

# Mágica: descobrir 6 em 52 cartas sabendo suas cores baseada em Sequência de De Bruijn

Siang Wun Song  
Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade de São Paulo

*In Memoriam*  
Marco Dimas Gubitoso

## Resumo

Apresentamos uma mágica em que um baralho de 52 cartas é cortado tantas vezes precisar e, distribuídas 6 cartas, consegue descobrir as 6 cartas conhecendo apenas as suas cores. Ela é baseada na sequência de De Bruijn. A versão para descobrir 5 cartas de um baralho incompleto de 32 cartas é bem conhecida. Adaptamos essa estratégia para a versão com 52 cartas, pela obtenção de uma sequência cíclica de 52 bits, com certas propriedades, a partir de uma sequência de De Bruijn de 64 bits. Do nosso conhecimento, esse resultado é inédito.

## 1 Introdução

Apresentamos a seguinte mágica. O mágico pega um baralho completo com 52 cartas. Depois de cortar o baralho de cartas várias vezes, escolhe 6 participantes e distribui uma carta para cada um. Pergunta quem tem carta vermelha. O mágico tem o auxílio de um arquivo de slides. Entra as 6 cores no arquivo de slides que revela as 6 cartas distribuídas. O leitor pode ir direto à seção 2 para praticar a mágica e depois voltar ao restante do artigo para entender por quê razão ela funciona.

A mágica é baseada na sequência de De Bruijn [4, 12]. A mágica de descobrir 5 cartas num baralho incompleto de 32 cartas, que chamaremos de **Mágica Versão 32**, é bem conhecida [2, 7]. Ela usa uma cadeia de 5 bits para codificar cada carta: o primeiro bit codifica a cor, os 2 primeiros bits o naipe e os últimos 3 bits o valor da carta. Uma sequência de De Bruijn de ordem 5 é usada para gerar as 32 cadeias de 5 bits.

Uma mágica que usa um baralho completo de 52 cartas para revelar 6 cartas é apresentada nos sítios The Aperiodical e Github [13, 14]. Porém, a mágica não permite *wrap-around*, isto é, não é possível cortar o baralho várias vezes antes de distribuir as 6 cartas. A razão é que a mágica é baseada numa sequência não cíclica de 57 bits cujas 52 subsequências de 6 bits codificam as 52 cartas.

Chamaremos de **Mágica Versão 52** a mágica que usa o baralho completo de 52 cartas, que pode ser cortado tantas vezes precisar, antes de distribuir as 6 cartas. Precisamos agora de 6 bits para codificar cada carta, com 4 bits para o valor da carta. A Mágica Versão 52 é baseada numa sequência cíclica de 52 bits, extraída de uma sequência de De Bruijn de 64 bits. Veremos que alguns dos códigos de valores das cartas não correspondem a cartas do baralho. Esses códigos constituem-se em exceções na codificação dos valores das cartas. Há diversas tentativas em usar esta estratégia.

Uma tal sequência de 52 bits é apresentada em The Magic Café [15, 14], de autoria atribuída a Larry Finley. Entretanto, a sequência de 52 bits possui 28 uns e 24 zeros, o que força o uso de dois Curingas (*Jokers*) no lugar de 2 cartas normais de mesma cor.

Uma outra sequência de 52 bits é mencionada num post em Github [14] que possui 26 uns e 26 zeros, evitando assim o uso de dois curingas. Essa sequência, entretanto, não apresenta igual número (i.e. 13) de subsequências de tamanho 2. Ela possui 12 00s, 14 01s, 14 10s e 12 11s. Por isso, há necessidade de permitir exceções na codificação do naipe das cartas.

Na Mágica Versão 52 apresentada aqui, conseguimos extrair uma sequência cíclica de 52 bits, de uma sequência de De Bruijn de ordem 6 de 64 bits, que possui igual número (13) de subsequências de tamanho 2 (00, 01, 10 e 11). Essa é uma condição mais forte, pois dela decorre igual número (26) de uns e zeros. Com isso, evitamos de ter exceções na codificação do naipe das cartas. Do nosso conhecimento, a obtenção de uma sequência com essas características é um resultado inédito. Além disso, com o uso de um arquivo de apresentação de slides que armazena as exceções na codificação dos valores das cartas (ver em seções adiante), não é necessário memorizar qualquer informação. Com isso, até uma criança pode apresentar essa mágica.

A Seção 2 apresenta o preparo e uma apresentação da mágica. Uma vez motivado, o leitor vai ficar curioso em saber por quê a mágica funciona. Então na Seção 3 introduzimos o conceito da sequência de De Bruijn que é usada na mágica. A seção 4 explica a Mágica Versão 32: descobrir 5 cartas de um baralho incompleto de 32 cartas. A seção 5 adapta a mesma ideia da seção anterior para a Mágica Versão 52: descobrir 6 cartas em um baralho completo de 52 cartas. Finalmente na seção 6 tecemos comentários a respeito da mágica, e apresentamos algumas aplicações de sequências e grafos de De Bruijn em diversas áreas da Ciência.

## 2 Preparo e apresentação da mágica

Vamos simular uma apresentação da mágica. Uma vez impressionado e motivado, você vai estar curioso em querer saber por quê isso funciona. Vamos então apresentar a explicação detalhada nas seções seguintes.

### 2.1 Preparo

Você vai precisar de um baralho completo (52 cartas) e um arquivo de slides (magic52.pdf) que é usado para apresentar a mágica.

Baixe o arquivo de slides magic52.pdf:

<https://www.ime.usp.br/~song/magic/magic52.pdf>

Prepare o baralho cujas cartas devem estar colocadas numa ordem determinada. Para obter essa ordem, use a Figura 8 (página 8). A primeira carta da figura é 2♥. Coloque essa carta como a primeira carta. A segunda carta da Figura 8 é Ás♥. Coloque-a em baixo da primeira. Arranje as demais cartas. A última carta deve ser Ás♠. O baralho preparado fica como mostra a Figura 1.

### 2.2 Apresentação da mágica

Pegue o baralho preparado e, diante do público, corte as cartas quantas vezes quiser.

Cortar o baralho de cartas significa separar o baralho em duas partes e colocar a parte de cima em baixo da parte de baixo. Ver Figura 2.

Escolha 6 participantes e distribua uma carta para cada um.



Figura 1: O baralho preparado.



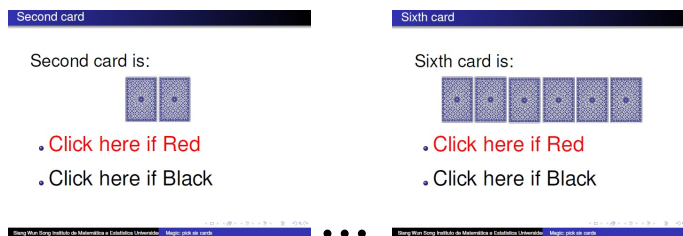
Figura 2: Cortar o baralho de cartas.

Pergunte aos 6 participantes quem tem carta vermelha, isto é, com naipe ♥ (Copas ou *Hearts*) ou ♦ (Ouros ou *Diamonds*).

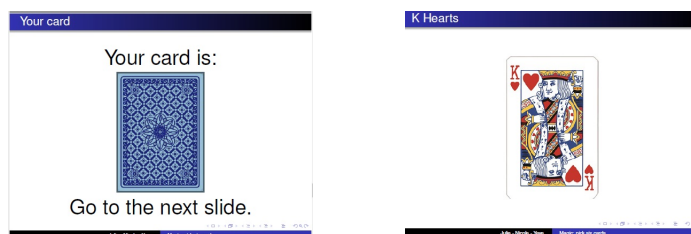
No arquivo de slides (slide número 3), entre a cor da carta do primeiro participante.



Em seguida entre as cores das cartas, uma a uma, do segundo participante até o sexto, no arquivo de slides.



Faça algum suspense e, para o espanto de todos, mude para o próximo slide que vai mostrar a carta do primeiro participante.



Mude para os próximos slides para revelar as cartas dos demais participantes.

Nas seções seguintes, explicamos por quê a mágica funciona.

### 3 Sequência de De Bruijn

Uma sequência binária de De Bruijn de ordem  $n$ , denotada por  $B(n)$ , é uma sequência cíclica de  $2^n$  zeros e uns em que cada possível cadeia de  $n$  bits ocorre exatamente uma vez como uma subsequência da sequência  $B(n)$ .

Por exemplo, para  $n = 5$ , a seguinte sequência é uma sequência de De Bruijn  $B(5)$ .

$$\underbrace{00001}_{\text{cadeia1}}001011001111100011011101010$$

$$0\underbrace{00010}_{\text{cadeia2}}01011001111100011011101010$$

A partir da sequência acima, pode-se obter as 32 cadeias de 5 bits, desde 00000 até 11111. Ver Figura 3. A cadeia de 5 bits da linha 1 (contendo 00001) corresponde aos primeiros 5 bits da sequência de De Bruijn  $B(5)$  acima. A cadeia de 5 bits da linha 2 (contendo 00010) corresponde ao segundo bit até o sexto bit da sequência, e assim sucessivamente. Lembre-se de que a sequência é cíclica, i.e. depois do último bit segue o primeiro. Assim, por exemplo, a cadeia 00000 é obtida com o último bit 0 seguido pelos 4 primeiros bits 0 da sequência.

1.	00001		17.	11000
2.	00010		18.	10001
3.	00100		19.	00011
4.	01001		20.	00110
5.	10010		21.	01101
6.	00101		22.	11011
7.	01011		23.	10111
8.	10110		24.	01110
9.	01100		25.	11101
10.	11001		26.	11010
11.	10011		27.	10101
12.	00111		28.	01010
13.	01111		29.	10100
14.	11111		30.	01000
15.	11110		31.	10000
16.	11100		32.	00000

Figura 3: Todas as 32 cadeias de 5 bits.

Pela maneira como essas cadeias de 5 bits são obtidas, a partir da sequência de De Bruijn, notamos várias propriedades. Uma delas é que a própria sequência se reproduz na primeira coluna da Figura 3. Uma outra propriedade importante é a seguinte. Em cada linha, por exemplo na linha 10 da Figura 3, a cadeia de 5 bits (11001) aparece também na primeira coluna das 5 linhas (11001), da linha 10 até a linha 14.

Como a sequência de De Bruijn é cíclica, a mesma observação acima se verifica também, por exemplo, na linha 31 com a cadeia 10000. Essa propriedade será utilizada na mágica, conforme veremos na próxima seção.

### 4 Mágica Versão 32: descobrir 5 de 32 cartas

Conforme já dito anteriormente, a mágica de revelar 5 cartas, conhecendo as suas cores, tiradas de um baralho incompleto de 32 cartas é bem conhecida [2, 7]. Vamos explicar como ela funciona.

00	<i>hearts</i> ou copas	♥
01	<i>diamonds</i> ou ouros	♦
10	<i>spades</i> ou espadas	♠
11	<i>clubs</i> ou paus	♣

Figura 4: Primeiros dois bits codificam o naipe da carta.

000	8
001	A
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Figura 5: Últimos três bits codificam o valor da carta.

Uma cadeia de 5 bits é usada para codificar cada carta. O primeiro bit codifica a cor da carta, assim:

0	Vermelho
1	Preto

Os dois primeiros bits codificam o naipe da carta (Figura 4).

Os últimos 3 bits da cadeia codificam o valor da carta (Figura 5). Apenas as cartas de Ás até 8 são usadas. (Alguns mágicos preferem usar as cartas Ás e 7 até K. Para isso basta somar 7 aos valor correspondente aos 3 bits para facilitar a memorização, adotando o valor 14 para representar Ás.)

Usando essa codificação e a Figura 3, as 32 cartas estão codificadas na Figura 6.

1.	00001	A ♥	17.	11000	8 ♣
2.	00010	2 ♥	18.	10001	A ♠
3.	00100	4 ♥	19.	00011	3 ♥
4.	01001	A ♦	20.	00110	6 ♥
5.	10010	2 ♠	21.	01101	5 ♦
6.	00101	5 ♥	22.	11011	3 ♣
7.	01011	3 ♦	23.	10111	7 ♠
8.	10110	6 ♠	24.	01110	6 ♦
9.	01100	4 ♦	25.	11101	5 ♣
10.	11001	A ♣	26.	11010	2 ♣
11.	10011	3 ♠	27.	10101	5 ♠
12.	00111	7 ♥	28.	01010	2 ♦
13.	01111	7 ♦	29.	10100	4 ♠
14.	11111	7 ♣	30.	01000	8 ♦
15.	11110	6 ♣	31.	10000	8 ♠
16.	11100	4 ♣	32.	00000	8 ♥

Figura 6: As 32 cartas codificadas.

Tomemos de novo a linha 10 da Figure 6. Pela propriedade observada na seção anterior, os 5 bits da linha 10 são iguais aos primeiros bits das cinco linhas a partir da linha 10. Como o primeiro bit de cada carta representa a cor, então podemos obter o código de 5 bits de cada linha,

que representa uma carta (cor, naipe e valor), conhecendo as cores das cinco cartas a partir da mesma. Um outro fato é que os códigos de 5 bits de cada linha é distinta, por construção. Essa é a explicação por que razão a mágica funciona.

Conhecendo a primeira carta, as demais 4 cartas podem ser conhecidas ao memorizar a sequência. Entretanto, as cadeias de 5 bits da Figura 6 possuem uma propriedade útil: conhecendo o valor de uma cadeia, pode-se facilmente obter o valor da cadeia seguinte, sem memorização, da seguinte maneira. Seja uma cadeia com os 5 bits  $b_1b_2b_3b_4b_5$ . A cadeia seguinte possui os 4 primeiros bits iguais a  $b_2b_3b_4b_5$  e o quinto bit igual a  $b_1 \oplus b_3$  onde  $\oplus$  é a operação de ou-exclusivo. Essa propriedade, porém, não vale se a cadeia contém 00000, pois a cadeia seguinte seria também 00000 pela regra. A solução que os mágicos encontraram é simplesmente remover a cadeia 00000 (na nossa codificação remover a carta 8♥).

## 5 Mágica Versão 52: descobrir 6 de 52 cartas

Na seção anterior, usamos uma sequência de De Bruijn  $B(5)$  de 32 bits para gerar as 32 cadeias distintas de 5 bits. Cada cadeia de 5 bits é usada para codificar uma das 32 cartas.

Nessa seção, mostramos o que é necessário para adaptar as mesmas ideias para a mágica de descobrir 6 cartas em um baralho completo de 52 cartas.

### 5.1 Ideias preliminares

Para 52 cartas, vamos codificar cada carta com uma cadeia de 6 bits. A codificação da cor (vermelho ou preto) e do naipe seguem as mesmas regras da seção anterior. Os 4 últimos bits codificam o valor (do Ás até K), como se segue. Note que os códigos 0000, 1110 e 1111 (marcados com \*) não correspondem ao valor de nenhuma carta. Há portanto 12 cadeias de 6 bits que não correspondem a cartas do baralho.

0000	*
0001	Ás
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	J
1100	Q
1101	K
1110	*
1111	*

Para a Mágica Versão 52, vamos eliminar 12 bits de uma sequência de De Bruijn  $B(6)$  de 64 bits, com as seguintes condições.

1. Na nova sequência (cíclica) de 52 bits, cada subsequência de 6 bits deve aparecer uma única vez.
2. A nova sequência apresenta igual número de subsequências 00, 01, 10 e 11.

A condição 1 é necessária pois cada subsequência de 6 bits deve determinar uma única carta.

Note que o naipe é codificado por 2 bits, portanto na condição 2 queremos ter o mesmo número de cada naipe, ou seja, 13 de cada naipe.

Mostramos a seguir que é possível obter tal sequência de 52 bits com as duas condições acima.

## 5.2 Obtenção de uma nova sequência de 52 bits

Consideramos a sequência de De Bruijn  $B(6)$ , denominada de CCR1, do artigo de Daniel Gabric, Joe Sawada, Aaron Williams and Dennis Wong [4].

CCR1: 0000001111110001101110011001010110101001000100111011000010111101

A nova sequência com as duas condições satisfeitas é obtida ao remover o trecho de 12 bits, conforme mostra a figura abaixo.

000000111111000110111001100101011010100100010011101 100001011110 1  
Remove

A nova sequência assim obtida é a seguinte.

0000001111110001101110011001010110101001000100111011

A partir dessa sequência (cíclica) de 52 bits, obtemos as 52 cadeias de 6 bits, juntamente com as cartas codificadas. Ver Figura 7. As cadeias marcadas com asterisco (\*) não codificam cartas válidas.

1	000000*		27	010101	5♦
2	000001	A♥	28	101011	J♠
3	000011	3♥	29	010110	6♦
4	000111	7♥	30	101101	K♠
5	001111*		31	011010	10♦
6	011111*		32	110101	5♣
7	111111*		33	101010	10♠
8	111110*		34	010100	4♦
9	111100	Q♣	35	101001	9♠
10	111000	8♣	36	010010	2♦
11	110001	A♣	37	100100	4♠
12	100011	3♠	38	001000	8♥
13	000110	6♥	39	010001	A♦
14	001101	K♥	40	100010	2♠
15	011011	J♦	41	000100	4♥
16	110111	7♣	42	001001	9♥
17	101110*		43	010011	3♦
18	011100	Q♦	44	100111	7♠
19	111001	9♣	45	001110*	
20	110011	3♣	46	011101	K♦
21	100110	6♠	47	111011	J♣
22	001100	Q♥	48	110110	6♣
23	011001	9♦	49	101100	Q♠
24	110010	2♣	50	011000	8♦
25	100101	5♠	51	110000*	
26	001010	10♥	52	100000*	

Figura 7: As 43 cartas codificadas. (\*) indica código de carta inválida.

Note que na Figura 7, as seguintes 9 cartas estão faltando: 4♣, 10♣, K♣, 7♦, 2♥, 5♥, J♥, 8♠ e A♠. Por outro lado, temos as 9 cadeias marcadas com asterisco (\*) (com os quatro últimos bits iguais a 0000, 1110 ou 1111) que não correspondem a valores de cartas do baralho. Contando as cadeias marcadas com \*, temos exatamente 3 com os dois primeiros bits codificando ♣, uma codificando ♦, 3 codificando ♥, e 2 codificando ♠.

Assim, usamos as cartas marcadas com (\*) para codificar as cartas faltantes, como exceções. Isso é mostrado na Figura 8. O mágico teria que memorizar essas exceções. Entretanto, conforme vimos na seção 2, o uso de um arquivo facilitou a apresentação por já armazenar as codificações e as exceções.

1	000000*	2♥	27	010101	5♦
2	000001	A♥	28	101011	J♠
3	000011	3♥	29	010110	6♦
4	000111	7♥	30	101101	K♠
5	001111*	5♥	31	011010	10♦
6	011111*	7♦	32	110101	5♣
7	111111*	4♣	33	101010	10♠
8	111110*	10♣	34	010100	4♦
9	111100	Q♣	35	101001	9♠
10	111000	8♣	36	010010	2♦
11	110001	A♣	37	100100	4♠
12	100011	3♠	38	001000	8♥
13	000110	6♥	39	010001	A♦
14	001101	K♥	40	100010	2♠
15	011011	J♦	41	000100	4♥
16	110111	7♣	42	001001	9♥
17	101110*	8♠	43	010011	3♦
18	011100	Q♦	44	100111	7♠
19	111001	9♣	45	001110*	J♥
20	110011	3♣	46	011101	K♦
21	100110	6♠	47	111011	J♣
22	001100	Q♥	48	110110	6♣
23	011001	9♦	49	101100	Q♠
24	110010	2♣	50	011000	8♦
25	100101	5♠	51	110000*	K♣
26	001010	10♥	52	100000*	A♠

Figura 8: As 52 cartas codificadas. (\*) indica uma exceção na codificação do valor da carta.

## 6 Comentários finais

A mágica apresentada aqui utiliza o baralho completo de 52 cartas. Permite cortar as cartas tantas vezes forem necessárias antes de distribuir as 6 cartas. Para viabilizar a mágica, a dificuldade reside na extração de uma sequência cíclica de 52 bits, a partir de uma sequência de De Bruijn de ordem 6 de 64 bits, que satisfaz as duas condições da seção 5.1. Do nosso conhecimento não encontramos outros trabalhos com essas características na literatura.

Vamos comentar sobre as duas condições da Seção 5.1.

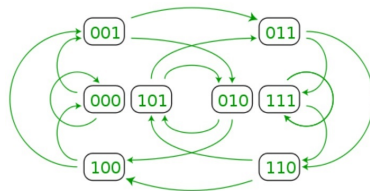
1. Na nova sequência (cíclica) de 52 bits, cada subsequência de 6 bits deve aparecer uma única vez.
2. A nova sequência apresenta igual número de subsequências 00, 01, 10 e 11.

Lembre que usamos uma cadeia de 6 bits para codificar cada carta: o primeiro bit para codificar a cor, os dois primeiros bits o naipe, e os últimos 4 bits o valor da carta. Condição 1 é necessária pois cada subsequência de 6 bits deve determinar uma única carta. Uma outra condição necessária é que a sequência de 52 bits apresente igual número (i.e. 26) de bits 0 e 1, pois temos 26 cartas vermelhas e 26 cartas pretas. Por outro lado, temos 13 cartas com o mesmo naipe. Condição 2 garante que podemos codificar os naipes adequadamente. Condição 2 é uma condição forte pois ela garante o mesmo número (26) de 0s e 1s. Note que as subsequências de 4 bits possuem valores entre 0000 e 1111. Portanto, tivemos que permitir exceções na codificação dos valores das cartas.

A descoberta da sequência de De Bruijn foi devida a Nicolaas Govert de Bruijn (1918 - 2012), um matemático holandês que fez carreira na Eindhoven University of Technology. Apresentamos brevemente, a seguir, algumas aplicações da sequência de De Bruijn.

Como antes, vamos considerar sequências binárias. A sequência de De Bruijn tem relação com o grafo de De Bruijn. Um grafo de De Bruijn de dimensão  $n$  é um grafo orientado onde os vértices são todas as  $2^n$  cadeias de  $n$  bits. Cada vértice tem duas arestas orientadas, definidas como se segue. Um vértice  $b_1b_2 \dots b_n$  tem arestas para os vértices  $b_2 \dots b_n0$  e  $b_2 \dots b_n1$ . Exemplo: a figura mostra um grafo de De Bruijn de dimensão 3.





Source: Wikipedia

Uma sequência de De Bruijn de ordem  $n$  pode ser construída através de um caminho hamiltoniano de um grafo de De Bruijn de dimensão  $n$ . Tome por exemplo o grafo de De Bruijn de dimensão 3 da figura. Um caminho hamiltoniano é

000  
001  
010  
101  
011  
111  
110  
100

Uma sequência de De Bruijn de ordem 3 é obtida ao considerarmos o primeiro bit da cada cadeia da figura acima: 00010111. Há uma outra sequência de De Bruijn de ordem 3 possível, a saber, 11101000.

Um uso do grafo de De Bruijn é em Computação Paralela quando queremos achar redes de interconexão que minimizam a distância entre dois computadores quaisquer. Diâmetro de um grafo é a maior distância entre dois vértices quaisquer. Por exemplo, ao interconectar  $N$  computadores em forma de um anel teremos um diâmetro de  $N/2$ . O diâmetro de um grafo de De Bruijn de dimensão  $n$ , com  $2^n$  vértices, é  $n$ . Assim, ao interconectar  $N$  processadores na forma de um grafo de De Bruijn, o diâmetro é  $\log N$ . C. Lavault [6] discute este assunto considerando um grafo de De Bruijn com alfabeto não binário (cada vértice tem arestas para  $k > 2$  outros vértices). Para  $N$  vértices ou computadores, o diâmetro é  $\log_k N$ .

Em Bioinformática, o grafo de De Bruijn é usado para montagem de fragmentos de DNA e para *de novo* montagem de sequências de nucleótidos [9, 1]. O grafo de De Bruijn também é usado no protocolo Koorde para tabela de espalhamento distribuída [5].

O livro de Persi Diaconis e Ron Graham [2] apresenta várias aplicações, em visão robótica, desenvolver códigos para criptografar dados e análise de DNAs.

O leitor interessado pode consultar muito material existente na literatura sobre sequência e grafo de De Bruijn e.g. [3, 8, 10, 11].

## Referências

- [1] R. Chikhi, A. Limasset, S. Jackman, J. Simpson, P. Medvedev. On the representation of de Bruijn graphs. RECOMB 2014: Proceedings of the 18th Annual International Conference on Research in Computational Biology - Volume 8394, April 2014, pages 35-55.
- [2] Persi Diaconis and Ron Graham. *Magical Mathematics: The Mathematical Ideas That Animate Great Magic Tricks*. Princeton University Press, 2012.
- [3] Hal Fredricksen, and Anthony Ralston. De Bruijn Sequences- A Model Example of the Interaction of Discrete Mathematics and Computer Science. *Mathematics Magazine* 55, no. 3 (1982): 131-143.

- [4] Daniel Gabric, Joe Sawada, Aaron Williams and Dennis Wong. A framework for constructing de Bruijn sequences via simple successor rules. *Discrete Mathematics* 341(11):2977-2987, November 2018.
- [5] M. Frans Kaashock, David R. Karger. Koorde: a simple degree-optimal distributed hash table. International Workshop on Peer-to-Peer Systems. IPTPS 2003, pp. 98-107. LNCS Volume 2735, Springer-Verlag.
- [6] Christian Lavault. Interconnection Networks: Graph- and Group Theoretic Modelling. HAL - a multi-disciplinary open access archive. Submitted on 8 Mar 2010. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00461923>
- [7] F. Thompson Leighton. *Introduction to parallel algorithms and architectures: arrays, trees, hypercubes*. Morgan Kaufmann Pub. 1992. (See page 487.)
- [8] Antoine Limasset, Bastien Cazaux, Eric Rivals and Pierre Peterlongo. Read mapping on de Bruijn graphs. *BMC Bioinformatics* 17, Article number 237. 2016.
- [9] Pavel A. Pevzner, Haixu Tang, and Michael S. Waterman. An Eulerian path approach to DNA fragment assembly. PNAS August 14, 2001 98 (17) 9748-9753.
- [10] Joe Sawada, Aaron Williams, Dennis Wong. A surprisingly simple de Bruijn sequence construction. *Discrete Mathematics* 339(1):127-131, January 2016.
- [11] Chi Him Wong. Novel universal cycle constructions for a variety of combinatorial objects. Ph.D. thesis in Computer Science. The University of Guelph. 2015. 117 pages.
- [12] Shenquan Xie. Notes on de Bruijn sequences. *Discrete Applied Mathematics* 16 (1987) 157-177.
- [13] <https://aperiodical.com/2012/08/davids-de-bruijn-sequence-card-trick/>
- [14] <https://gist.github.com/christianp/3206992>
- [15] <https://www.themagiccafe.com/forums/viewtopic.php?topic=676384>