\tfrac{x}{n}\big)\big| \le |f(x)|$, para todos $x \in \mathbb{R}$, $n \ge 1$, onde $|f|$ é uma função integrável. Segue do Teorema da Convergência Dominada que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \operatorname{sen}\big(\tfrac{x}{n}\big) \, d\mathfrak{m}(x) = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\mathfrak{m}(x) = 0. \qquad \square$$

Questão 2. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

(a) Se $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ é uma função mensurável não negativa então as integrais iteradas $\int_{\mathbb{R}^m} \big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, d\mathfrak{m}(y)\big)\, d\mathfrak{m}(x)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\mathfrak{m}(x)\big)\, d\mathfrak{m}(y)$ são iguais.

(b) Se A é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ e se toda fatia vertical A_x, $x \in \mathbb{R}^m$, de A tem medida nula em $\mathbb{R}^n$ então A tem medida nula.

(c) Se A é um subconjunto de medida nula de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ então toda fatia vertical A_x, $x \in \mathbb{R}^m$, de A tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.

(d) Se $(f_k)_{k\ge 1}$ é uma seqüência de funções integráveis $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que converge pontualmente para uma função integrável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ então $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \, d\mathfrak{m} = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mathfrak{m}$.

(e) Se $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty]$ é uma função mensurável e não negativa então $\int_0^{+\infty} f \, d\mathfrak{m} = \lim_{u\to+\infty} \int_0^u f \, d\mathfrak{m}$.

Resolução.

(a) **Verdadeiro.**
Segue de um Corolário do Teorema de Fubini–Tonelli (Corolário 2.7.5 das notas de aula), já que toda função mensurável não negativa é quase integrável.

(b) **Verdadeiro.**
Aplicando o Teorema de Fubini–Tonelli (Teorema 2.7.4 das notas de aula) à função característica de A ou, mais diretamente, a Proposição 2.7.3 das notas de aula ao conjunto A, obtemos:

$$\mathfrak{m}(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{m}(A_x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} 0\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = 0.$$

(c) **Falso.**
Tome $A = \{0\}^m \times \mathbb{R}^n$. Daí A tem medida nula em $\mathbb{R}^{m+n}$ (pois está contido num hiperplano), mas a fatia vertical $A_0 = \mathbb{R}^n$ tem medida infinita.

(d) **Falso.**
Seja $f_k = k\chi_{]0,\frac{1}{k}[}$ ou $f_k = \frac{1}{k}\chi_{[0,k]}$. Em qualquer caso, $f_k \to 0$ pontualmente (no segundo caso, $f_k \to 0$ até uniformemente) mas $\int_{\mathbb{R}} f_k\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = 1$, para todo $k \geq 1$.

(e) **Verdadeiro.**
Basta mostrar que $\lim_{k\to\infty} \int_0^{u_k} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_0^{+\infty} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}$, para toda seqüência $(u_k)_{k\geq 1}$ em $[0,+\infty[$ com $u_k \to +\infty$. Como f é não negativa, usando o Lema de Fatou para a seqüência de funções $f\chi_{[0,u_k]}$, obtemos:

$$\int_0^{+\infty} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_0^{+\infty} \liminf_{k\to\infty} f\chi_{[0,u_k]}\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \leq \liminf_{k\to\infty} \int_0^{+\infty} f\chi_{[0,u_k]}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}$$
$$= \liminf_{k\to\infty} \int_0^{u_k} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

Por outro lado, usando novamente o fato que f é não negativa, temos $\int_0^{u_k} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \leq \int_0^{+\infty} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}$, para todo $k \geq 1$, e portanto:

$$\int_0^{+\infty} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \leq \liminf_{k\to\infty} \int_0^{u_k} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \leq \limsup_{k\to\infty} \int_0^{u_k} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \leq \int_0^{+\infty} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

Questão 3. Considere o conjunto:

$$A = \big\{t_1 b_1 + t_2 b_2 + t_3 b_3 : t_1, t_2, t_3 \in [0,1]\big\} \subset \mathbb{R}^3,$$

onde $b_1 = (1,2,3)$, $b_2 = (0,2,3)$ e $b_3 = (0,0,3)$. Mostre que A é mensurável e calcule sua medida de Lebesgue.

Resolução. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear que leva a base canônica de $\mathbb{R}^3$ sobre os vetores b_1, b_2 e b_3; a matriz que representa T com respeito à base canônica é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Além do mais, se $B = [0,1]^3$ então $A = T(B)$. Temos que B é um bloco retangular com volume $|B| = 1$ e portanto B é mensurável e possui medida de Lebesgue igual a 1. Segue do Teorema 3.2.1 das notas de aula que A é mensurável e $\mathfrak{m}(A) = |\det T|\, \mathfrak{m}(B) = 6$. □

Questão 4. Seja $\phi : I\!R \to I\!R^2$ uma função Lipschitziana. Mostre que a imagem de ϕ tem medida nula em $I\!R^2$.

Resolução. Considere a função $\psi : I\!R^2 \to I\!R^2$ definida por $\psi(x,y) = \phi(x)$, para todo $(x,y) \in I\!R^2$. Se k denota uma constante de Lipschitz para ϕ então:

$$d_\infty\big(\psi(x,y), \psi(x',y')\big) = d_\infty\big(\phi(x), \phi(x')\big) \le k|x - x'| \le k\, d_\infty\big((x,y),(x',y')\big),$$

para todos $(x,y),(x',y') \in I\!R^2$. Daí ψ é Lipschitziana e portanto leva subconjuntos de medida nula de $I\!R^2$ em subconjuntos de medida nula de $I\!R^2$ (Corolário 3.1.6 das notas de aula). A conclusão segue observando que a imagem de ϕ coincide com $\psi\big(I\!R \times \{0\}\big)$. □

Questão 5. Seja $f : [0,+\infty[\, \to I\!R$ uma função mensurável tal que existem $c > 0$ e $k \ge 0$ com $|f(x)| \le k e^{cx}$, para todo $x \in [0,+\infty[$. A *transformada de Laplace* de f é a função $\tilde f : \,]c,+\infty[\, \to I\!R$ definida por:

$$\tilde f(t) = \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-tx}\, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x),$$

para todo $t > c$. Se $g : [0,+\infty[\, \to I\!R$ é definida por $g(x) = x f(x)$, mostre que $\tilde f$ é derivável e que sua derivada é igual a $-\tilde g$, onde $\tilde g$ denota a transformada de Laplace de g.

Resolução. Em primeiro lugar, observamos o fato simples que se $\alpha > 0$ é fixado então a função $x \mapsto e^{-\alpha x}$ é integrável em $[0,+\infty[$; de fato, como essa função é não negativa, isso é justificado pelo seguinte cálculo:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \lim_{u\to+\infty} \int_0^u e^{-\alpha x}\, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \lim_{u\to+\infty} -\frac{1}{\alpha}(e^{-\alpha u} - 1) = \frac{1}{\alpha}.$$

Agora, fixado $t > c$ então $|f(x)\, e^{-tx}| \le k e^{-(t-c)x}$, para todo $x \ge 0$; como $t - c > 0$, segue que a função $x \mapsto f(x)\, e^{-tx}$ é integrável em $[0,+\infty[$ para todo $t > c$ e portanto a transformada de Laplace $\tilde f : \,]c,+\infty[\, \to I\!R$ está bem definida. Para mostrar que $\tilde f$ é derivável e que $\tilde f' = -\tilde g$, usaremos a Proposição 2.5.7 das notas de aula. Claramente:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x)\, e^{-tx} = -x f(x) e^{-tx},$$

para todos $x \geq 0$, $t \in I\!R$ e portanto, para concluir a demonstração, é suficiente verificar que para todo $t_0 > c$ existem $\varepsilon > 0$ e uma função integrável $\phi : [0, +\infty[\to I\!R$ tal que:

$$\left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x)\, e^{-tx} \right| \leq \phi(x),$$

para todo $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ e todo $x \in [0, +\infty[$. Sejam $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tais que $t_0 - \delta - \varepsilon > c$. Como $\lim_{x \to +\infty} x e^{-\delta x} = 0$, existe uma constante $k' \geq 0$ tal que $x e^{-\delta x} \leq k'$, para todo $x \geq 0$, i.e., $x \leq k' e^{\delta x}$, para todo $x \geq 0$. Daí:

$$\left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x)\, e^{-tx} \right| = |x f(x) e^{-tx}| \leq k k' e^{-(t - c - \delta)x},$$

para todo $x \geq 0$. Em particular, se $t > t_0 - \varepsilon$ então:

$$\left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x)\, e^{-tx} \right| \leq k k' e^{-(t_0 - \varepsilon - c - \delta)x},$$

para todo $x \geq 0$. Como $t_0 - \varepsilon - c - \delta > 0$, a função $x \mapsto e^{-(t_0 - \varepsilon - c - \delta)x}$ é integrável em $[0, +\infty[$ e a conclusão segue. $\square$