Segunda Prova

MAT0234 – Análise Matemática I

Prof. Daniel Victor Tausk
21/10/2004

Boa Prova!

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } \cos(x) \in \mathbb{Q}, \\ \chi_K(e^x), & \text{se } \cos(x) \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

onde $K \subset [0,1]$ denota o conjunto de cantor ternário. Mostre que f é Borel mensurável.

Questão 2. (valor 0,5 ponto cada item) Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

(a) Se $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável então uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se e somente se f^+ e f^- são funções mensuráveis.
(b) Se $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável então uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se e somente se $|f|$ é uma função mensurável.
(c) Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida então a soma de duas funções integráveis $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ é uma função integrável.
(d) Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida então a soma de duas funções quase integráveis $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ é uma função quase integrável.
(e) Se o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um subconjunto mensurável do plano $\mathbb{R}^2$ então f é uma função mensurável.

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja $(A_k)_{k \geq 1}$ uma seqüência em $\mathcal{A}$ com $A_k \nearrow A$. Se $f : X \to [0, +\infty]$ é uma função mensurável, mostre que $\lim_{k \to \infty} \int_{A_k} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$.

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função integrável tal que $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0$, para todo $A \in \mathcal{A}$. Mostre que $f = 0$ quase sempre.

Questão 5. (valor 3,0 pontos) Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto mensurável e seja $f : X \to [0, +\infty]$ uma função mensurável. Mostre que o conjunto:

$$C(f) = \big\{ (x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x) \big\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

é mensurável e que $\mathfrak{m}\big(C(f)\big) = \int_X f \, \mathrm{d}\mathfrak{m}$. Se $\mathrm{Im}(f) \subset [0, +\infty[$, mostre também que o gráfico de f:

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in X \big\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

tem medida nula.

Gabarito da Segunda Prova

MAT0234 – Análise Matemática I

Prof. Daniel Victor Tausk
21/10/2004

Questão 1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } \cos(x) \in \mathbb{Q}, \\ \chi_K(e^x), & \text{se } \cos(x) \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

onde $K \subset [0,1]$ denota o conjunto de cantor ternário. Mostre que f é Borel mensurável.

Resolução. A função $x \mapsto \cos(x)$ é contínua e portanto Borel mensurável, pelo Lema 2.1.15 das notas de aula; como o conjunto $\mathbb{Q}$ é Boreleano, segue que:

$$A = \big\{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \in \mathbb{Q}\big\}$$

é Boreleano. Temos portanto $\mathbb{R} = A \cup A^{\mathrm{c}}$, onde os conjuntos A e A^{c} são Boreleanos. A função $f|_A$ é Borel mensurável, já que é igual à restrição da função contínua $x \mapsto x^2$. Afirmamos que a função $f|_{A^{\mathrm{c}}}$ também é Borel mensurável. De fato, o conjunto K é fechado e portanto Boreleano; logo a função χ_K é Borel mensurável, pela Observação 2.1.30 das notas de aula. A função $f|_{A^{\mathrm{c}}}$ é igual à restrição da composição da função contínua $x \mapsto e^x$ com a função Borel mensurável χ_K. Segue então que f é Borel mensurável, pelo Lema 2.1.13 das notas de aula. $\square$

Questão 2. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

(a) Se $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável então uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se e somente se f^+ e f^- são funções mensuráveis.

(b) Se $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável então uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se e somente se $|f|$ é uma função mensurável.

(c) Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida então a soma de duas funções integráveis $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ é uma função integrável.

(d) Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida então a soma de duas funções quase integráveis $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ é uma função quase integrável.

(e) Se o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um subconjunto mensurável do plano $\mathbb{R}^2$ então f é uma função mensurável.

Resolução.

(a) **Verdadeiro.**
Se f é mensurável então f^+ e f^- também são mensuráveis, pelo Lema 2.1.21 das notas de aula. Reciprocamente, se f^+ e f^- são mensuráveis então $f = f^+ - f^-$ é mensurável, pela Proposição 2.1.19 das notas de aula.

(b) **Falso.**
Se $A \subset X$ é um conjunto não mensurável então a função:
$$f = \chi_A - \chi_{A^c}$$
não é mensurável, já que $A = f^{-1}(1)$ não é mensurável. Mas $|f| \equiv 1$ é obviamente mensurável.

(c) **Verdadeiro.**
Segue do item (a) da Proposição 2.4.4 das notas de aula.

(d) **Falso.**
Seja $(X, \mathcal{A}, \mu) = \big(I\!R, \mathcal{M}(I\!R), \mathfrak{m}\big)$ e sejam $f = \chi_{[0,+\infty[}$, $g = -\chi_{]-\infty,0]}$. Daí f e g são quase integráveis, já que $f^- = 0$ e $g^+ = 0$. Mas $f + g$ não é quase integrável, pois:
$$\int_{I\!R} (f+g)^+ \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_{I\!R} \chi_{]0,+\infty[} \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = +\infty,$$
$$\int_{I\!R} (f+g)^- \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_{I\!R} \chi_{]-\infty,0[} \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = +\infty.$$

(e) **Falso.**
Seja $A \subset I\!R$ um subconjunto não mensurável arbitrário. Então $f = \chi_A$ não é uma função mensurável, já que $A = f^{-1}(1)$ não é mensurável. No entanto, o gráfico de f é mensurável, já que é um subconjunto de $I\!R \times \{0, 1\}$ e portanto possui medida exterior nula.

Questão 3. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja $(A_k)_{k \geq 1}$ uma seqüência em $\mathcal{A}$ com $A_k \nearrow A$. Se $f : X \to [0, +\infty]$ é uma função mensurável, mostre que $\lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$.

Resolução. Temos $f\chi_{A_k} \nearrow f\chi_A$ e portanto o Teorema da Convergência Monotônica nos dá:
$$\lim_{k\to\infty} \int_X f\chi_{A_k} \, \mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_A \, \mathrm{d}\mu.$$
A conclusão segue do Lema 2.4.2 das notas de aula observando que:
$$\int_X f\chi_{A_k} \, \mathrm{d}\mu = \int_{A_k} f \, \mathrm{d}\mu, \quad \int_X f\chi_A \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

Questão 4. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja $f : X \to \overline{I\!R}$ uma função integrável tal que $\int_A f \,\mathrm{d}\mu = 0$, para todo $A \in \mathcal{A}$. Mostre que $f = 0$ quase sempre.

Resolução. Considere os conjuntos:

$$A_+ = \big\{x \in X : f(x) > 0\big\}, \quad A_- = \big\{x \in X : f(x) < 0\big\}.$$

Por hipótese, temos $\int_{A_+} f \,\mathrm{d}\mu = 0$. Como $f|_{A_+}$ é uma função não negativa, o resultado do Exercício 2.13 das notas de aula implica que $f|_{A_+}$ é nula quase sempre, i.e., $\mu(A_+) = 0$. Similarmente, $-f|_{A_-}$ é uma função não negativa com integral nula e portanto $\mu(A_-) = 0$. Concluímos então que o conjunto

$$\big\{x \in X : f(x) \neq 0\big\} = A_+ \cup A_-$$

tem medida nula, i.e., $f = 0$ quase sempre. $\square$

Questão 5. Seja $X \subset I\!R^m$ um conjunto mensurável e seja $f : X \to [0, +\infty]$ uma função mensurável. Mostre que o conjunto:

$$C(f) = \big\{(x, y) \in X \times I\!R : 0 \leq y < f(x)\big\} \subset I\!R^{m+1}$$

é mensurável e que $\mathfrak{m}\big(C(f)\big) = \int_X f \,\mathrm{d}\mathfrak{m}$. Se $\mathrm{Im}(f) \subset [0, +\infty[$, mostre também que o gráfico de f:

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{\big(x, f(x)\big) : x \in X\big\} \subset I\!R^{m+1}$$

tem medida nula.

Resolução. Suponha que $f : X \to [0, +\infty]$ é uma função simples. Podemos escrever $f = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A_i}$, com $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}(I\!R^m)$ dois a dois disjuntos, $X = \bigcup_{i=1}^k A_i$ e $c_1, \ldots, c_k \in [0, +\infty]$. Obviamente:

$$C(f) = \bigcup_{i=1}^k \big(A_i \times [0, c_i[\,\big).$$

Pelo resultado da Questão 5 da primeira prova, o conjunto $A_i \times [0, c_i[$ é mensurável e $\mathfrak{m}\big(A_i \times [0, c_i[\,\big) = c_i \mathfrak{m}(A_i)$. Como os conjuntos $A_i \times [0, c_i[$ são dois a dois disjuntos, temos:

$$\mathfrak{m}\big(C(f)\big) = \sum_{i=1}^k c_i \mathfrak{m}(A_i) = \int_X f \,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

Suponha agora que $f : X \to [0, +\infty]$ é uma função mensurável arbitrária. Pela Proposição 2.1.33 das notas de aula, existe uma seqüência $(f_k)_{k \geq 1}$ de funções simples mensuráveis $f_k : X \to [0, +\infty[$ tal que $f_k \nearrow f$. Daí:

$$C(f_k) \nearrow C(f).$$

Segue que $C(f)$ é mensurável e:

$$\mathfrak{m}\big(C(f)\big) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}\big(C(f_k)\big) = \lim_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_X f \,\mathrm{d}\mathfrak{m},$$

onde na última igualdade usamos o Teorema da Convergência Monotônica. Suponha agora que $\mathrm{Im}(f) \subset [0, +\infty[$ e mostremos que o gráfico de f tem medida nula. Consideramos primeiramente o caso em que $\mathfrak{m}(X) < +\infty$ e f é integrável. Para todo $\varepsilon > 0$ temos:

$$\mathrm{gr}(f) \subset C(f+\varepsilon) \setminus C(f);$$

portanto:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}^*\big(\mathrm{gr}(f)\big) \le \mathfrak{m}\big(C(f+\varepsilon)\setminus C(f)\big) &= \mathfrak{m}\big(C(f+\varepsilon)\big) - \mathfrak{m}\big(C(f)\big)\\ &= \int_X f+\varepsilon \,\mathrm{d}\mathfrak{m} - \int_X f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \varepsilon\mathfrak{m}(X).\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ concluímos que $\mathrm{gr}(f)$ tem medida nula. Passemos ao caso geral. Para cada $k \ge 1$ seja:

$$X_k = \big\{x \in X : f(x) \le k\big\} \cap [-k, k]^m.$$

Daí $\mathfrak{m}(X_k) < +\infty$ e $\int_{X_k} f \,\mathrm{d}\mathfrak{m} \le k\mathfrak{m}(X_k) < +\infty$, i.e., $f|_{X_k}$ é integrável. Já mostramos então que $\mathrm{gr}(f|_{X_k})$ tem medida nula. Como $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$, temos que $\mathrm{gr}(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{gr}(f|_{X_k})$ e portanto $\mathrm{gr}(f)$ tem medida nula. $\square$