Primeira Prova

MAT0234 – Análise Matemática I

Prof. Daniel Victor Tausk

16/09/2004

Boa Prova!

Questão 1. (valor 0,5 ponto cada item) Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

(a) Dados conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$, se $A \cup B$ não é mensurável então ou A não é mensurável ou B não é mensurável.

(b) Dado um conjunto arbitrário $A \subset \mathbb{R}^n$ então existe um conjunto E de tipo G_δ em $\mathbb{R}^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}(E)$.

(c) Dado um conjunto arbitrário $A \subset \mathbb{R}^n$ então existe um conjunto E de tipo G_δ em $\mathbb{R}^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(E \setminus A) = 0$.

(d) Todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ com interior vazio tem medida de Lebesgue zero.

(e) Dados conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ com $\mathfrak{m}_*(A) = 0$ e $\mathfrak{m}_*(B) = 0$ então $\mathfrak{m}_*(A \cup B) = 0$.

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < +\infty$. Sejam $A, B, C \in \mathcal{A}$. Mostre que:

$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C).$$

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Mostre que o conjunto:

$$A = \big\{(x, x) : x \in [0, 1]\big\}$$

tem medida de Lebesgue zero em $\mathbb{R}^2$.

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Dados conjuntos $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$, mostre que:

$$\mathfrak{m}^*(A \triangle C) \le \mathfrak{m}^*(A \triangle B) + \mathfrak{m}^*(B \triangle C),$$

onde $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ denota a *diferença simétrica* de dois conjuntos X e Y.

Questão 5. Sejam dados conjuntos $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$, de modo que $A \times B \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$.

(a) (valor 1,5 pontos) Mostre que $\mathfrak{m}^*(A \times B) \le \mathfrak{m}^*(A)\mathfrak{m}^*(B)$, tendo em mente a convenção $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$.

(b) (valor 1,5 pontos) Mostre que se A e B são mensuráveis então $A \times B$ também é mensurável.

(c) (valor 3,0 pontos) Mostre que se A e B são mensuráveis então:

$$\mathfrak{m}(A \times B) = \mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B).$$

Gabarito da Primeira Prova

MAT0234 – Análise Matemática I

Prof. Daniel Victor Tausk

16/09/2004

Questão 1. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

(a) Dados conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$, se $A \cup B$ não é mensurável então ou A não é mensurável ou B não é mensurável.

(b) Dado um conjunto arbitrário $A \subset \mathbb{R}^n$ então existe um conjunto E de tipo G_δ em $\mathbb{R}^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}(E)$.

(c) Dado um conjunto arbitrário $A \subset \mathbb{R}^n$ então existe um conjunto E de tipo G_δ em $\mathbb{R}^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(E \setminus A) = 0$.

(d) Todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ com interior vazio tem medida de Lebesgue zero.

(e) Dados conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ com $\mathfrak{m}_*(A) = 0$ e $\mathfrak{m}_*(B) = 0$ então $\mathfrak{m}_*(A \cup B) = 0$.

Resolução.

(a) **Verdadeiro.**
Basta observar que se A e B fossem ambos mensuráveis então $A \cup B$ também seria (Lema 1.4.15 das notas de aula).

(b) **Verdadeiro.**
É o resultado do Lema 1.4.48 das notas de aula.

(c) **Falso.**
Se existisse $E \subset \mathbb{R}^n$ de tipo G_δ com $A \subset E$ e $\mathfrak{m}^*(E \setminus A) = 0$ então A seria mensurável. De fato, temos $A = E \setminus (E \setminus A)$, onde E é mensurável (porque é de tipo G_δ) e $E \setminus A$ é mensurável (porque tem medida exterior nula).

(d) **Falso.**
Existem conjuntos de Cantor com medida positiva; eles são compactos e têm interior vazio (Teorema 1.5.2 das notas de aula).

(e) **Falso.**
Pelo Exemplo 1.6.13 das notas de aula, existem conjuntos disjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ com $\mathbb{R}^n = A \cup B$ e $\mathfrak{m}_*(A) = \mathfrak{m}_*(B) = 0$.

Questão 2. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < +\infty$. Sejam $A, B, C \in \mathcal{A}$. Mostre que:

$$\begin{aligned}\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) \\ - \mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Resolução. Pelo resultado do Exercício 1.12 das notas de aula, temos:

$$\mu\big((A \cup B) \cup C\big) = \mu(A \cup B) + \mu(C) - \mu\big((A \cup B) \cap C\big), \tag{1}$$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B), \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\mu\big((A \cup B) \cap C\big) &= \mu\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) \\ &= \mu(A \cap C) + \mu(B \cap C) - \mu(A \cap B \cap C).\end{aligned} \tag{3}$$

Substituindo (2) e (3) em (1) obtemos a conclusão. □

Questão 3. Mostre que o conjunto:

$$A = \big\{(x, x) : x \in [0, 1]\big\}$$

tem medida de Lebesgue zero em $\mathbb{R}^2$.

Resolução. Dado $k \geq 1$, considere os retângulos $R_i = \big[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\big] \times \big[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\big]$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Temos $A \subset \bigcup_{i=0}^{k-1} R_i$ e portanto:

$$\mathfrak{m}^*(A) \leq \sum_{i=0}^{k-1} |R_i| = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k}.$$

Como $k \geq 1$ é arbitrário, concluímos que $\mathfrak{m}^*(A) = 0$. □

Questão 4. Dados conjuntos $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$, mostre que:

$$\mathfrak{m}^*(A \triangle C) \leq \mathfrak{m}^*(A \triangle B) + \mathfrak{m}^*(B \triangle C),$$

onde $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ denota a *diferença simétrica* de dois conjuntos X e Y.

Resolução. Afirmamos que:

$$A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C). \tag{4}$$

De fato, se $x \in A \setminus C$ então $x \in A$ e $x \notin C$; se for $x \in B$, teremos $x \in B \setminus C$ e se for $x \notin B$ teremos $x \in A \setminus B$. Em qualquer caso, temos $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$. Trocando os papéis de A e C em (4) obtemos:

$$C \setminus A \subset (B \setminus A) \cup (C \setminus B). \tag{5}$$

De (4) e (5) vem:

$$A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C);$$

logo:

$$\mathfrak{m}^*(A \triangle C) \le \mathfrak{m}^*\big((A \triangle B) \cup (B \triangle C)\big) \le \mathfrak{m}^*(A \triangle B) + \mathfrak{m}^*(B \triangle C). \qquad \square$$

Questão 5. Sejam dados conjuntos $A \subset I\!R^m$, $B \subset I\!R^n$, de modo que $A \times B \subset I\!R^m \times I\!R^n \cong I\!R^{m+n}$.

(a) Mostre que $\mathfrak{m}^*(A \times B) \le \mathfrak{m}^*(A)\mathfrak{m}^*(B)$, tendo em mente a convenção $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$.

(b) Mostre que se A e B são mensuráveis então $A \times B$ também é mensurável.

(c) Mostre que se A e B são mensuráveis então:

$$\mathfrak{m}(A \times B) = \mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B).$$

Resolução.

(a) Consideramos primeiro o caso em que $\mathfrak{m}^*(A) < +\infty$ e $\mathfrak{m}^*(B) < +\infty$. Seja dado $\varepsilon > 0$ e sejam $(Q_k)_{k \ge 1}$ e $(Q'_l)_{l \ge 1}$ respectivamente uma seqüência de blocos retangulares m-dimensionais e uma seqüência de blocos retangulares n-dimensionais tais que:

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k, \quad B \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} Q'_l$$

e tais que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon, \quad \sum_{l=1}^{\infty} |Q'_l| < \mathfrak{m}^*(B) + \varepsilon.$$

Daí $(Q_k \times Q'_l)_{k,l \ge 1}$ é uma família enumerável de blocos retangulares $(m+n)$-dimensionais tal que $A \times B \subset \bigcup_{k,l \ge 1}(Q_k \times Q'_l)$. Logo:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}^*(A \times B) \le \sum_{k,l \ge 1} |Q_k \times Q'_l| = \sum_{k,l \ge 1} |Q_k|\,|Q'_l| &= \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k|\Big)\Big(\sum_{l=1}^{\infty} |Q'_l|\Big) \\ &< \big(\mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon\big)\big(\mathfrak{m}^*(B) + \varepsilon\big).\end{aligned}$$

A conclusão é obtida fazendo $\varepsilon \to 0$. Consideramos agora o caso que $\mathfrak{m}^*(A) = +\infty$ ou $\mathfrak{m}^*(B) = +\infty$. Se $\mathfrak{m}^*(A) > 0$ e $\mathfrak{m}^*(B) > 0$ então $\mathfrak{m}^*(A)\mathfrak{m}^*(B) = +\infty$ e não há nada para mostrar. Suponha então que $\mathfrak{m}^*(A) = 0$ ou $\mathfrak{m}^*(B) = 0$, de modo que $\mathfrak{m}^*(A)\mathfrak{m}^*(B) = 0$; devemos mostrar então que $\mathfrak{m}^*(A \times B) = 0$ também. Consideraremos apenas o caso que $\mathfrak{m}^*(A) = +\infty$ e $\mathfrak{m}^*(B) = 0$ (o caso $\mathfrak{m}^*(A) = 0$ e $\mathfrak{m}^*(B) = +\infty$ é análogo). Para cada $k \ge 1$, seja $A_k = A \cap [-k, k]^m$. Temos $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e $\mathfrak{m}^*(A_k) < +\infty$, para todo $k \ge 1$. Logo:

$$0 \le \mathfrak{m}^*(A_k \times B) \le \mathfrak{m}^*(A_k)\mathfrak{m}^*(B) = 0,$$

ou seja, $\mathfrak{m}^*(A_k \times B) = 0$, para todo $k \ge 1$. Como:

$$A \times B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \times B),$$

segue que $\mathfrak{m}^*(A \times B) = 0$. □

(b) Consideramos primeiro o caso que $\mathfrak{m}(A) < +\infty$ e $\mathfrak{m}(B) < +\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existem abertos $U \subset I\!R^m$ e $V \subset I\!R^n$ contendo A e B respectivamente, de modo que $\mathfrak{m}(U) < \mathfrak{m}(A) + 1$, $\mathfrak{m}(V) < \mathfrak{m}(B) + 1$ e:

$$\mathfrak{m}(U \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2\big(\mathfrak{m}(B) + 1\big)}, \quad \mathfrak{m}(V \setminus B) < \frac{\varepsilon}{2\big(\mathfrak{m}(A) + 1\big)}.$$

Daí $U \times V$ é um aberto de $I\!R^{m+n}$ contendo $A \times B$; além do mais:

$$(U \times V) \setminus (A \times B) \subset \big[(U \setminus A) \times V\big] \cup \big[U \times (V \setminus B)\big].$$

Usando o resultado do item (a) obtemos portanto:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}^*\big((U \times V) \setminus (A \times B)\big) &\le \mathfrak{m}^*\big((U \setminus A) \times V\big) + \mathfrak{m}^*\big(U \times (V \setminus B)\big) \\ &\le \mathfrak{m}(U \setminus A)\mathfrak{m}(V) + \mathfrak{m}(U)\mathfrak{m}(V \setminus B) \\ &\le \mathfrak{m}(U \setminus A)\big(\mathfrak{m}(B) + 1\big) + \mathfrak{m}(V \setminus B)\big(\mathfrak{m}(A) + 1\big) < \varepsilon,\end{aligned}$$

o que mostra que $A \times B$ é mensurável. Para o caso geral, definimos $A_k = A \cap [-k, k]^m$, $B_k = B \cap [-k, k]^n$. Daí $A_k \times B_k$ é mensurável para todo $k \ge 1$ e $A \times B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \times B_k)$; portanto também $A \times B$ é mensurável. □

(c) Mostremos primeiro que se $U \subset I\!R^m$, $V \subset I\!R^n$ são abertos então:

$$\mathfrak{m}(U \times V) = \mathfrak{m}(U)\mathfrak{m}(V). \tag{6}$$

Pelo Lema 1.4.22 das notas de aula, podemos escrever $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$, onde $(Q_k)_{k \ge 1}$ é uma seqüência de blocos retangulares m-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos; similarmente, podemos escrever $V = \bigcup_{l=1}^{\infty} Q'_l$, onde $(Q'_l)_{l \ge 1}$ é uma seqüência de blocos retangulares n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos. Note que $(Q_k \times Q'_l)_{k,l \ge 1}$ é uma família enumerável de blocos retangulares $(m + n)$-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos e $U \times V = \bigcup_{k,l \ge 1} (Q_k \times Q'_l)$. Daí, pelo Corolário 1.4.21 das notas de aula, obtemos:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(U \times V) = \sum_{k,l \ge 1} |Q_k \times Q'_l| = \sum_{k,l \ge 1} |Q_k|\,|Q'_l| = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k|\Big)\Big(\sum_{l=1}^{\infty} |Q'_l|\Big) \\ = \mathfrak{m}(U)\mathfrak{m}(V).\end{aligned}$$

Isso prova (6). Dados agora $A \subset I\!R^m$, $B \subset I\!R^n$ mensuráveis com $\mathfrak{m}(A) < +\infty$ e $\mathfrak{m}(B) < +\infty$ podemos, como no item (b), obter abertos $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ contendo A e B respectivamente de modo que:

$$\mathfrak{m}^*\big((U \times V) \setminus (A \times B)\big) < \varepsilon.$$

Como os conjuntos $U \times V$ e $A \times B$ são mensuráveis e, pelo item (a), $\mathfrak{m}(A \times B) \leq \mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B) < +\infty$, obtemos:

$$\mathfrak{m}\big((U \times V) \setminus (A \times B)\big) = \mathfrak{m}(U \times V) - \mathfrak{m}(A \times B),$$

e portanto $\mathfrak{m}(U \times V) - \mathfrak{m}(A \times B) < \varepsilon$. Usando agora (6) concluímos que:

$$\mathfrak{m}(A \times B) > \mathfrak{m}(U \times V) - \varepsilon = \mathfrak{m}(U)\mathfrak{m}(V) - \varepsilon \geq \mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B) - \varepsilon;$$

fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos $\mathfrak{m}(A \times B) \geq \mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B)$. Provamos então a igualdade $\mathfrak{m}(A \times B) = \mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B)$, já que a desigualdade oposta já foi provada no item (a). Sejam agora $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos mensuráveis arbitrários e defina $A_k = A \cap [-k,k]^m$, $B_k = B \cap [-k,k]^n$. Daí $A_k \nearrow A$, $B_k \nearrow B$, $A_k \times B_k \nearrow A \times B$ e portanto:

$$\mathfrak{m}(A \times B) = \lim_{k \to \infty} \mathfrak{m}(A_k \times B_k) = \lim_{k \to \infty} \mathfrak{m}(A_k)\mathfrak{m}(B_k) = \mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B). \qquad \square$$