Processo de Poisson

Sergio Wechsler

Uma variável aleatória (va) é uma função real cujo domínio é um espaço amostral com probabilidade atribuída aos eventos desse espaço.

Mais informalmente, é um número cujo valor é “aleatório”.

Portanto, serve como modelo matemático para todas as situações práticas onde há um número desconhecido ou incerto.

Toda variável aleatória possui uma distribuição, que é a atribuição de probabilidade aos subconjuntos da Reta (as probabilidades da va “assumir” valores tais e tais). Se a va for discreta, a coleção de valores possíveis acompanhados das respectivas probabilidades define a distribuição. Se for uma va contínua, a densidade define a distribuição. Em qualquer caso, a função de distribuição F define a distribuição. Algumas distribuições têm nome: Binomial, Poisson, Normal, Beta, Gama, etc...

Um estimador razoável de uma distribuição seria o histograma de n valores observados (“realizados”) da va, MAS APENAS se for razoável supor que as observações são independentes, e que todas elas possuem sua aleatoriedade aproximadamente bem modelada pela mesma distribuição (que será insinuada pelo histograma).

Quando n aumenta, o histograma converge para a fçao de probabilidade (densidade) , ou a fçao de distribuição empírica converge para a f.distribuição, mas isso é Matemática, e nem sempre esses teoremas (leis dos Gde Números) combinam antes com os dados para que tudo dê certo) .

Um número finito de vas aleatórias, usualmente dependentes, é chamado de vetor aleatório. Tudo acima se estende de forma mais ou menos análoga, como Cálculo de funções na Reta se estende para Cálculo de funções multivariadas.

Já um número não-finito de vas , todas indexadas em um conjunto T, se chama um Processso Estocástico. Em muitíssimas aplicações, T é o “tempo” . Da mesma forma que podemos modelar um número “aleatório” observado como uma realização da va, podemos modelar uma sequência de números “aleatórios’ como uma realização do processo estocástico. Essas realizações são muitas vezes chamadas de trajetórias, e quando T é o tempo, podemos chamá-las de séries temporais.

Do mesmo que toda va possui distribuição, todo processo estocástico possui distribuição ou “medida”. Pode ser complicado definir a medida de um processo estocástico. (a não ser que, por exemplo, seja um processo de vas iid. Mas em geral , usamos processos de vas dependentes, como Cadeias de Markov, etc) . Uma medida especial é o Processo de Poisson.

(assim como dizemos “va Binomial” quando a distribuição da va é que é Binomial, sempre dizemos “Processo de Poisson” quando a medida do processo é que a (do processo de) Poisson.)

Uma maneira de apresentar (a medida de) o Processo de Poisson é a seguinte: o conjunto de índices T é o intervalo [0, infinito); as vas do processo , N(t) , para todo t > 0, são contagens de “ocorrências” verificadas durante (0,t] (isso pode ser escrito formalmente, mas fica menos amigável), e os tempos **entre** as “ocorrências” são vas iid com distribuição exponencial com valor esperado (1/lambda).

Um exemplo de trajetória (caso a sequencia de exponenciais realizadas seja (0.3, 0.8, 0.5, 3.2, 1.1, ...)

N(t) =0;1;2;3;4;5,... quando, respectivamente :

t em [0,0.3) ; t em [0.3,1.1); t em [1.1,1.6); t em [1.6,4.8); t em [1.6,5.9); etcetera.

Portanto, “ocorrências” em instantes aleatórios do tempo formam um processo físico cujo comportamento é candidato a ser modelado por um

Processo de Poisson, **MAS** as seguintes propriedades matemáticas do processo precisam ser minimamente atendidas pela processo físico :

1) não há duas ou mais ocorrências no mesmo instante do tempo contínuo;

2) os números de ocorrências em períodos disjuntos do tempo são vas independentes;

3) em qualquer intervalo de tempo (t;t+c) de duração c , o número de ocorrências durante tal intervalo é uma va cuja distribuição depende de c, mas é a mesma para todo t;

Pode-se provar que , se as 3 propriedades acima são satisfeitas, a distribuição do no. de ocorrências em qualquer intervalo (t;t+c) é uma va com distribuição de Poisson de parâmetro (c vezes lambda). Daí o nome (da medida) do processo.

O problema na aplicação desse modelo teórico é que, na prática, nem sempre as 3 propriedades são satisfeitas. Por exemplo , em um Processo de Poisson, não pode haver envelhecimento nem rejuvenescimento, isto é, em qualquer instante do tempo t, a distribuição de tudo que virá pela frente é exatamente a mesma que havia quando t era igual a 0. Se as ocorrências forem as visitas ao médico durante a vida de um ser humano, o Processo de Poisson como modelo é uma forçação de barra. Mas o processo de chegadas de automóveis em uma cabine de um posto de pedágio é bem modelado por um Processo de Poisson, ao menos durante um período como a hora do almoço. (à noite, talvez haja ainda um processo de Poisson, mas com outra taxa theta diferente de lambda. Note , aliás, que lambda é o valor esperado do número de ocorrências durante uma unidade de tempo).