CURRICULUM VITAE

DE

MAURICIO MATOS PEIXOTO

Abril de 2001.

1. DADOS BIOGRÁFICOS

Nasceu em Fortaleza, Ceará, em 15 de abril de 1921.
Cidadão brasileiro.
Separado, 4 filhos. Companheira: Alciléa Augusto.

- Escola secundária no Rio de Janeiro, graduou-se engenheiro civil pela Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil, em 1943.

- Professor nessa escola de Cálculo e de Mecânica Racional.

- Em 1949 visitou a Universidade de Chicago, onde permaneceu por um ano e meio.

- Em 1953, juntamente com Leopoldo Nachbin, ajudou a fundar o IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) ao qual tem se associado desde então.

- Em 1957-58 visitou Princeton e encontrou S. Lefschetz e posteriormente S. Smale. Este último passou seis meses no IMPA em 1960 e lá realizou um trabalho pioneiro e de importância fundamental tanto em Topologia quanto em Sistemas Dinâmicos.

- Durante o período 1964 - 1968 foi professor na Brown University, Providence, RI, USA.

- De 1973 a 1978 foi professor no IME/USP.

- Orientou 11 doutorados, no Brasil e nos Estados Unidos.

- Em 1962 dois estudantes que vieram do Peru para o IMPA, Ivan Kupka e Jorge Sotomayor, fizeram sob sua orientação excelentes teses de Sistemas Dinâmicos. Essas teses, defendidas em julho de 1964, tiveram repercussão internacional imediata, uma delas correspondendo a um clássico da teoria dos Sistemas Dinâmicos: o Teorema de Kupka-Smale. A visita de Smale mencionada acima e essas duas teses foram passos iniciais no sentido de estabelecer o IMPA como uma instituição de pesquisa de nível internacional.

- Em 1969 recebeu o Prêmio Moínho Santista para Matemática.

- Em 1987 recebeu o Prêmio de Matemática da Academia do Terceiro Mundo.

Posições administrativas:

- Foi presidente da Sociedade Brasileira de Matemática (1975 - 1977).

- Foi presidente do CNPq (1979 - 1980).

- Foi presidente da Academia Brasileira de Ciências (1981 - 1991).

- Aposentou-se em 15 de abril de 1991 no IMPA, onde é Pesquisador Emérito e continua seu trabalho de pesquisa.

- Em agosto de 1996 foi nomeado membro do Conselho Nacional de Ciência e Tecnologia (CCT).

2. LISTA DE PUBLICAÇÕES

1. *Sobre las soluciones de la ecuación* yy'' = ϕ (y') *que pasan por dos puntos del semi-plano* y > 0. Revista de la Unión Matemática Argentina, Vol. XI, 1946, p. 84-91.

2. *Sistemas não holônomos*; 68 páginas, Rio de Janeiro, 1947.

3. *Princípios variacionais de Hamilton e da menor ação*; 55 páginas, Rio de Janeiro, 1947.

4. *Uma desigualdade entre números positivos*. Gazeta de Matemática, Vol. 9, 1948, p. 19-20.

5. *On the existence of derivative of generalized convex functions*. Summa Brasiliensis Mathematicae, Vol. 2, 1948, p. 35-42.

6. *Convexidade das curvas*. 66 páginas. Notas de Matemática nº 6, Rio de Janeiro, 1948.

7. *Generalized convex functions and second order differential inequalities*. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 55, nº 6, 1949, p. 563-572.

8. *On convexity*. Anais da Academia Brasileira de Ciências, Vol. XXI, 1949, p. 291-302.

9. *Note on uniform continuity*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 1950, p. 385. (Em colaboração com A.A. Monteiro).

10. *Le Nombre de Lebesgue et la continuité uniforme*. Portugaliae Mathematica, Vol. 10, 1951, p. 105-113. (Em colaboração com A.A. Monteiro).

11. *Equações gerais da dinâmica*; 110 páginas, Rio de Janeiro,1951.

12. *Note on structurally stable systems*. Anais da Academia Brasileira de Ciências, Vol. 27, 1955, p. 35.

13. *On integral invariants*. Anais da Academia Brasileira de Ciências, Vol. 38, 1956, p. XXV.

14. *On structural stability. International Congress of Mathematicians*, Edinburgh, 1958. Abstract of Short Communications, p. 86.

15. *On structural stability*. Annals of Math. Vol. 69, 1959, pp. 199-222.

16. *Some examples on* n-*dimensional structural stability.* Proc. Nat. Acad. Sci. Vol. 45, 1959, pp. 633-636.

17. *Structural stability in the plane with enlarged boundary* conditions. Anais da Academia Brasileira de Ciências, Vol. 31, 1959, pp. 135-160. (Em colaboração com M.C. Peixoto).

18. *Structural stability on two-dimensional manifolds*. Boletin de la Sociedad Matemática Mexicana, 1960, pp. 188-189.

19. *Structural stability on two-dimensional manifolds*. Topology, Vol. 1, 1962, pp. 101-120.

20. *Sobre o problema fundamental da teoria das equações diferenciais*. Atas do 3º Colóquio Brasileiro de Matemática, pp. 190-194. Fortaleza, 1961.

21. *Structural stability on two-dimensional manifolds - a further remark*. Topology, Vol. 2, 1963, pp. 179 -180.

22. *On an approximation theorem of Kupka and Smale*. Journal of Differential Equations, Vol. 3, 1967, pp. 214 - 227.

23. *Qualitative theory of differential equations and structural stability*. Proceedings of the International Symposium of differential equations and dynamical systems, Puerto Rico, 1965. Academic Press 1967, pp. 469-480. J. Hale and J.P. La Salle, ed.

24. *Structurally stable systems on open manifolds are never dense*. Annals of Mathematics, Vol. 87, 1968, pp. 423-430. (Em colaboração com C.C. Pugh).

25. *On a generic theory of end point boundary value problems*. Anais da Academia Brasileira de Ciências, Vol. 41, 1969 pp. 1-6.

26. *Sobre a classificação das equações diferenciais*. Atas do 6º Colóquio Brasileiro de Matemática, pp. 15-17. São Paulo, 1970.

27. *Sur la classification des équations différentielles*. C.R. Acad. Sc. Paris, Vol. 272, 1971, pp. 262-265.

28. *Teoria geométrica das equações diferenciais*, 75 páginas. 7º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1971.

29. *On the classification of flows on* 2 *- manifolds*. Proceedings of the International Symposium of Dynamical Systems. Salvador, Bahia, 1971. Academic Press, 1973, pp. 389-419.

30. *Dynamical systems*. Proceedings of the International Symposium of Dynamical Systems. Salvador, Bahia, 1971. Academic Press, 1973. (Editor do livro e autor do capítulo introdutório).

31. *There is a simple arc joining two Morse-Smale flows*. Société Mathématique de France, Astérisque, Vol. 31, 1976, pp. 16-41. (Em colaboração com S. Newhouse).

32. *On bifurcations of dynamical systems*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 2, 1975, pp. 315-319, Vancouver. Conferência a convite.

33. *Generic properties of ordinary differential equations*. Math. Assoc. of America Studies in Mathematics, Vol. 14 1977, pp. 52-92, J. Hale, ed.

34. *On end-point boundary value problems*. Journal of Differential Equations, Vol. 44, 1982, pp. 273-280.

35. *Le point de vue énumératif dans les problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires*. *I Quelques exemples*. C.R. Acad. Sc. Paris, Vol. 303, Série I, nº 13, 1986, pp. 629-633. Erratum, Vol. 307, 1988, pp. 197-198. (Em colaboração com René Thom).

36. *Le point de vue énumératif dans les problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires. II. Le théorème*. C.R. Acad. Sc. Paris, Vol. 303, Série I, nº 14, 1986, pp. 693-698. (Em colaboração com René Thom).

37. *Acceptance speech for the TWAS 1986 Award in Mathematics* (Beijing, 1987). Extraído do volume: The future of Science in China and the Third World - Proceedings of the Second General Conference Organized by the Third World Academy of Sciences, pp. 600-614. World Scientific, 1989.

38. *Uma demonstração do teorema do índice de Poincaré para superfícies*. Matemática Universitária, Vol. 9/10, 1989, pp. 145-151.

39. *Enumerative two-point boundary value problems and a theorem of S. Bernstein*. Anais da Academia Brasileira de Ciências, Vol. 62, 1990, pp. 321-327. (Em colaboração com A.R. da Silva).

40. *On the enumerative geometry of geodesics*, in "From Topology to Computation" – Proceedings of the Smalefest, Springer Verlag, ed. M.W. Hirsch, J. E. Marsden & M. Shub, 1993, pp. 243-253. (Em colaboração com I. Kupka).

41. "*Some recollections on the early work of Steve Smale*", in "From Topology to Computation" – Proceedings of the Smalefest, Springer Verlag, ed. M. W. Hirsch, J. E. Marsden & M. Shub, 1993, pp. 73-75. Trata-se de discurso pronunciado em 6 de agosto de 1990, em Berkeley, durante jantar em homenagem a Smale por ocasião do seu sexagésimo aniversário.

42. *Sigma décomposition et arithmétique de quelques formes quadratiques définies positives*. Publicado no Festschrift de R. Thom: Passion des Formes. Editado por M. Porte, ENS Editions Fonteny-St.Cloud, 1994, pp. 455-479.

43. *Focal decomposition in Geometry, Arithmetic and Physics*. Em Geometry, Topology and Physics. Eds. Apanasov / Bradlow / Rodrigues / Uhlenbeck, Berlin, Walter de Gruyter, 1997, pp. 213–232.

44. *Focal decomposition and some results of Bernstein on the* 2-*point boundary value problem.* Journal of the London Mathematical Society, (2)60,1999, pp. 517–547. (Em colaboração com A.R. da Silva)

45. *On Brillouin zones*. Communications in Mathematical Physics, 2000. (Em colaboração com A.C. Rocha, S.Sutherland and P. Veerman.)

46. *On focal stability.* (Em colaboração com I.Kupka e C.Pugh) Em preparação.

3. ANOTAÇÕES DO AUTOR E COMENTÁRIOS ESPONTÂNEOS DE OUTROS AUTORES SOBRE AS PUBLICAÇÕES ACIMA

O objetivo desta seção é de bem caracterizar a contribuição e a repercussão do trabalho do autor. E também de salientar uma certa unidade, um certo fio diretor.

Assim as proposições aritméticas de [42] e [43] relativas a formas quadráticas binárias resultaram de uma lenta e gradual evolução de idéias relacionadas com o problema de contorno por dois pontos, a partir de [25]. A isso seguiram-se a introdução do conceito fundamental de *decomposição focal* em [34], seu aprofundamento em [35], [36], [39] e sua formulação geodésica em [40], da qual [42] e [43] são desdobramentos naturais. Em [42] mostra-se como um conceito clássico da Física do Estado Sólido, as zonas de Brillouin de um cristal, estão sob o ponto de vista formal, intimamente relacionadas com o conceito de decomposição focal de um toro plano. Além disso, em [43, p. 217] mostra-se como a decomposição focal aparece naturalmente como um pré-requisito para a quantização semiclássica de um sistema dinâmico via integrais de caminho de Feynman. Mas o ponto de partida [25] é uma adaptação do teorema de Kupka-Smale da teoria dos Sistemas Dinâmicos ao problema de contorno por dois pontos. Problema esse que tem sido tratado em várias de minhas publicações a partir da primeira [1].

Observe-se a mudança de nomenclatura: o que chamamos atualmente “decomposição focal” corresponde ao que em [35], [36], [39], [40], [42] chamamos “sigma decomposição”.

Esta seção será subdividida em duas partes:

3.1 Sistemas Dinâmicos

3.2 Decomposição Focal.

Cada uma dessas partes será por sua vez subdividida em duas outras: anotações do autor e comentários espontâneos de outros autores.

3.1 SISTEMAS DINÂMICOS

3.1.1 ANOTAÇÕES DO AUTOR

A parte mais conhecida de todo o meu trabalho é aquela relacionada com sistemas dinâmicos e, particularmente, o conteúdo de (15), (17) e (19) que pode ser enunciado: *os fluxos estruturalmente estáveis em superfícies são simplesmente caracterizados e constituem um aberto e denso no espaço de todos os fluxos*. Esse fato é hoje em dia conhecido como "Teorema de Peixoto".

Em (37) encontramos uma apresentação cuidadosa de como se chegou a esse Teorema e de como ele foi instrumento no sentido de colocar a teoria dos fluxos e difeomorfismos nas variedades diferenciáveis no contexto da teoria dos conjuntos, com objetivos e problemas razoavelmente bem definidos e exibindo uma certa unidade. Em (41) encontra-se material histórico adicional estreitamente relacionado com o referido Teorema.

Além do Teorema propriamente dito, pode-se dizer que a essência da minha contribuição em (15), (17) e (19) é caracterizada pelos seguintes pontos: (i) a introdução do espaço de todos os fluxos; (ii) a modificação da definição original de estabilidade estrutural devida a Andronov-Pontrjagin, libertando-a da exigência de um pequeno, ε–homeomorfismo; (iii) a introdução do "*closing lemma*" e o reconhecimento de sua importância e dificuldade no caso diferenciável.

No que diz respeito a (ii) observe-se que essa definição modificada de estabilidade estrutural, *não* - ε e em *n* dimensões, introduzida em 1959, [15, p. 201], é hoje em dia a definição corrente de estabilidade estrutural. Ainda em 1986 D. Anosov em um artigo de revisão sobre estabilidade estrutural [*Structurally Stable Systems*, Proc. Steklov Inst. Math. issue 4, (1986) pp. 61-95] se refere a essa definição usual do conceito fundamental de estabilidade estrutural como "*Structural Stability in the sense of Peixoto*". Um comentário final a esse respeito é que com essa definição de estabilidade estrutural os fluxos estruturalmente estáveis automaticamente constituem um aberto do espaço dos fluxos, o que não é o caso com a ε - definição.

O Teorema acima foi o ponto de partida para uma teoria qualitativa de fluxos e difeomorfismos em variedades de dimensão qualquer, que foi lançada por Smale e sua escola nos anos sessenta e setenta e que continua vigorosa e fecunda até hoje.

Esses e outros desdobramentos relacionados com fluxos, difeomorfismos e endomorfismos de variedades deram lugar a um vasto corpo de doutrina chamado "*Sistemas Dinâmicos*".

Atualmente o Teorema de Peixoto é exposto em vários textos de Matemática, pura ou aplicada, em nível de pós-graduação ou mesmo de graduação, com ou sem demonstrações. Veja-se por exemplo:

1. W. de Mello e J. Palis, "*Geometrical Theory of Dynamical Systems: an Introduction*", Springer Verlag, 1985. O capítulo 4 desse texto de pós-graduação, pp. 115-150, contém uma exposição detalhada do Teorema de Peixoto.
2. J. Guckenheimer - P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*; pp. 60-65, Applied Mathematical Sciences 42, Springer Verlag, 1983.
3. J.M. Ottino. *The kinematics of mixing: Stretching, chaos and Transport*; p. 109 Cambridge texts in applied mathematics, Cambridge University Press, 1989.
4. H. Yang. *Wave packets and their bifurcations in geophisical fluid dynamics;* pp. 123 -125. Applied Mathematical Sciences 85, Springer Verlag, 1990.
5. A.M.O. Almeida. *Hamiltonian systems, chaos and quantization*; pp. 44-47. Cambridge monographs on mathematical physics, Cambridge University Press, 1990.
6. D.K. Arrowsmith - C.M. Place. *An introduction to dynamical systems*; pp. 125-133. Cambridge University Press, 1990.
7. L. Perkus. *Differential equations and dynamical systems*; pp. 311-325.Texts in Applied Mathematics 7, 2ª ed., Springer Verlag, 1996.
8. Fiedler-Ferrara - C.P. Cintra do Prado. *Caos, uma introdução*; pp.372-373. Editora Edgard Blücher, 1994.

9. P. Glendinning. *Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*; pp. 91-92. Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 1995.

10. J.H. Hubbard - B.H. West. *Differential Equations: a Dynamical Systems Approach. Higher Dimensional Systems*; pp. Vii, 203, 252 - 258. Texts in Applied Mathematics 18, Springer Verlag, 1995.

11. Zhang Zhi-fen, Ding Tong-ren, Huang Wen-zao, Dong Zhen-xi, *Qualitative theory of differential equations*. Translations of Mathematical Monographs, vol. 101, Am. Math. Soc. 1992. O capítulo 8, pp. 425-461, deste livro texto (graduação e pós-graduação) é uma exposição detalhada do Teorema de Peixoto.

Um comentário final sobre o Teorema de Peixoto é que um seu complemento natural encontra-se em [29] onde se dá uma classificação completa dos fluxos estruturalmente estáveis (i.e de Morse-Smale) em superfícies compactas. Isso é feito por meio de "gráficos distinguidos" associados a tais fluxos.

Em um trabalho de X. Wang (*Ergodic Th. & Dynam. Syst*., 1990, 10, 565-597) mostra-se que existe uma relação estreita entre esses gráficos e a C*-álgebra dos correspondentes fluxos. Isso dá uma espécie de substrato algébrico para a classificação acima relacionando-a com um objeto de crescente relevância em Matemática e Física Teórica.

3.1.2 COMENTÁRIOS ESPONTÂNEOS DE OUTROS AUTORES

1. Solomon Lefschetz publicou um artigo de revisão: "*Geometric Differential equations: recent past and proximate future*" no *Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems* (Editors J. Hale, J.P. La Salle. Puerto Rico, Academic Press, New York, 1967, pp. 1 - 14.)

Nesse artigo ele se refere ao conceito de estabilidade estrutural e dá a seguinte descrição da situação existente em 1965 na época do simpósio:

"*Later progress has been mainly due to two authors, Peixoto and Smale. The first author has enriched enormously the problem by introducing the metric space Σ of differential equations, and showing that in certain important cases structurally stable ones were dense in Σ. The Andronov - Pontrjagin conditions imply roughly that the critical points and limit cycles be as simple as possible. However a less simple condition appeared: no separatrix could join two saddle points (separatrix: path actually reaching a saddle point). In endeavours to extend this property for* n *- space systems, Peixoto was stoped by finding an analog to this separatrix property. This difficulty was cleared by Smale by introducing Thom's transversality theory into this subject, and this has been the point of departure of his very brilliant contributions to it. I merely mention his latest: proof that in dimension $\geq$ 4 the set of structurally systems is not dense in Σ. Work in this direction assuredly belongs to "proximate future"*.

2. No livro "*The Mathematics of Time*", Springer Verlag 1980, S. Smale faz uma seleção de seis de seus artigos em sistemas dinâmicos e economia.

Um desses é um artigo de divulgação intitulado "*What is global analysis*?" (*Am. Math. Monthly* vol. 76 ,1969, pp.4–9) e é essencialmente uma exposição do Teorema de Peixoto.

3. Nesse mesmo livro, p. 148, Smale dá o seguinte testemunho:

"*It was around 1958 that I first met Mauricio Peixoto. We were introduced by Lima who was finishing his Ph.D. at that time with Ed Spanier.*

Through Lefschetz, Peixoto had become interested in structural stability and he showed me his own results on structural stability on the disk D^2 (in a paper that was to appear in the Annals of Mathematics*, 1959). I was immediately enthusiastic, not only about what he was doing but with the possibility that, using my topology background, I could extend his work to* n *dimensions."*

"Peixoto told me that he had met Pontryagin, who said that he didn't believe in structural stability in dimensions greater than two, but that only increased the challenge."

4. R. Thom, publicou um artigo intitulado "*The role of qualitative dynamics in applied sciences*" no volume "*Geometric dynamics*", editado por Jacob Palis, Lecture Notes in Mathematics, nº 1007, Springer Verlag, 1983, pp. 784-788. Nesse artigo há um parágrafo em que faz uma breve história da dinâmica qualitativa e onde se encontra o seguinte:

"*Now the global theory of topological stability of flows, originated by Poincaré, and developed by him for the study of the* 3 *- body problem (discovery of homoclinic, heteroclinic points) found its first major development with G.D. Birkhoff (1920), who introduced the fundamental notions of wandering, and non-wandering points. The second decisive progress came from the Soviet School, when Andronov-Pontrjagin, introduced the notion of structural stability of flows (1930). The third decisive progress came with the results of S. Smale and M.M. Peixoto, e.g. the density of stable flows on surfaces.*"

5. Num artigo de revisão publicado no Am. Math. Month. vol. 92, 1985, p. 70, R.F. Williams diz:

"*The modern flowering of dynamical systems began when Peixoto proved that structurally stable flows are dense on surfaces, about 20 years ago*."

6. No livro de R. Abraham - C. Shaw, "*Dynamics, The Geometry of Behavior*", Addison-Wesley Publishing Company, second edition, 1992, p. 370, encontra-se o seguinte:

"12.2. *Peixoto's Theorem*

And now, we go on to Peixoto's historic theorem, relating the generic properties of the preceding chapter to structural stability in 2D*.*

A watershed in the history of dynamics, Peixoto's work brought together differential topology and classical dynamics, ushering in a new age of mathematical dynamics. The attempts to extend his 2D *results to* 3D *and beyond characterized the early days of this new approach, in the 1960's*".

7. J. Dieudonné, em 1977, publicou um volume intitulado "*Panorama des mathématiques pures*", Gauthier Villars. Ao abordar o problema da classificação das equações diferenciais na p. 36, ele diz:

"*Depuis 1960 environ se développent, sous l'impulsion notamment de S. Smale, M. Peixoto et D. Anosov, de très nombreuses et actives recherches sur la classification des équations différentielles (ou actions de* **R***) sur une variété compacte* M."

Na p. 38, ao invocar o pensamento inovador e original de alguns matemáticos nessa linha, são citados: Poincaré, Liapounov, Birkhoff, Denjoy, Siegel, Kolmogorov, Smale, Peixoto, Arnold, Anosov, Moser.

8. O trabalho [29] da lista de publicações acima é analisado por I. Nicolaev no seu trabalho "*Graphs and flows on surfaces*", publicado em *Ergodic Th. & Dynam. Syst*., vol. 18, 1998, pp. 207-220. Da introdução desse trabalho consta:

"*In this celebrated work* ([29]) *Peixoto studied an important class of flows so called Morse-Smale flows given on compact orientable two-manifolds." ... "To this end Peixoto orgraphs give a definitive and final solution to a rather classical problem of the theory of flows on manifolds. Peixoto formulated and proved these results by a remarkable amount of intuition and inventiveness.*"

9. O matemático chinês Shantao Liao, no livro "*Qualitative theory of differentiable dynamical systems*", pp. ix – 383, Science Press, Beijing 1996, logo no início do prefácio na p. (iii) diz o seguinte:

"*The modern theory of Differentiable Dynamical Systems began in the early sixties of this century. This began with the articles of M.Peixoto in 1959 and 1962, which deal with structural stability of 2–dimensional differential systems. The articles retreat the results announced by A. Andronov and L. Pontrjagin in 1937, extend them to closed surfaces, and add to them a new content concerning density properties. This attracted people's attention. It was mentioned in the introduction of his first article that "*Therefore it seems natural to expect that a fruitful field of research lies in this direction*". A natural question hence arisen: How about the case of dimension higher than two? Since then, early or late, a number of mathematicians in the world, especially S. Smale, started their important research and probe on this topic.*"

3.2 DECOMPOSIÇÃO FOCAL

3.2.1 ANOTAÇÕES DO AUTOR

De uma maneira informal estamos interessados em estudar como as trajetórias de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem que se originam num ponto dado voltam a se encontrar, isto é, a focalizar novamente. Temos em vista uma equação diferencial no $\mathbf{R}^n$ ou as geodésicas de uma variedade Riemanniana.

O conceito de *decomposição focal* formaliza essa idéia imprecisa. Ele foi introduzido em [34] no contexto do problema de contorno por 2 pontos para uma equação diferencial ordinária de segunda ordem na reta **R**

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) \ , \ t, x, \dot{x} \in \mathbf{R} \ , \ x(t_1) = x_1 \ , \ x(t_2) = x_2 \qquad (1)$$

Posteriormente [34] foi continuado em trabalho conjunto [35, 36] com R. Thom da seguinte maneira:

Seja $\mathbf{R}^4$ $(t_1, x_1; t_2, x_2)$ o conjunto de todos os pares de pontos do plano (t,x) e a cada par associemos o índice i $(t_1, x_1; t_2, x_2) = i$, definido como o número de soluções do problema (1). Os possíveis valores de i são $0, 1, 2, ..., \infty$. Se $t_1 = t_2$ o índice i é definido como sendo 0 se $x_1 \neq x_2$ e ∞ se $x_1 = x_2$.

Seja Σ_i o conjunto de pontos de $\mathbf{R}^4$ aos quais o índice i foi associado. Claramente $\mathbf{R}^4$ é a união disjunta dos Σ_i, $\mathbf{R}^4 = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup . . . \cup \Sigma_\infty$, isso sendo por definição a *decomposição focal* associada ao problema (1). Esse é o objeto de estudo. Claramente a equação (1) é equivalente à equação de primeira ordem

$$\dot{x} = u \ , \ \dot{u} = f(t,x,u) \qquad (2)$$

no espaço tridimensional $\mathbf{R}^3$ (t,x,u). Seja F a folheação definida por suas trajetórias e seja F (t,x,u) a folha que passa por (t,x,u). Seja $\mathbf{\Omega}$ o gráfico de F, isto é, $\mathbf{\Omega} \subset \mathbf{R}^6$ é a variedade a 4 dimensões definida por

$(t_1, x_1, u_1, t_2, x_2, u_2) \in \mathbf{\Omega}$ se e só se $F(t_1, x_1, u_1) = F(t_2, x_2, u_2)$.

Seja $\pi : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}^4$ a projeção definida por $\pi(t_1, x_1, u_1, t_2, x_2, u_2) = (t_1, x_1; t_2, x_2)$. É evidente que $(t_1, x_1; t_2, x_2) \in \Sigma_i$ se e só se $(\pi | \mathbf{\Omega})^{-1} (t_1, x_1; t_2, x_2)$ consiste de i pontos, $i = 0, 1, 2, ..., \infty$. Graças a um poderoso resultado de Hironaka e do próprio Thom sobre a estratificação da projeção de uma variedade analítica noutra e, pondo $\delta = \{ (t_1, x_1; t_2, x_2) \in \mathbf{R}^4 | \ t_1 = t_2 \}$, temos o seguinte

Teorema de Existência (Peixoto - Thom) *Se f é analítica e* $\pi | \mathbf{\Omega}$ *é própria em* $\mathbf{R}^4 \setminus \delta$ *então existe uma estratificação analítica de Whitney de* $\mathbf{R}^4 \setminus \delta$ *tal que cada* $\Sigma_i \setminus \delta$ *é união de estratos dessa estratificação.*

Em [40] esse teorema é enunciado no contexto mais geral de uma equação de segunda ordem definida numa variedade.

Se fixarmos um dos pontos, digamos se (t_1,x_1) é fixado, então os conjuntos Σ_i induzem uma decomposição de $\mathbf{R}^2$ (t_2, x_2) em conjuntos $\sigma_i = \Sigma_i \cap \{ (t_1,x_1) \times \mathbf{R}^2 (t_2, x_2) \}$. O teorema de existência acima se aplica com as modificações óbvias, o gráfico $\mathbf{\Omega}$ sendo substituído pela *estrela* em (0,0), isto é, a superfície formada por todas as trajetórias em $\mathbf{R}^3$ (t,x,u) que passam pelo eixo dos u.

A decomposição acima de $\mathbf{R}^2$ (t_2, x_2) nos conjuntos σ_i é denominada decomposição focal de (1) associada ao ponto base (t_1,x_1). Em [35] exibe-se a decomposição focal associada à equação do pêndulo $\ddot{x}$ = – sen x e ao ponto base (0,0), um exemplo fundamental.
O conceito de decomposição focal foi posto em [40], trabalho conjunto com Kupka, no contexto de geodésicas de uma variedade Riemanniana, da seguinte maneira.

Sejam M uma variedade Riemanniana completa e TM seu fibrado tangente. Sejam $v \in TM$, $v \neq 0$, $p = \pi(v)$ onde $\pi : TM \to M$ é a projeção canônica. Seja $I(v)$ o número de arcos geodésicos de comprimento $\|v\|$ ligando p a $\exp_p(v)$. $I(v)$ diz-se o índice de v e define - se $\sum_i = \{ v \in TM \mid I(v) = i \}$, $i = 1, 2, \ldots, \infty$. A seção zero, $M \subset TM$, por definição está contida em $\sum_1$. Como M é completa, $\sum_0 = \emptyset$. A *decomposição focal* de TM é a partição de TM nos conjuntos $\sum_i$, $i = 1, 2, \ldots, \infty$. É claro que a decomposição focal existe sempre e depende apenas da métrica de M. Se $p \in M$ e $\sigma_i = \sum_i \cap T_pM$, o estudo da partição de T_pM pelos conjuntos σ_i constitui o *problema restrito com ponto base* p.

Em [40], usando novamente o teorema de Hironaka mencionado anteriormente, demonstramos o seguinte

<u>Teorema de Existência</u> (Kupka-Peixoto): *Se* M *é analítica e completa então existe uma estratificação de Whitney analítica de* TM*, tal que cada* $\sum_i$ *é união de estratos dessa estratificação. Semelhantemente para o problema restrito com ponto base* $p \in M$*: existe uma estratificação analítica de Whitney de* T_pM *tal que cada* σ_i *é união de estratos dessa estratificação*.

Esse teorema de existência assume apenas que a métrica Riemanniana é analítica e completa. No caso da equação diferencial (1) acima, para obter o correspondente teorema de existência é preciso admitir que uma certa aplicação é própria. Caso contrário, podemos ter eventualmente uma decomposição focal muito complicada. As duas teorias são distintas, o caso da variedade Riemanniana sendo mais simples.

Consideremos agora o caso em que $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ é o toro plano com a métrica induzida pela métrica euclidiana em $\mathbf{R}^2$, e consideremos o problema restrito com base em $(0,0) \in \mathbf{R}^2$. Seja L(m,n), $(m,n) \in \mathbf{Z}^2\backslash(0,0)$, a perpendicular ao segmento unindo (0,0) a (– m,– n) pelo seu ponto médio. O índice do vetor unindo (0,0) a (x,y) vale 1 mais o número de linhas L(m,n) que passam por (x,y), de modo que as linhas L(m,n) determinam completamente a decomposição focal. Mas essas linhas determinam também as zonas de Brillouin de um cristal cúbico. Assim, zonas de Brillouin e decomposição focal são conceitos formalmente muito próximos. Tudo isso se aplica a um toro plano T^n com métrica definida por uma forma quadrática positiva definida qualquer.

Finalmente, observe-se que a consideração das linhas L(m,n) associadas à forma positiva definida Ax^2+Cy^2 leva naturalmente ao seguinte teorema [42]. Sejam A, C, N inteiros positivos e consideremos as equações Diofantinas

$$Ax^2 + Cy^2 = N \qquad (3)$$
$$Acx^2 + y^2 = N \qquad (4)$$

Sejam R(N) o número de soluções de (3) e γ (N) o número de soluções primitivas de (4) i.e. soluções x,y com x,y primos entre si, isto é, (x,y) = 1.

<u>Teorema.</u> *Sejam* A, C *ímpares,* A $\equiv$ C (mod 4), A, C *livres de quadrados, com* (A,C) = 1. *Então, pondo* $\Delta = 4AC$ *tem-se*

$$R(N)^2 = \frac{1}{2} \sum_{d \mid \Delta N} \gamma(d)\, R(\Delta N/d)$$

Como um corolário obtém-se que se A,C, p são primos distintos então as quatro equações Diofantinas

$$Ax^2 + Cy^2 = p \qquad Ax^2 + Cy^2 = 2p$$
$$ACx^2 + y^2 = p \qquad ACx^2 + y^2 = 2p$$

são tais que no máximo uma delas é solúvel em inteiros.

3.2.2 COMENTÁRIOS ESPONTÂNEOS DE OUTROS AUTORES

O trabalho [42] foi originalmente escrito em inglês e enviado para um 1"*Festshrif*t" em homenagem a R.Thom. Por razões administrativas ele foi traduzido para o francês pelo próprio Thom que à guisa de apresentação, no início do trabalho escreveu o seguinte:

" M. M. Peixoto a mis à profit la longue expérience qu'il a tirée de ses recherches sur des systèmes différentiels (et leur stabilité structurelle) pour s'intéresser à un objet plus particulier. Il nous propose ici une synthèse de vaste envergure sur une structure euclidienne susceptible de recevoir une interprétation physique (les "zones de Brillouin") et une origine tirée de l'Analyse des Systèmes Différentiels – le concept de σ-décomposition, dont il est l'auteur. C'est par un emploi systématique de l'analyse diophantienne portant sur des équations quadratiques qu'il arrive à réaliser cette synthèse dont on admirera la richesse et la profondeur."