Memória interna e Código de Hamming

MAC0344 - Arquitetura de Computadores
Prof. Siang Wun Song
Slides usados: https://www.ime.usp.br/∼song/mac344/slides05-memory.pdf

Baseado parcialmente em W. Stallings -

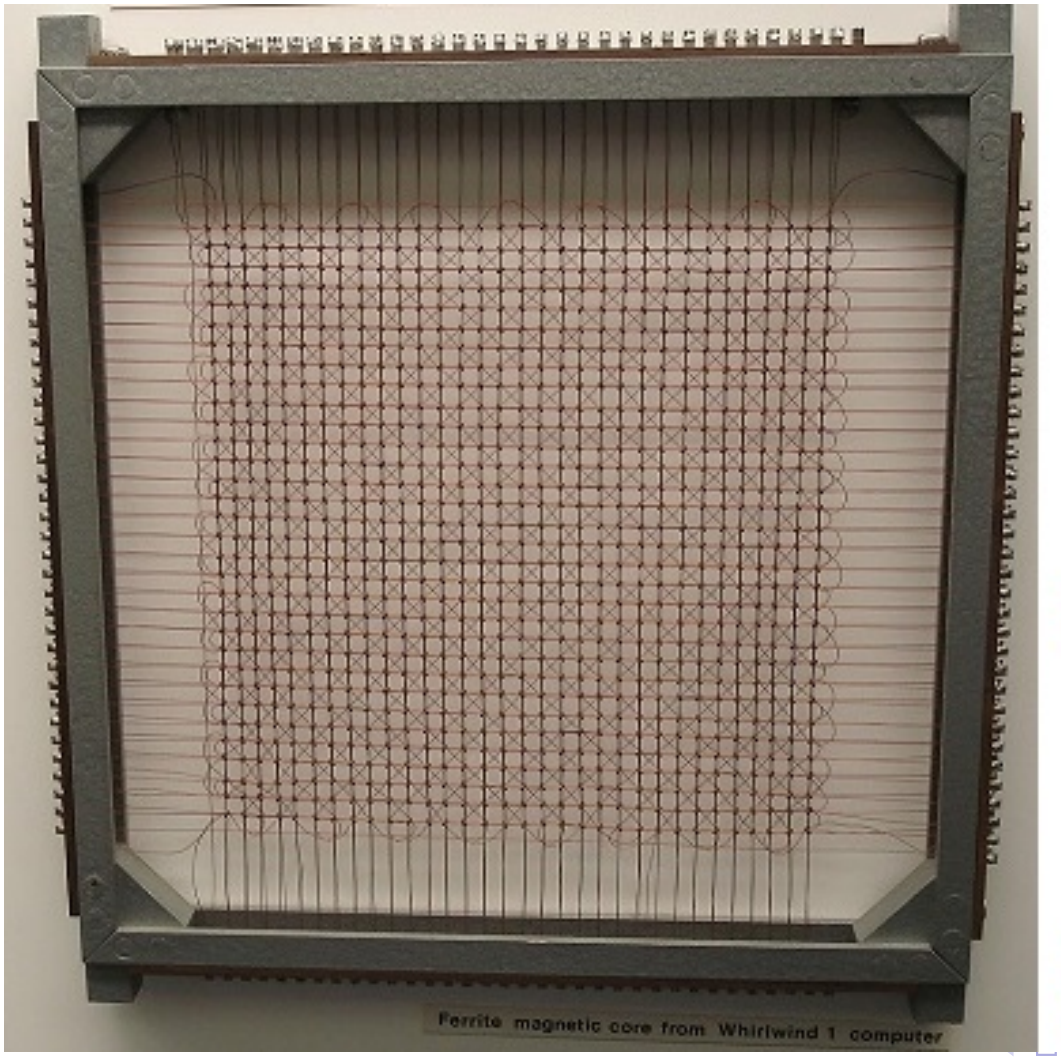
Computer Organization and Architecture

Memória interna e código de detecção/correção de erros

- Veremos Memória interna e código de detecção/correção de erros. Será passada a Lista 4 de exercícios.
- Ao final das aulas, vocês saberão
  - Todos os tipos de memória interna ou principal são feitos de Silício. As aulas sobre a Tecnologia VLSI - transistor MOS etc. - ajudam muito para entender esse assunto.
  - O que são memória dinâmica e estática, memória volátil e não-volátil. Memória ROM, Memória Flash, etc.
  - Há métodos de detectar erros de leitura de memória. Detectado o erro, a memória é lida de novo.
  - O melhor ainda é o método que detecta e corrige o erro, sem precisar ler de novo (código de Hamming).
  - Em particular, verão como esse método pode ser adaptado para corrigir erros de transmissão de grandes quantidades de dados entre dois pontos distantes.

Memória magnética de núcleo de ferrite

- Nos computadores antigos, a memória interna (RAM) era feita de núcleos de ferrite (*magnetic-core memory*). (Até hoje *core memory* é usado para indicar memória interna.)

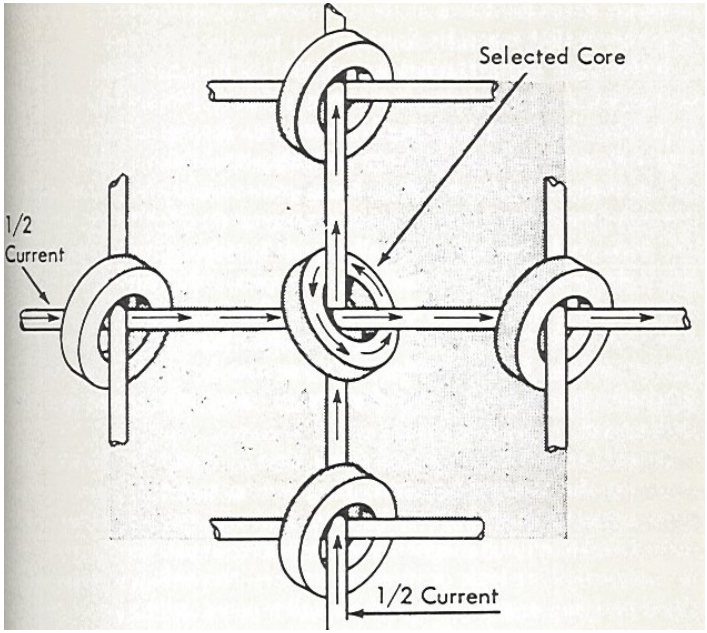


1024 bits

Source: Science Museum, London

Memória magnética de núcleo de ferrite

Source: IBM Early Computers, MIT Press



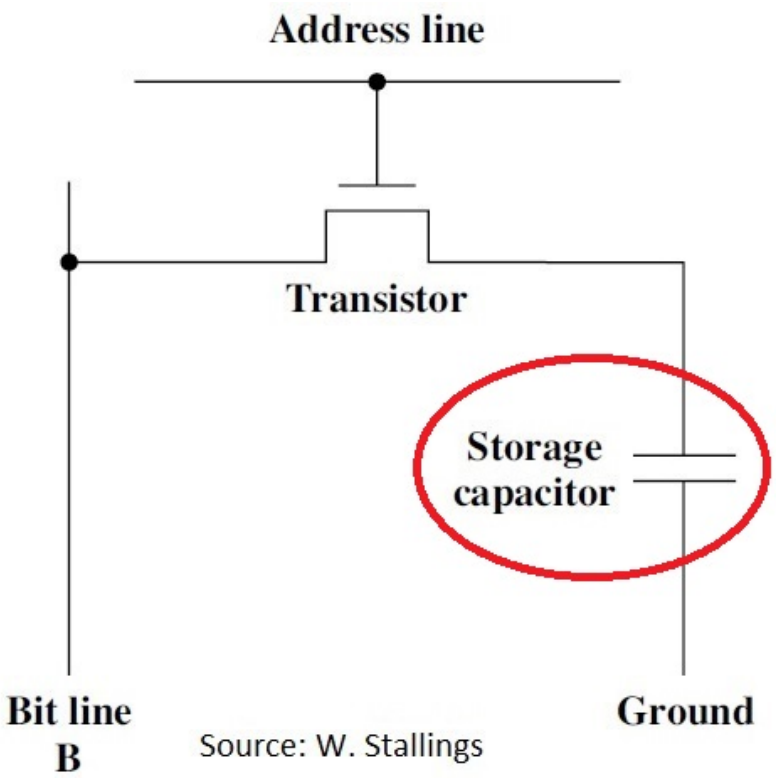
- A memória de núcleo de ferrite é do tipo não-volátil: o valor armazenado não se perde quando a energia é desligada e depois religada.

Memória DRAM e SRAM - ambas voláteis

- A memória é feita de semi-condutor (Silício).
- Pode ser de dois tipos:
  - DRAM ou Dynamic RAM
  - SRAM ou Static RAM
- DRAM e SRAM são ambas voláteis: o conteúdo se perde quando o computador é desligado e depois religado.
- Conteúdo criado na memória precisa ser gravado no disco periodicamente, para não perder tudo se a energia cair. Algunas editores já fazem isso automaticamente.

Memória interna DRAM - Dynamic RAM

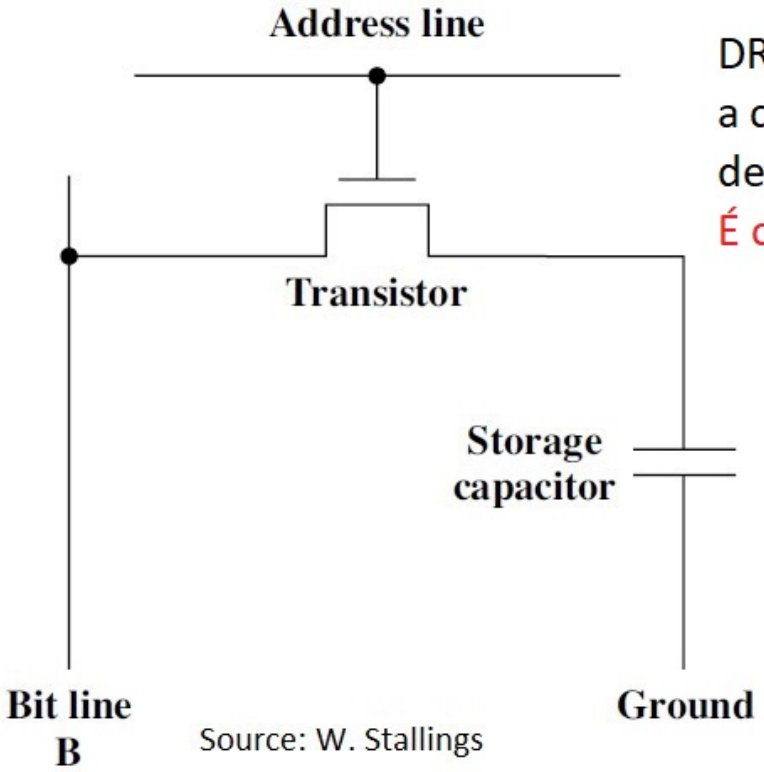
- DRAM (*Dynamic RAM*): usada na memória principal.
- O capacitor com carga representa 1, senão representa 0.
- Quando carregado, a carga pode perder por vazamento.
- Para manter a carga de um capacitor que representa 1, aplica-se um pulso de refrescamento periodicamente.



Source: W. Stallings

Memória interna DRAM - Dynamic RAM

- DRAM (*Dynamic RAM*): usada na memória principal.
- O capacitor com carga representa 1, senão representa 0.
- Quando carregado, a carga pode perder por vazamento.
- Para manter a carga de um capacitor que representa 1, aplica-se um pulso de refrescamento periodicamente.



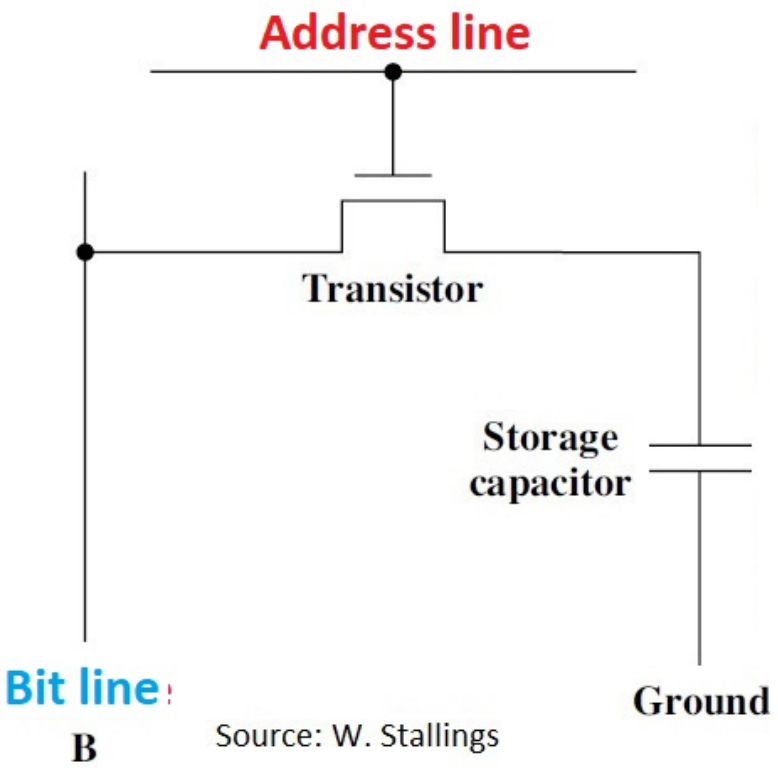
Source: W. Stallings

DRAM é volátil pois quando se desliga a eletricidade a carga se perde. Mas o pior é que, mesmo sem desligar, a carga também se perde por vazamento.
É como um balde furado com água:

Balde furado vai perdendo água. Precisa sempre encher mais água:
Refrescamento

Memória interna DRAM - Dynamic RAM

- DRAM (*Dynamic RAM*): usada na memória principal.
- O capacitor com carga representa 1, senão representa 0.
- Quando carregado, a carga pode perder por vazamento.
- Para manter a carga de um capacitor que representa 1, aplica-se um pulso de refrescamento periodicamente.



Source: W. Stallings

Address line controla o transistor para permitir acesso ao capacitor.

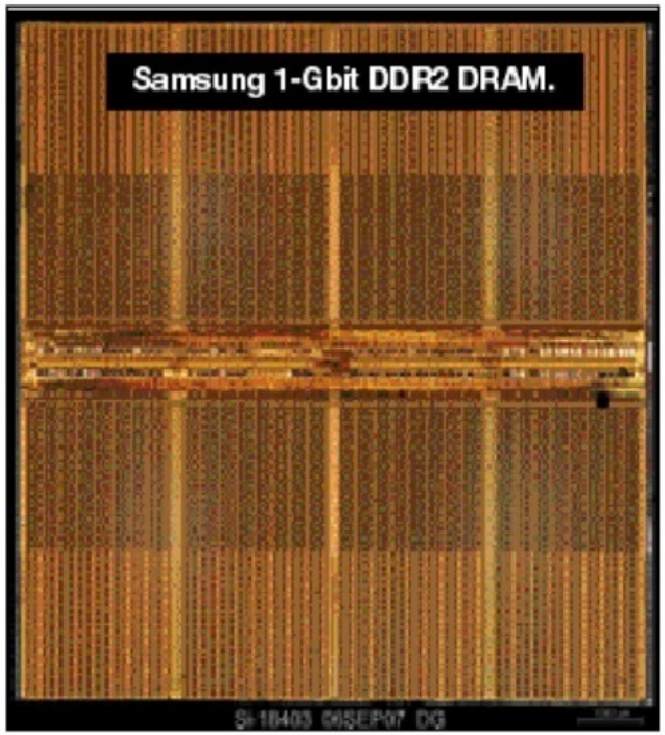
Usa-se voltagem alta no **Bit line** para escrever 1; votagem baixa para 0.

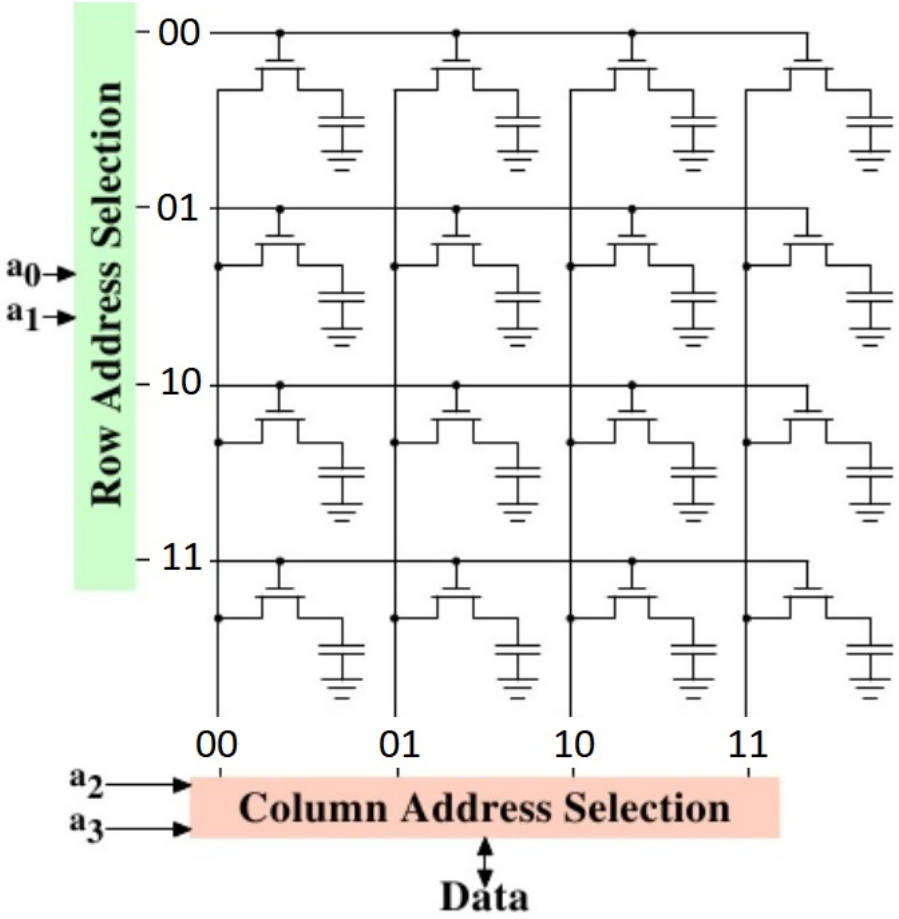
Para ler, **Bit line** tira a carga do capacitor para ver se é 1 ou 0. A leitura descarrega o capacitor, cuja carga deve ser restaurada.

Memória interna DRAM - Dynamic RAM

Samsung 1-Gbit DRAM. Note a disposição regular dos bits, permitindo uma maior densidade (mais bits por unidade de área do Silício). Source: Samsung 1-Gbit DRAM.

Modern DRAM chip with 8 internal memory banks.

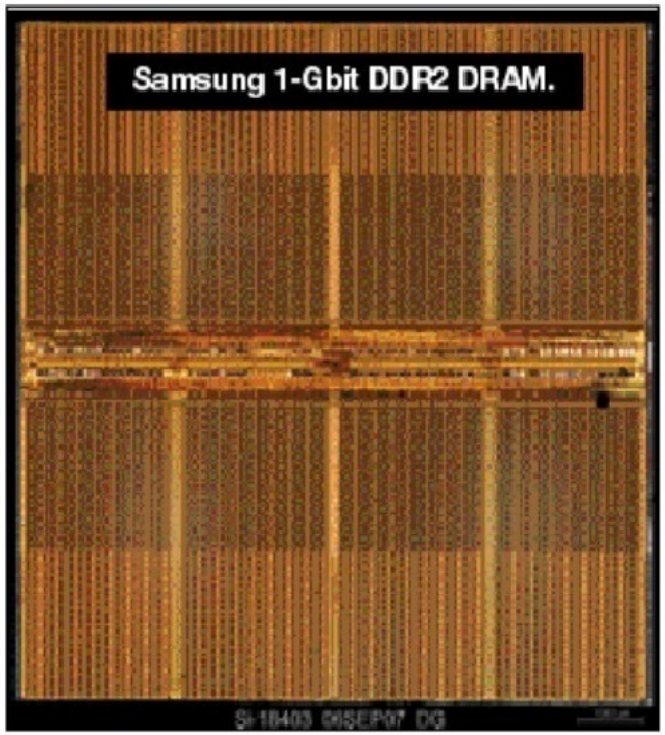


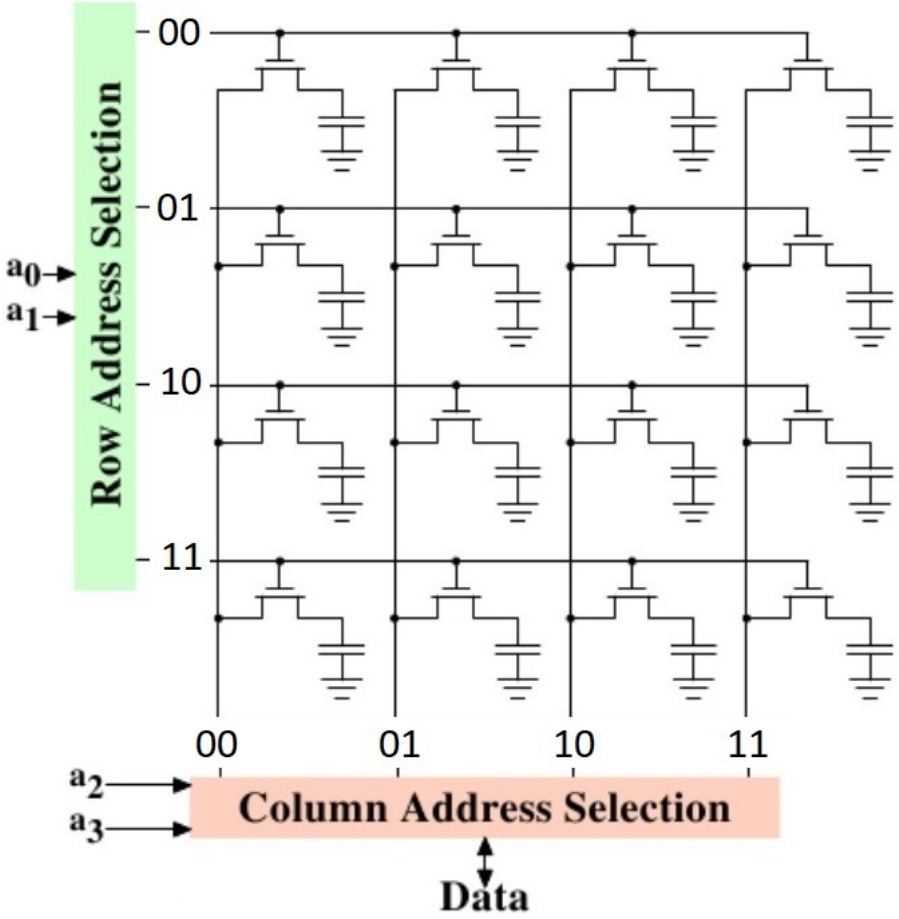


Memória interna DRAM - Dynamic RAM

Samsung 1-Gbit DRAM. Note a disposição regular dos bits, permitindo uma maior densidade (mais bits por unidade de área do Silício). Source: Samsung 1-Gbit DRAM.

Modern DRAM chip with 8 internal memory banks.



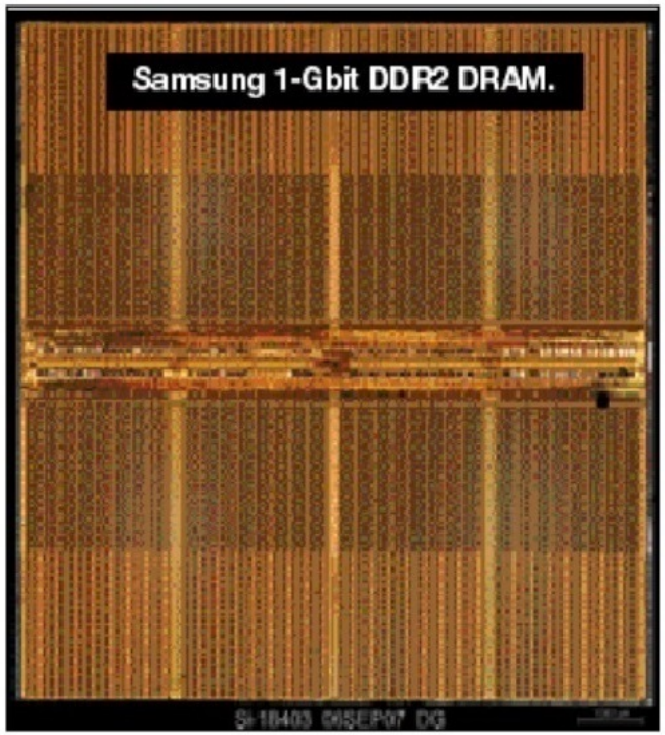


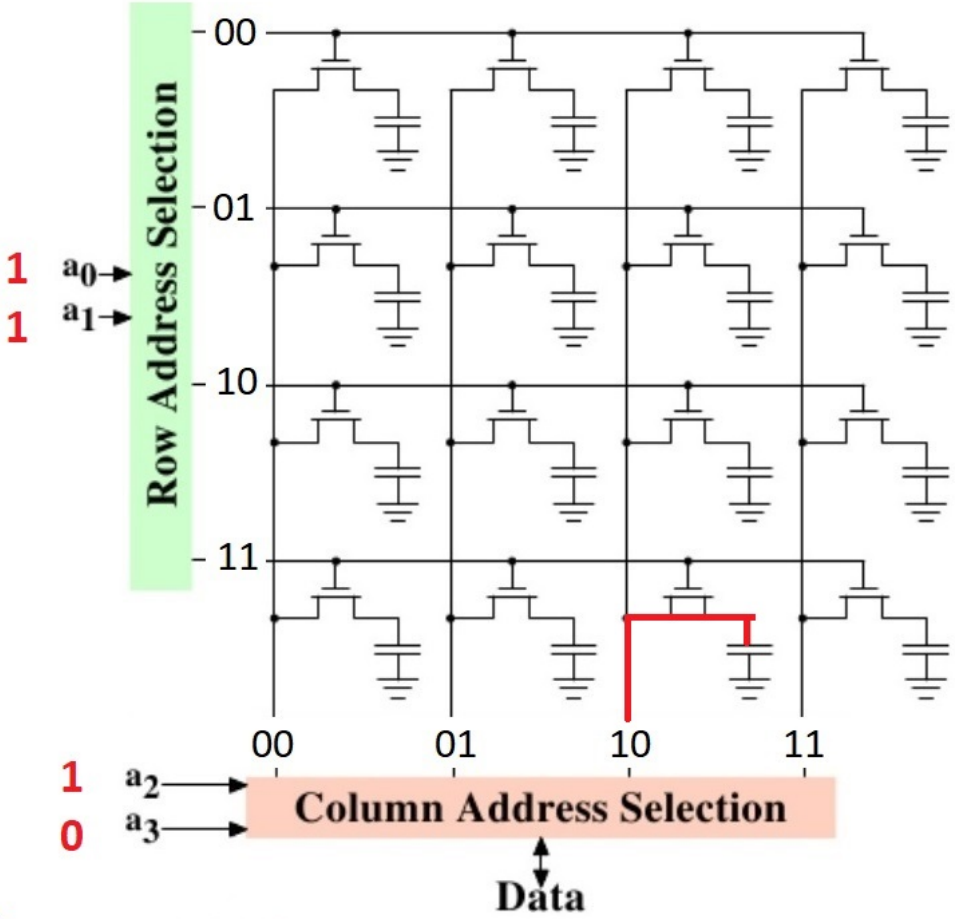
Queremos escrever 1 no endereço 1110

Memória interna DRAM - Dynamic RAM

Samsung 1-Gbit DRAM. Note a disposição regular dos bits, permitindo uma maior densidade (mais bits por unidade de área do Silício). Source: Samsung 1-Gbit DRAM.

Modern DRAM chip with 8 internal memory banks.

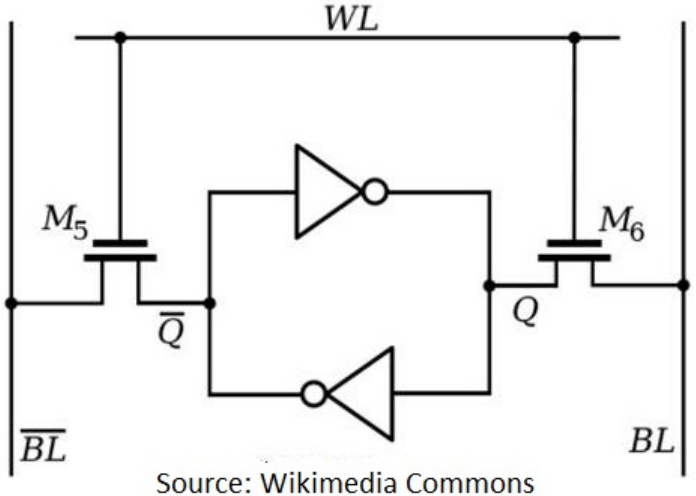




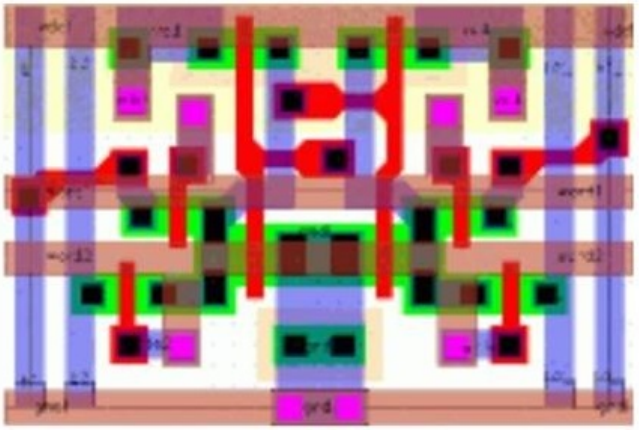
Queremos escrever 1 no endereço 1110

Memória SRAM - Static RAM

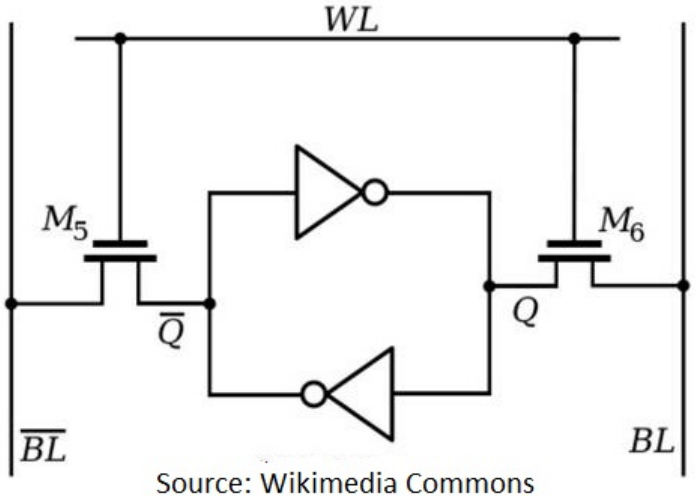
- SRAM (*Static RAM*): A memória estática mantém o dado inalterado, desde que haja energia. Não precisa de refrescamento.
- É usada na memória cache e registradores, sendo mais rápida, menos densa e mais custosa do que DRAM.
- Uma célula (um bit) SRAM pode ser implementada por duas portas inversoras (portas NÃO). A figura da direita mostra uma célula de um bit em CMOS.



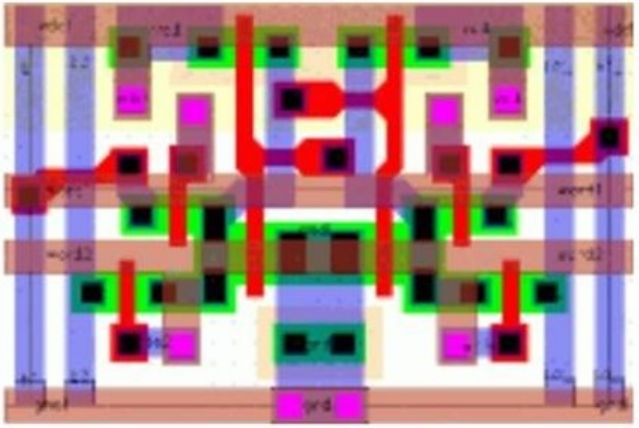
Source: Wikimedia Commons


https://iis-people.ee.ethz.ch/~kgf/aries/5.html

Memória SRAM - Static RAM



Source: Wikimedia Commons



https://iis-people.ee.ethz.ch/~kgf/aries/5.html

- Há dois estados estáveis:
  - Memória contendo 1: $Q = 1$ e $\overline{Q} = 0$
  - Memória contendo 0: $Q = 0$ e $\overline{Q} = 1$
- Para ler: Linha *WL* alta liga transistores *M*5 e *M*6:

  Valor *Q* é transmitido para *BL* (e valor $\overline{Q}$ para $\overline{BL}$)
- Para escrever: Valor 1 ou 0 é colocado em *BL* e o complemento em $\overline{BL}$:

  Linha *WL* alta liga transistores *M*5 e *M*6

Memória SRAM - Static RAM

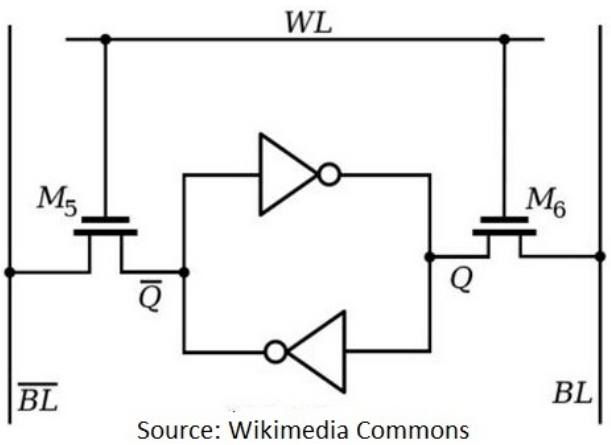


Figura 1

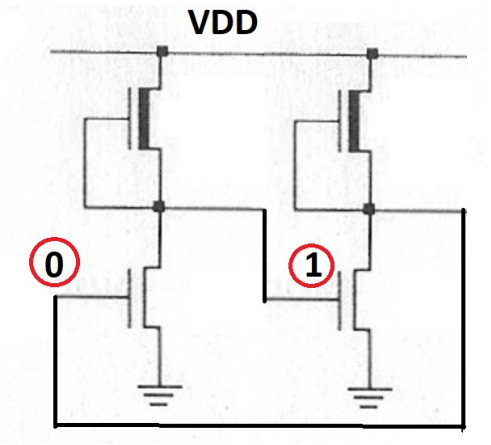
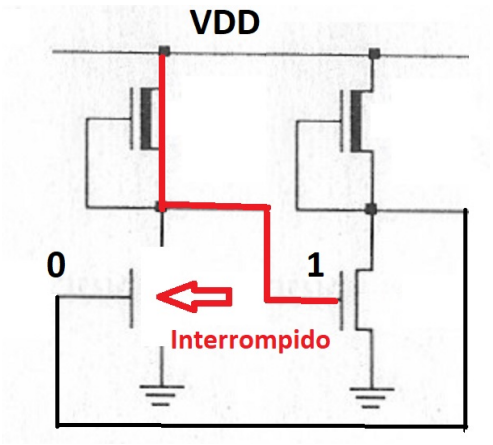


Figura 2



- Vejamos agora por quê duas portas inversoras assim podem garantir o valor 1 sem precisar de refrescamento.
- Figura 1: Porta da direita tem entrada 1, carregando o capacitor.
- A sua saída vale 0, que é conectado à entrada da porta da esquerda.
- Figura 2: Com a entrada igual a 0, o circuito na parte de baixo da porta da esquerda está interrompido. Assim, a corrente sai de VDD e alimenta o capacitor da direita. Portanto esse capacitor fica sempre carregado pela realimentação.

Memórias DRAM e SRAM

Comparação entre DRAM e SRAM.

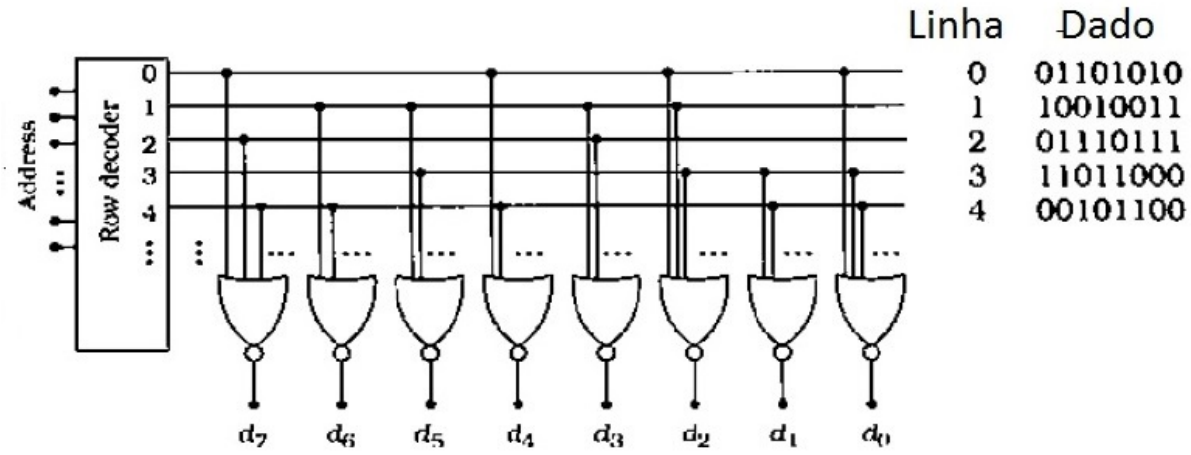
- Ambas são voláteis.
- A célula DRAM é mais simples e ocupa menos espaço que uma célula SRAM.
- Portanto DRAM é mais densa (mais células por unidade de área) e mais barata.
- Por outro lado, DRAM requer uma circuitaria de refrescamento. Para memórias grandes, esse custo fixo é mais que compensado pelo menor custo.
- Daí DRAM é preferida para memórias grandes e SRAM (que é mais rápida) é mais usada em memória cache.

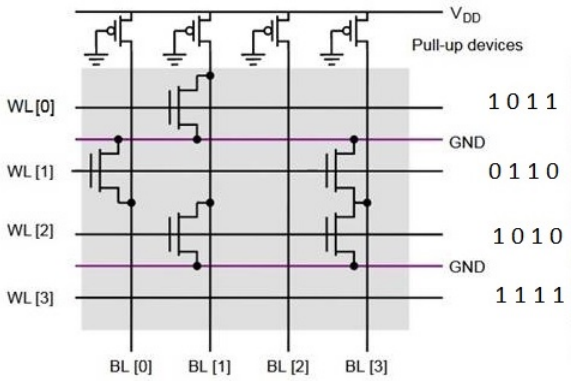
Tipos de ROM (*Read Only Memory*)

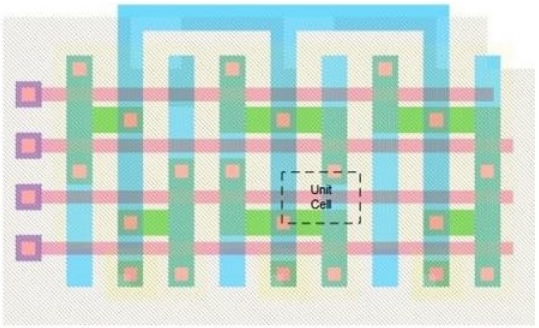
- ROM é uma memória cujo conteúdo é fixo, pré-gravado na fabricação, e não pode ser alterado.
- Há vários tipos de ROMs: todos são não-voláteis, i.e. não requerem energia para manter o seu conteúdo.
- Um importante uso de ROM é em processador CISC para armazenar o microprograma.
- ROM pode ser fabricada com portas NOR ou NAND, com um *layout* denso.
- Como ROM não pode ser alterada, erro de um bit pode acarretar em descartar um lote inteiro.

ROM baseado em portas NOR

- Na ROM baseada em NOR, o endereço entra num decodificador e ativa uma das linhas de saída do decodificador: a linha ativada contém 1 e todas as demais 0.
- Se essa linha entra no NOR, a saída é 0, senão é 1.

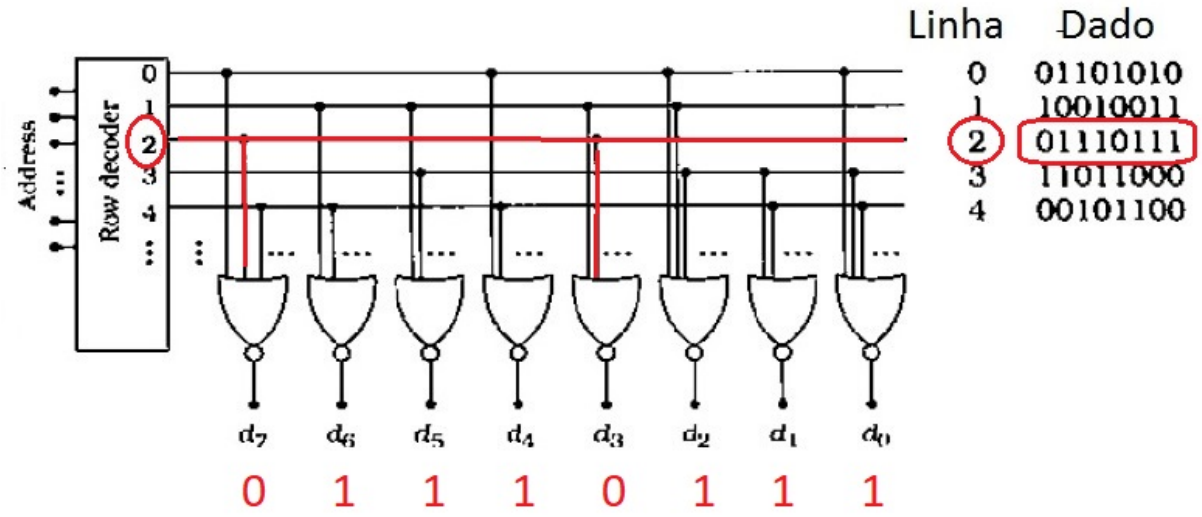


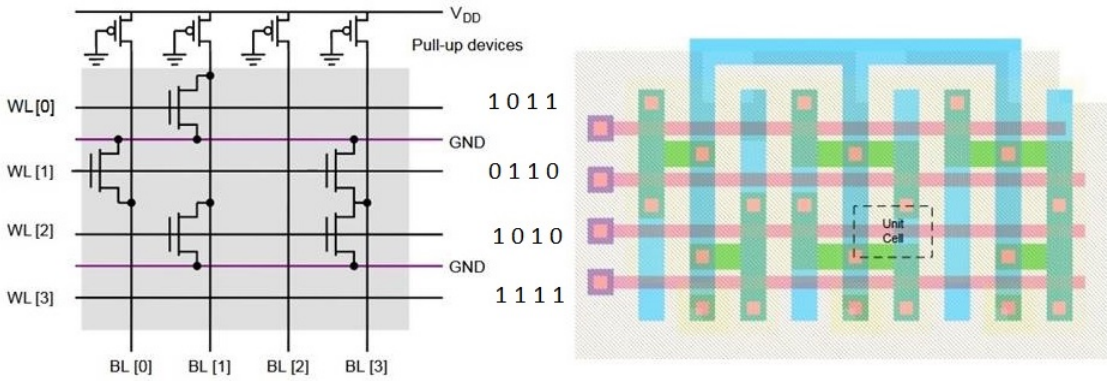




ROM baseado em portas NOR

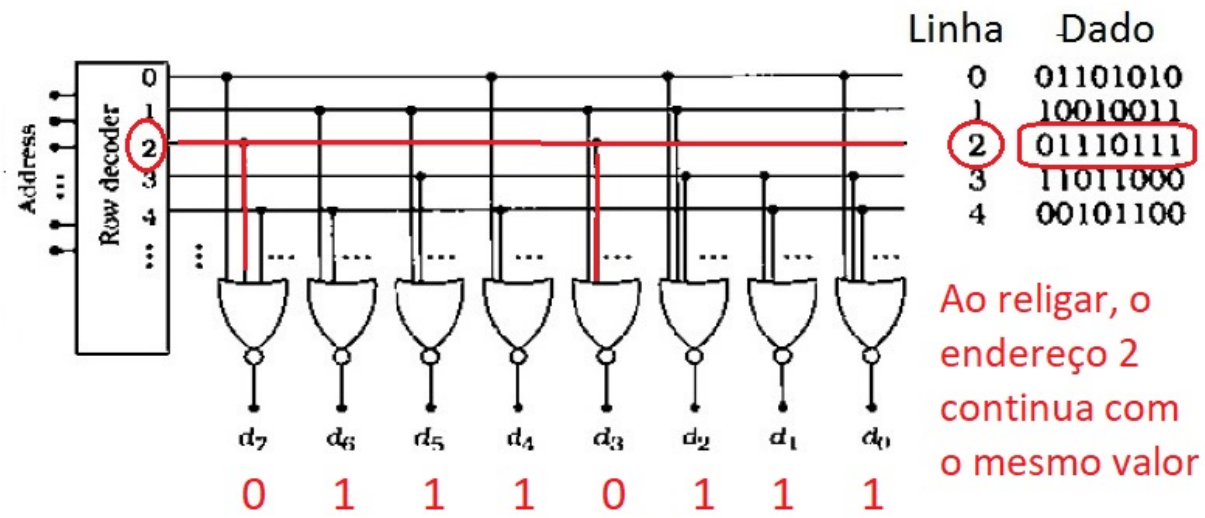
- Na ROM baseada em NOR, o endereço entra num decodificador e ativa uma das linhas de saída do decodificador: a linha ativada contém 1 e todas as demais 0.
- Se essa linha entra no NOR, a saída é 0, senão é 1.

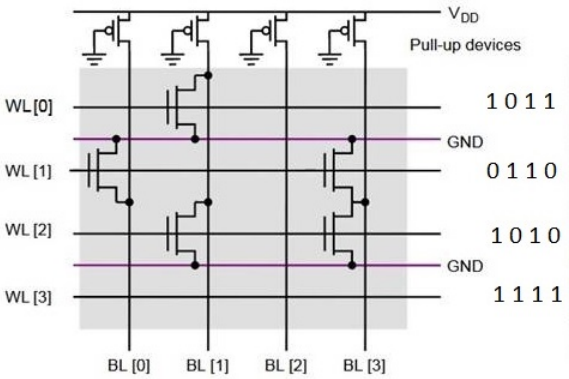


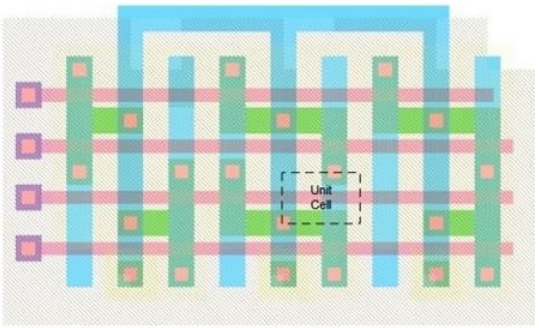


ROM baseado em portas NOR

- A ROM é não-volátil. Depois de desligar, ao religar os valores não se perdem. Vocês podem explicar por quê?
- É porque os valores estão codificados nas entradas das portas e não se perdem.





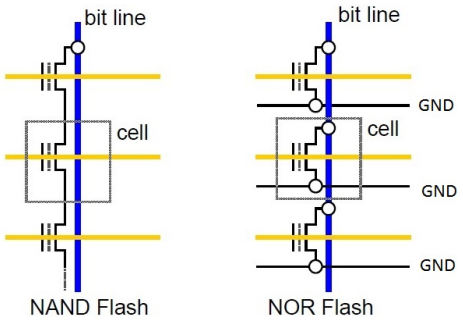


Tipos de ROM (*Read Only Memory*)

- PROM (*Programmable ROM*): pode ser escrita uma só vez, por meio elétrico e pode ser feita depois de fabricada a pastilha.
- PROM oferece mais flexibilidade, mas ROM ainda é preferível para grandes quantidades.
- EPROM (*Erasable Programmable ROM*): leitura e escrita é como numa PROM. Porém, antes de gravar um novo conteúdo, toda a memória é apagada antes por meio de radiação ultra-violeta.
- EPROM é mais custosa.
- EEPROM (*Electrically Erasable ROM*): não é necessário apagar todo o conteúdo para atualização, apenas bytes selecionados são alterados. A escrita de uma EEPROM é demorada: centenas de micro-segundos por byte.
- EEPROM é mais custosa e menos densa.

Memória flash ou *flash memory*

- Flash memory é uma memória intermediária entre EPROM e EEPROM, em custo e funcionalidade.
- Recebe o nome *flash* devido à velocidade com que pode ser alterada: uma memória flash por ser apagada em poucos segundos.
- É possível apagar blocos de memória, mas não no nível de byte.
- Dois tipos: NOR e NAND.
- Como EPROM, flash memory usa um transistor por bit, portanto é bastante densa.
- Solid State Drive ou SSD ("Disco de Estado Sólido") usa a tecnologia de memória flash. Veremos SSD nas aulas sobre Memória Externa.



Detecção e correção de erros de memória

0	0	1	1	0

Memória gravada

0	1	1	1	0

Memória lida

- Erros de leitura de memória podem ocorrer, por exemplo, por problemas de voltagem nas linhas ou radiações.
- Códigos de detecção e de correção são usados para detectar ou corrigir erros de memória.
  - Código de detecção de erro: o dado precisa ser lido novamente.
  - Código de correção de erro: o bit errado é corrigido. Não precisa ler de novo.

Detecção e correção de erros de memória

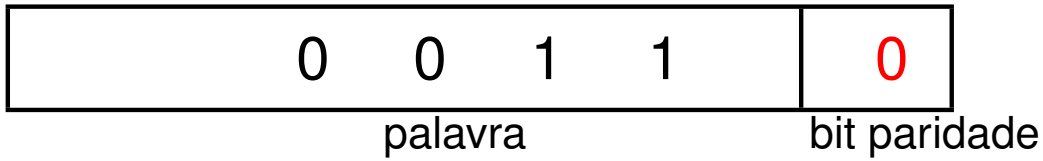
- Preparo do código:
  - Para uma palavra original de M bits que queremos gravar na memória, calculamos K bits adicionais, obtidos em função dos M bits originais.
  - Forma-se um código de $M + K$ bits. Esse código é gravado na memória.
- Detecção:
  - Para uma palavra de M bits, acrescentamos $K = 1$ bit a mais, que depende dos M bits.
- Correção:
  - Para uma palavra de M bits, acrescentamos K bits a mais, onde K depende de M. Veremos isso.
  - Se há apenas um bit errado no código formado por $M + K$ bits, então o método que veremos consegue dizer qual esse bit errado e pode corrigi-lo sem ter que ler de novo.

Código de detecção de erro

Um bit paridade ($K = 1$) é acrescentado a cada palavra original da memória de M bits. O código formado tem $M + 1$ bits.

O bit paridade é escolhido de tal modo que o número de 1's do código formado ($M + 1$ bits) é par.

Exemplo 1: A palavra contém um número par de 1's. Então o bit paridade vale 0. Assim, o código (4 + 1 bits) contém um número par de 1's.

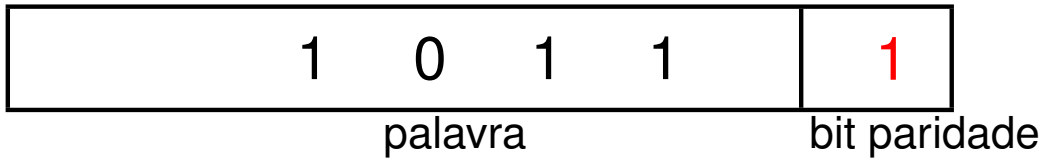


Código de detecção de erro

Um bit paridade ($K = 1$) é acrescentado a cada palavra original da memória de M bits. O código formado tem $M + 1$ bits.

O bit paridade é escolhido de tal modo que o número de 1's do código formado ($M + 1$ bits) é par.

Exemplo 2: A palavra contém um número ímpar de 1's. Então o bit paridade vale 1. Assim, o código (4 + 1 bits) contém um número par de 1's.



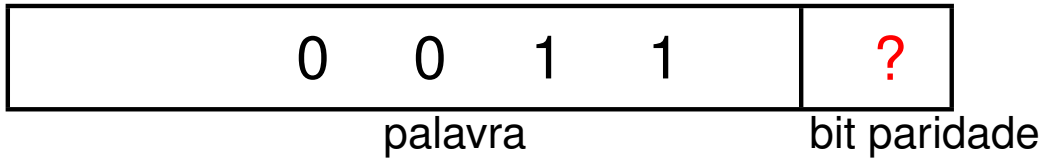
Código de detecção de erro

O bit paridade (paridade par) pode ser obtido fazendo o ou-exclusivo dos bits da palavra original.

Palavra = $x_1 x_2 x_3 x_4$

o bit paridade $x_5 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$

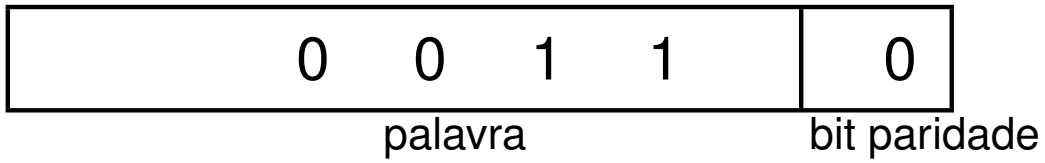
onde $\oplus$ representa a operação *ou-exclusivo*.



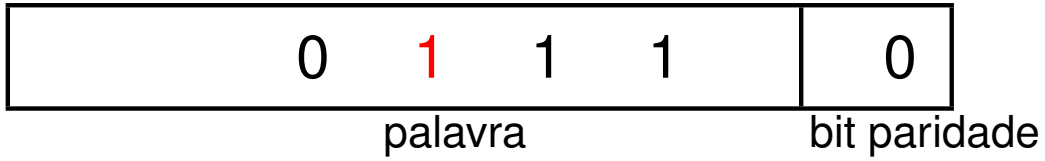
o bit paridade $x_5 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$

Como detectar erro

Exemplo: Preparado o código ($M + 1$ bits), o código é gravado na memória.



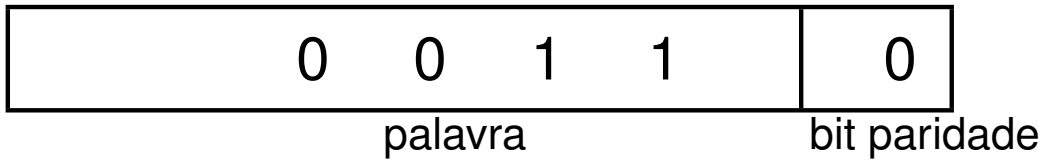
Suponha que ao ler a memória, temos o seguinte caso.



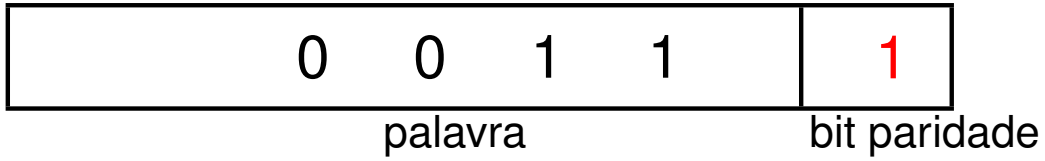
Calculamos a paridade do código lido: paridade ímpar: erro! Tem que ler de novo.

Como detectar erro

Exemplo: Preparado o código ($M + 1$ bits), o código é gravado na memória.



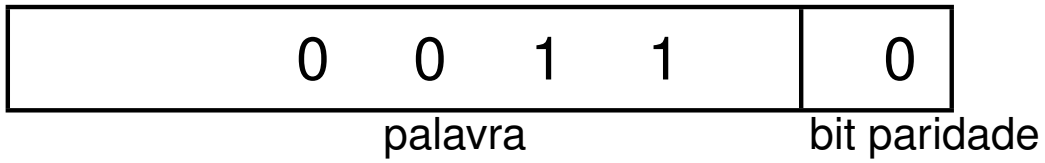
Suponha que ao ler a memória, temos o seguinte caso.



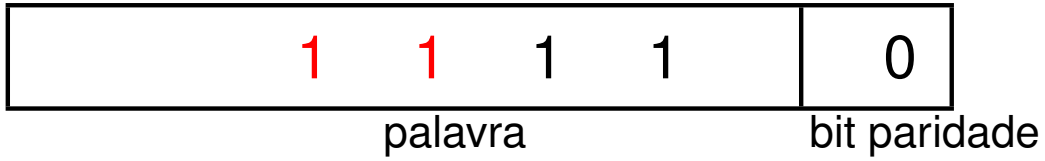
Calculamos a paridade do código lido: paridade ímpar: erro! Tem que ler de novo.

Como detectar erro

Exemplo: Preparado o código ($M + 1$ bits), o código é gravado na memória.



Suponha que ao ler a memória, temos o seguinte caso.

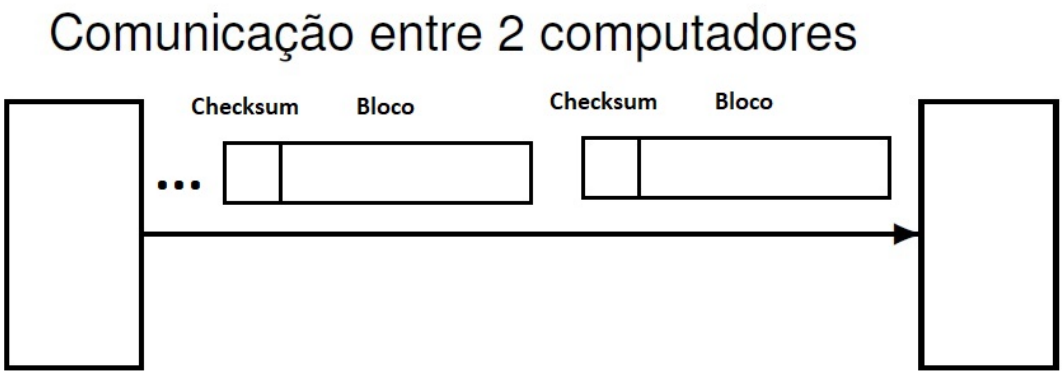


Paridade deu par: OK? O método não detecta erro quando há um número par de bits errados.

Código de deteção de erro

- Uso de bit paridade para detectar erro é um método simples.
- É usado em fitas magnéticas. A cada bloco de dados, um bit paridade é gravado.
- Na leitura, ao detectar um erro de paridade, o bloco de dados precisa ser lido de novo.

Erros de transmissão entre 2 computadores



- Um esquema semelhante é usado em comunicação de dados entre 2 computadores.
- Os dados são organizados em blocos. Depois de cada bloco é introduzido um *checksum* que é função dos dados do bloco.
- Para cada bloco recebido, é recalculado o *checksum* usando a mesma função.
- O *checksum* calculado é comparado com o *checksum* recebido. Se diferente, então o bloco deve ser retransmitido.

Dígitos de verificação do número CPF

- Um outro exemplo de código de deteção é o uso de dígitos de verificação em um número CPF.
- Seja o número CPF 123456789-$d_1 d_2$.
- Os dígitos d_1 e d_2 são calculados em função dos nove dígitos iniciais.
- Vejamos como obter d_1 e d_2.

Dígito de verificação d_1 do número CPF

Seja o número CPF 123456789-$d_1 d_2$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Soma
x	x	x	x	x	x	x	x	x	
10	9	8	7	6	5	4	3	2	
10	+ 18	+ 24	+ 28	+ 30	+ 30	+ 28	+ 24	+ 18	= 210

- Calculamos resto1 = Soma mod 11, i.e. resto da divisão da Soma por 11.
- Caso esse resto1 é 0 ou 1, então $d_1 = 0$.
- Caso contrário $d_1 = 11 -$ resto1.
- No caso, resto1 = 210 mod 11 = 1. Então $d_1 = 0$.

Dígito de verificação d_2 do número CPF

Obtivemos até agora 123456789-0 d_2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	Soma
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	
11	+ 20	+ 27	+ 32	+ 35	+ 36	+ 35	+ 32	+ 27	+ 0	= 255

- Calculamos resto2 = Soma mod 11, i.e. resto da divisão da Soma por 11.
- Caso esse resto2 é 0 ou 1, então $d_2 = 0$.
- Caso contrário $d_2 = 11 -$ resto2.
- No caso, resto2 = 255 mod 11 = 2. Então $d_2 = 11 - resto2 = 11 - 2 = 9$.
- O CPF final é 123456789-09.

Dígito de verificação do número CPF

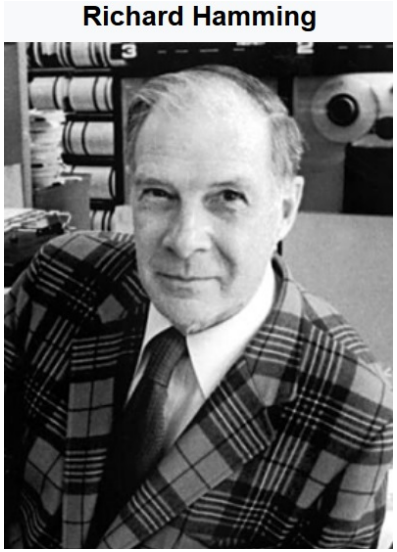
- O número correto do CPF é 123456789-09.
- Suponha que alguém ao digitar esse CPF, inverteu dois algarismos.
  213456789-09.
- Usando os nove dígitos iniciais, calculam-se d_1 e d_2.
- Iremos obter $d_1 = 9 \neq 0$ e $d_2 = 1 \neq 9$.
- Detectado o erro, o CPF deve ser digitado de novo.

Como foi o meu aprendizado?

Vamos fazer um exercício juntos.

- O método de usar um bit de paridade sempre funciona? Isto é, o método sempre detecta quando há bits errados?
- Se a sua resposta é não, então em que situação o método funciona? E em que situação o método não funciona?

Código de correção de erro - código de Hamming

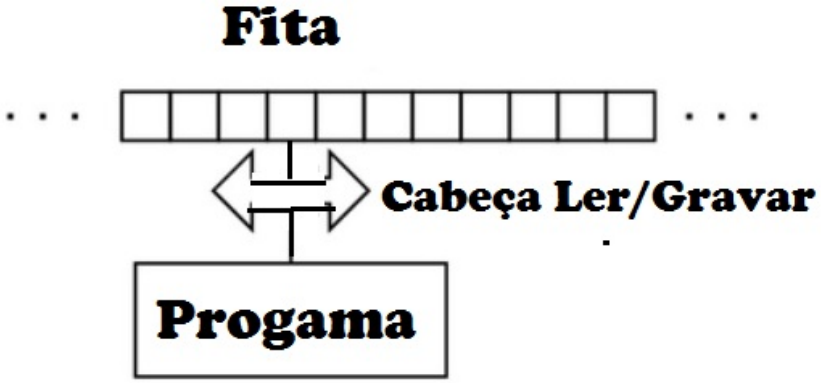


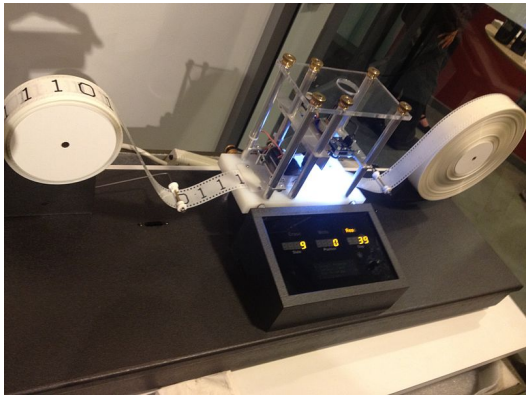
Source: Wikipedia

Hamming queria fazer Engenharia, mas não tinha recursos. Acabou fazendo Matemática pois conseguiu uma bolsa na Universidade de Chicago, onde não havia curso de engenharia. Fez depois mestrado e doutorado em Matemática. Trabalhou na Bell Labs e inventou o famoso código de Hamming. Não se arrependeu de ter feito Matemática, pois o profundo conhecimento teórico o ajudou a resolver um problema de pesquisa de vanguarda: se o computador sabe detectar um erro de memória, por que não pode corrigi-lo? Hamming recebeu o Turing Award em 1968.

Turing Award - em homenagem a Alan Turing

Source: Wikipedia





- Alan Mathison Turing (1912 - 1954)
- Inglês, matemático, cientista da computação, cripto-analista. Considerado fundador da Teoria da Computação.
- Máquina de Turing, Computabilidade, Indecibilidade (Problema da Parada)
- Turing Award: prêmio anual criado em 1966, considerado o Prêmio Nobel da Computação. Em 2014, o prêmio aumentou para US$ 1 milhão.

Código de correção de erro - código de Hamming

- O código de deteção pode detectar erro, mas não se sabe qual bit está erro. O dado precisa ser lido de novo ou retransmitido no caso de transmissão de dados.
- O código de Hamming é um código de correção que sabe qual bit errado, quando há apenas 1 bit errado. Assim é possível corrigi-lo.
- É usado para corrigir erro de leitura da memória. Também é usado em SSD (*Solid State drive*) ou *Flash Memory*.
- Para erros de disco RAID, é usado um código de Hamming estendido que é capaz de corrigir erro de 1 bit e detecção de erros em 2 bits.
- Veremos como usar o código de Hamming para erros em comunicação de dados entre computadores.

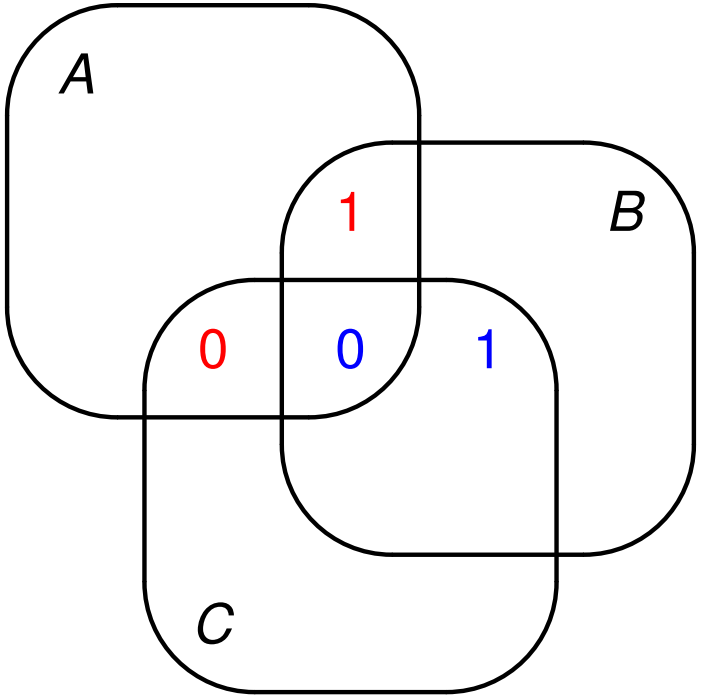
Código de correção de erro - código de Hamming

Vamos começar com um exemplo simples.

Seja uma palavra original de $M = 4$ bits. Vamos acrescentar nesse caso mais $K = 3$ bits adicionais.

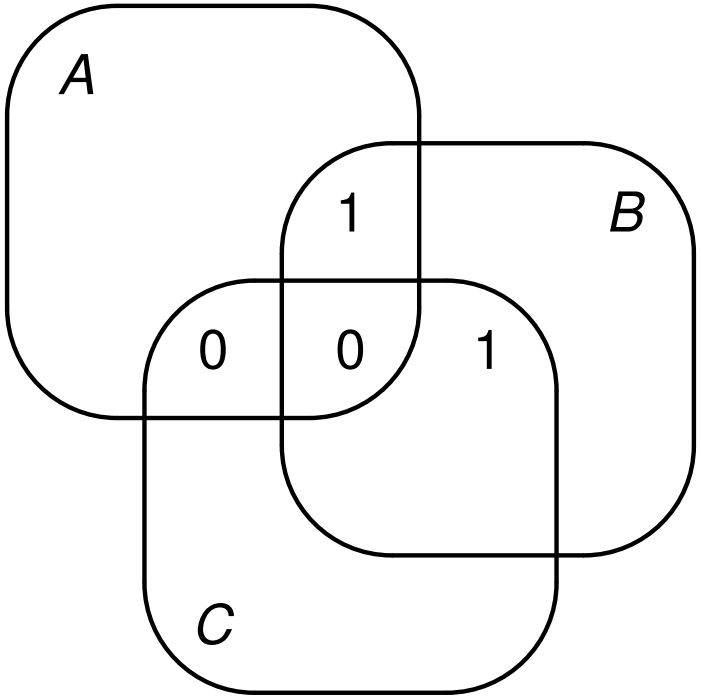
Nos próximos slides, ilustramos o método com diagrama apenas para fim didático, no caso específico de palavra de 4 bits. O método com diagrama não serve para o caso geral em que a palavra possui mais bits. Mostramos como tratar do caso geral mais tarde.

Palavra de $M = 4$ bits e $K = 3$ bits adicionais



- Seja a palavra dada 1010. Vamos colocar esses bits na figura acima assim:
- $1 = (A \cap B - C)$ $\quad 0 = (A \cap C - B)$
  $1 = (B \cap C - A)$ $\quad 0 = (A \cap B \cap C)$

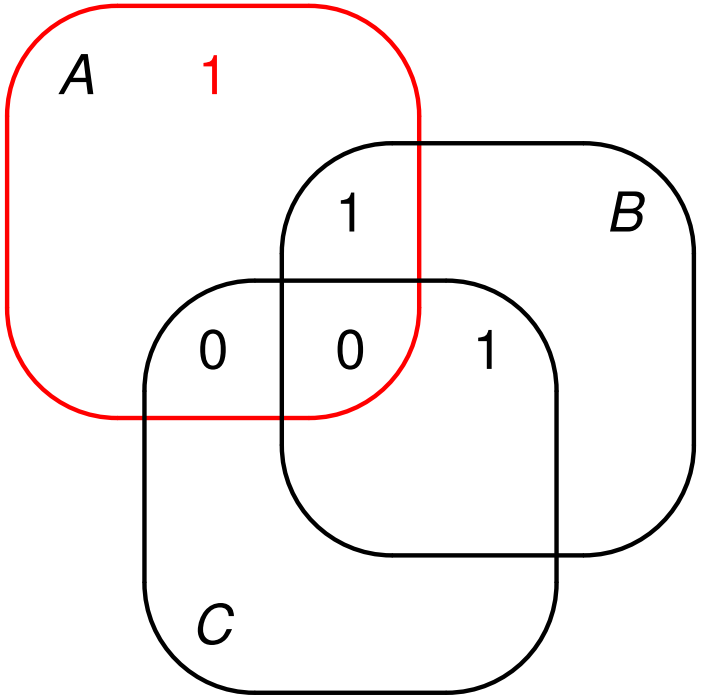
Como obter os $K = 3$ bits adicionais



- Vamos acrescentar um bit de paridade em cada uma das 3 regiões vazias acima para dar paridade par em A, B, e C.
- Os 7 bits (4 da palavra original e 3 adicionais) vão formar o código de Hamming. Vejamos.

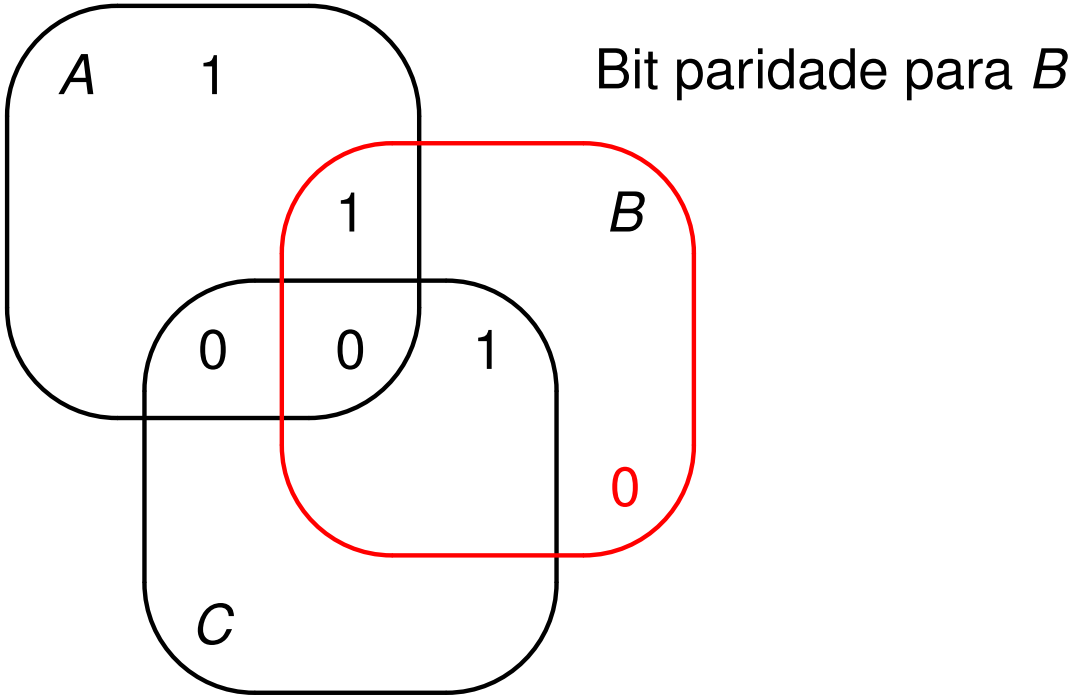
Como obter os $K = 3$ bits adicionais

Bit paridade para A



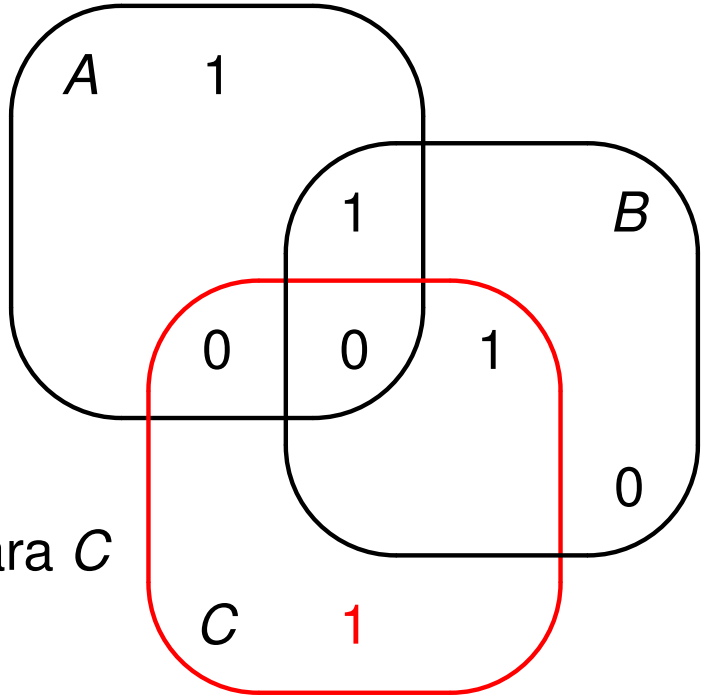
- Acrescentamos um bit de paridade em cada uma das 3 regiões vazias acima para dar paridade par em A, B, e C.
- Os 7 bits (4 da palavra original e 3 adicionais) formam o código de Hamming.

Como obter os $K = 3$ bits adicionais



- Acrescentamos um bit de paridade em cada uma das 3 regiões vazias acima para dar paridade par em A, B, e C.
- Os 7 bits (4 da palavra original e 3 adicionais) formam o código de Hamming.

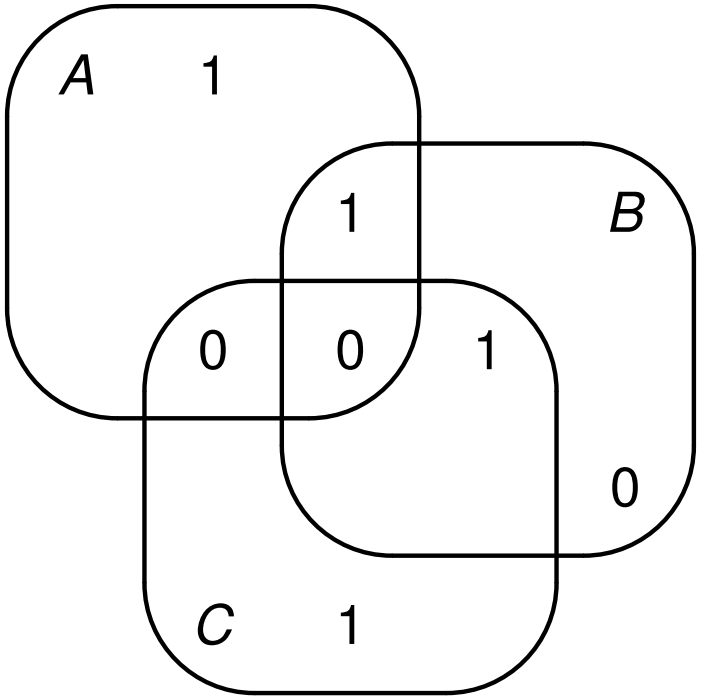
Como obter os $K = 3$ bits adicionais



Bit paridade para C

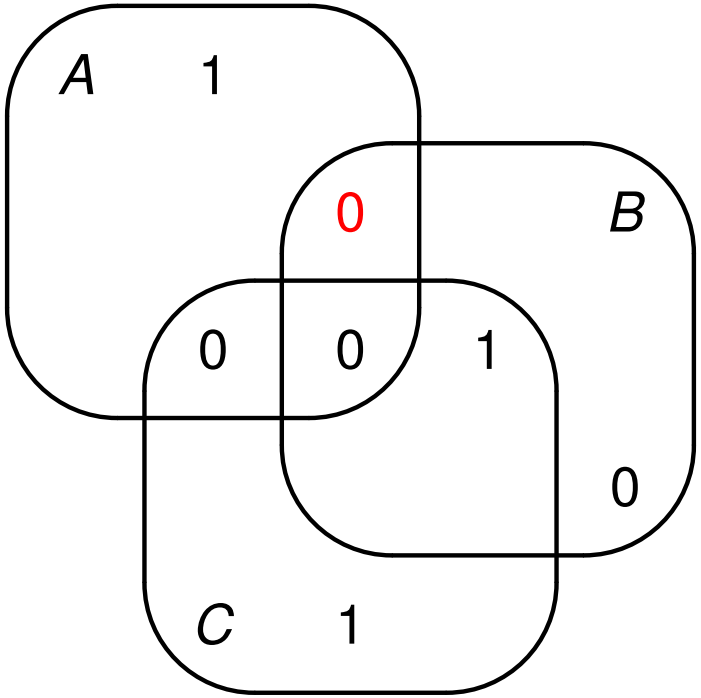
- Acrescentamos um bit de paridade em cada uma das 3 regiões vazias acima para dar paridade par em A, B, e C.
- Os 7 bits (4 da palavra original e 3 adicionais) formam o código de Hamming.

Como obter os $K = 3$ bits adicionais



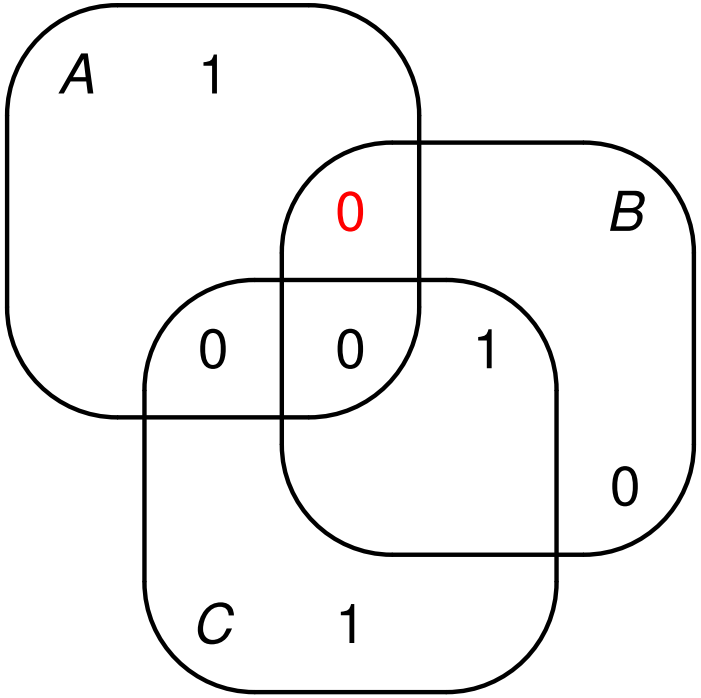
- O código de Hamming obtido (com $M + K$ bits) é gravado na memória.
- Vamos ler esse código e supor que no máximo um bit lido errado. Vamos mostrar como saber qual o bit lido errado.

Erro em 1 bit da palavra original



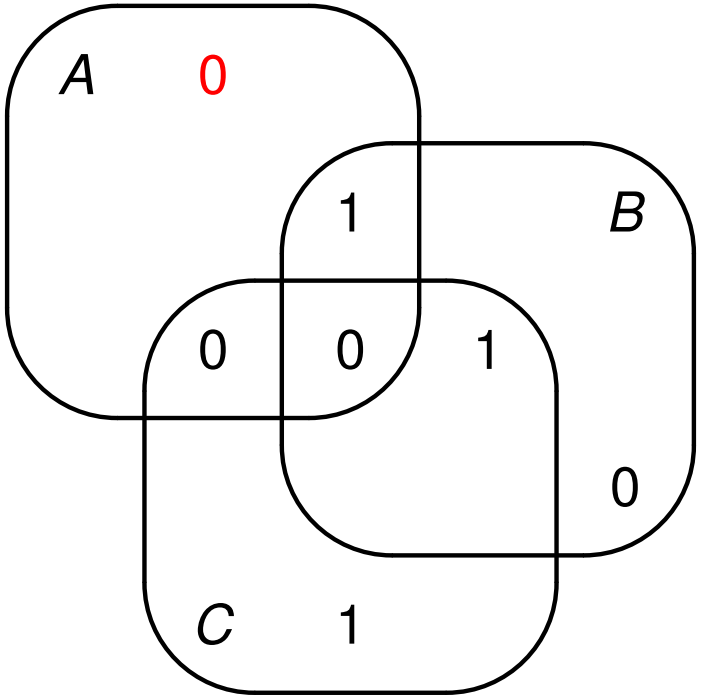
- Erro de 1 bit na palavra original pode ser localizado e corrigido.
- Tal erro pode ser detectado de modo simples, como se segue.

Erro em 1 bit da palavra original



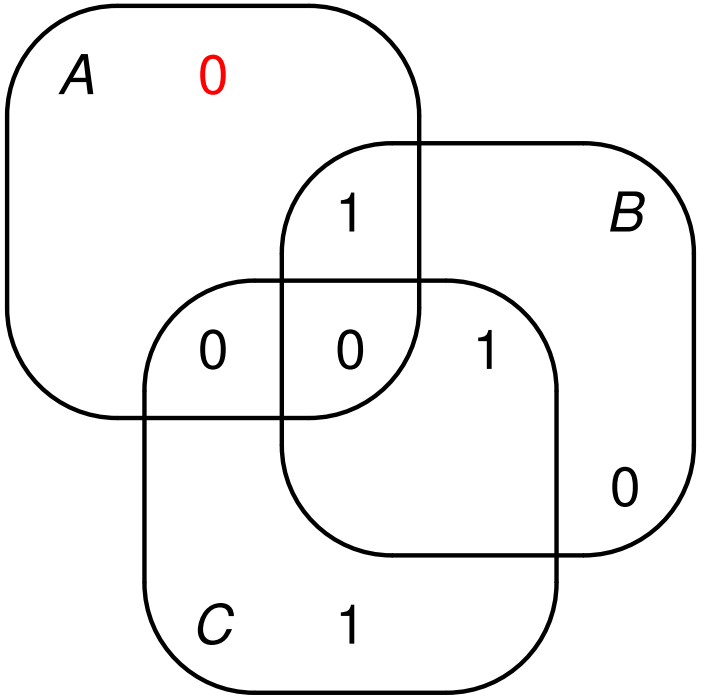
- ¨Região *A*: paridade errada. Região *B*: paridade errada. Região *C*: paridade OK.
- O bit errado está em *A* e em *B* mas não em *C*. Logo o bit errado é $A \cap B - C = 0$. .

Erro em 1 dos K bits adicionais



- Qualquer um dos 7 bits pode estar errado, por exemplo, o erro pode ser de um dos K bits adicionais.
- Tal erro pode ser detectado e corrigido como no caso anterior, como se segue.

Erro em 1 dos K bits adicionais

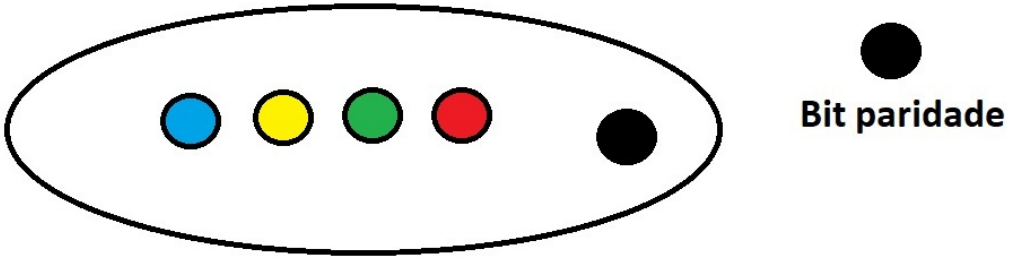


- Região A: paridade errada. Região B: paridade OK. Região C: paridade OK.
- O bit errado está em A mas não está em B nem em C. Logo o bit errado é $A - B - C = 0$.

Explicação: como funciona o código de Hamming?

Supomos que após a leitura do código de Hamming, apenas um bit pode estar errado.

Não consideramos erros de 2 ou mais bits.



Para os M bits originais, se usamos um bit paridade:

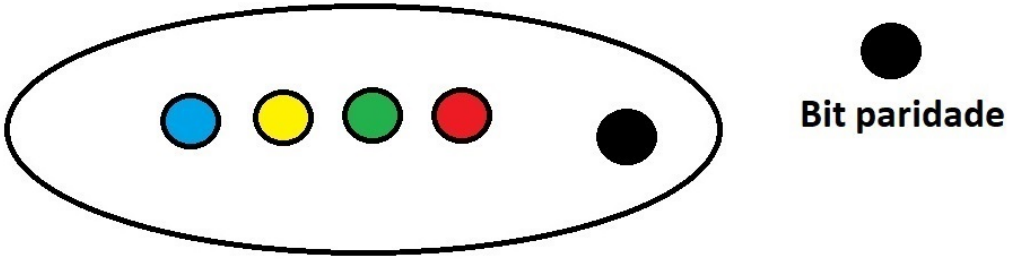
Na leitura, se dá erro de paridade: não sabemos qual bit está errado.

Um deles é o culpado

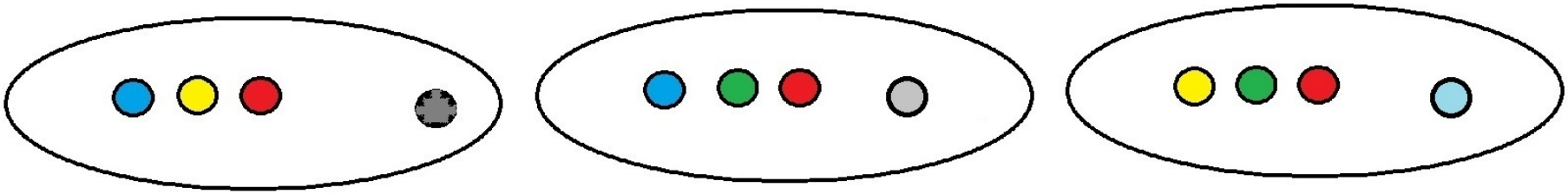
Explicação: como funciona o código de Hamming?

Supomos que após a leitura do código de Hamming, apenas um bit pode estar errado.

Não consideramos erros de 2 ou mais bits.



Formamos K subconjuntos: para cada subconjunto calculamos um bit paridade

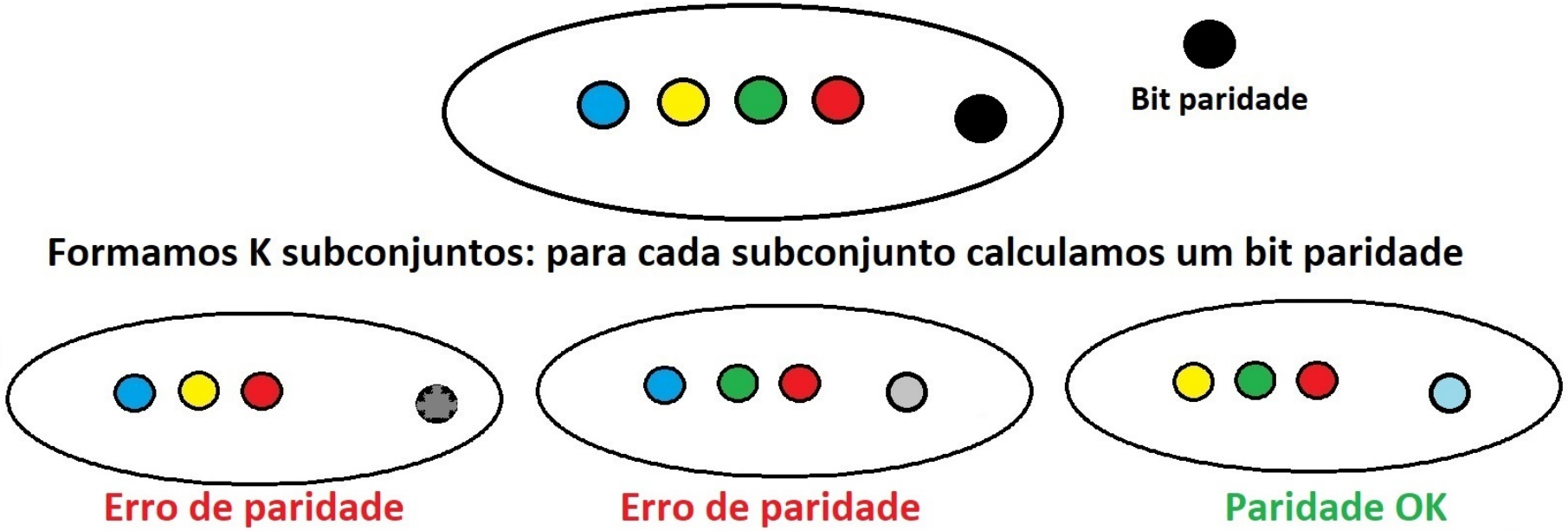


Após a leitura, vamos verificar se há erro de paridade em cada um dos subconjuntos

Explicação: como funciona o código de Hamming?

Supomos que após a leitura do código de Hamming, apenas um bit pode estar errado.

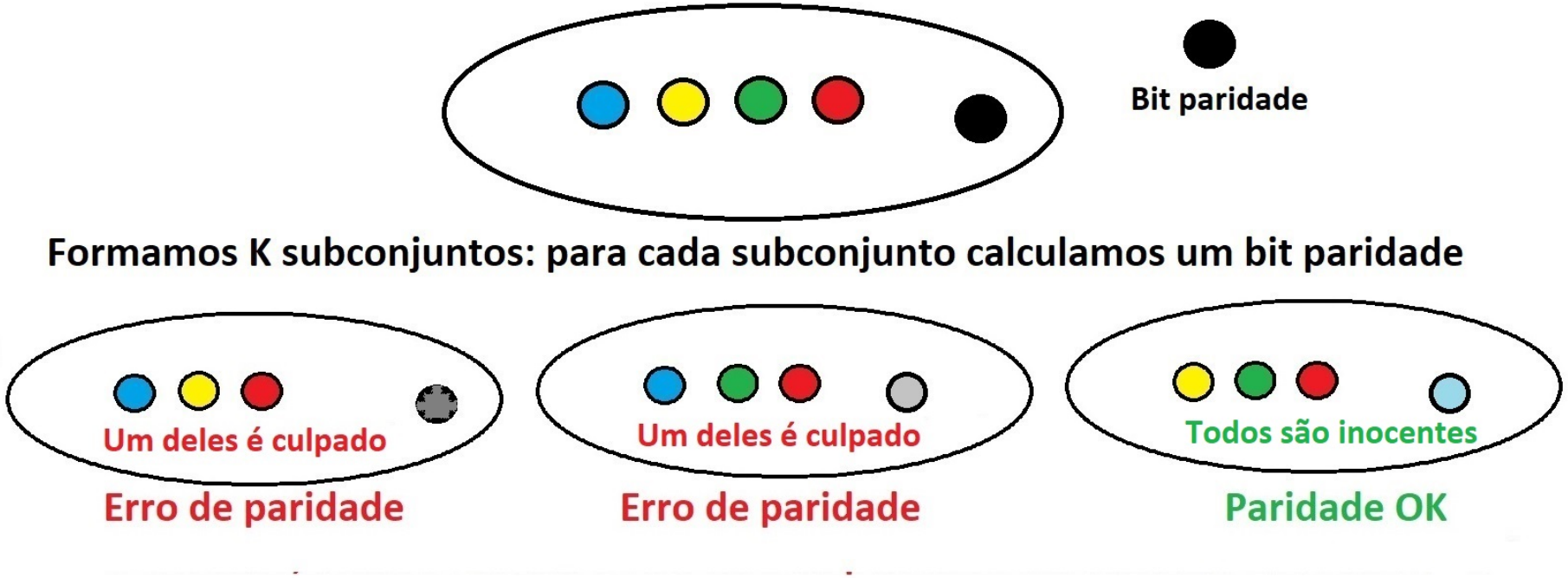
Não consideramos erros de 2 ou mais bits.



Explicação: como funciona o código de Hamming?

Supomos que após a leitura do código de Hamming, apenas um bit pode estar errado.

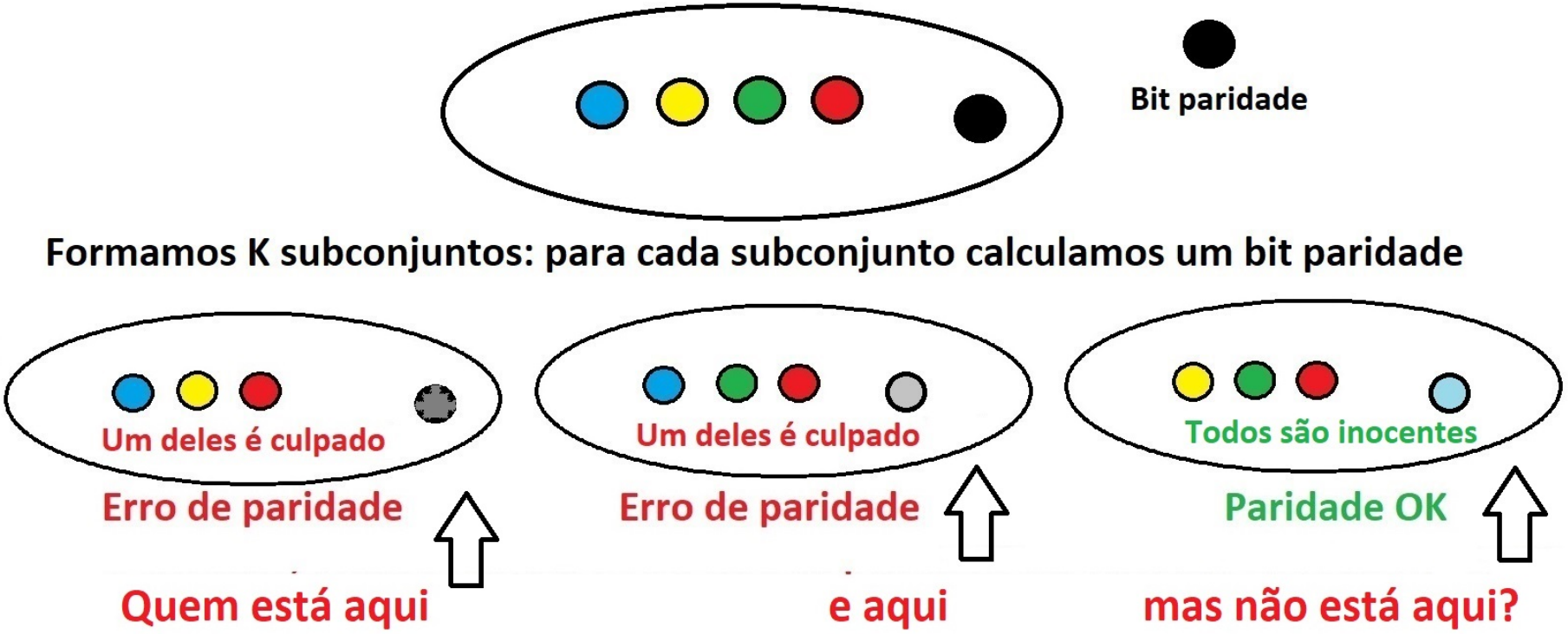
Não consideramos erros de 2 ou mais bits.



Explicação: como funciona o código de Hamming?

Supomos que após a leitura do código de Hamming, apenas um bit pode estar errado.

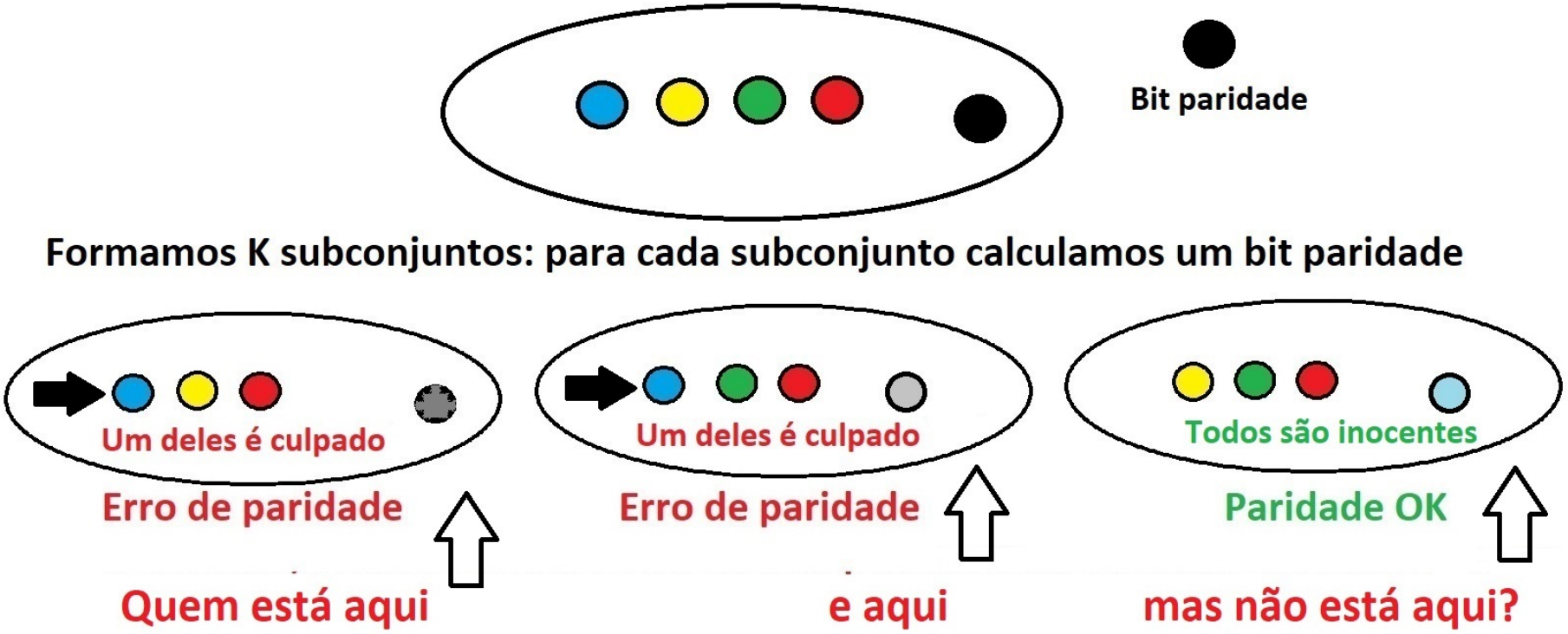
Não consideramos erros de 2 ou mais bits.



Explicação: como funciona o código de Hamming?

Supomos que após a leitura do código de Hamming, apenas um bit pode estar errado.

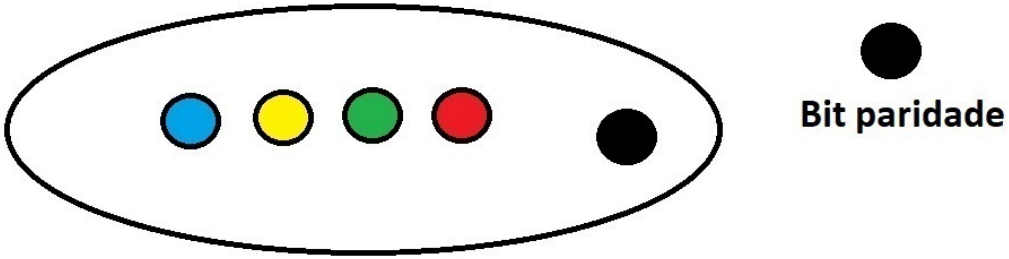
Não consideramos erros de 2 ou mais bits.



Explicação: como funciona o código de Hamming?

Supomos que após a leitura do código de Hamming, apenas um bit pode estar errado.

Não consideramos erros de 2 ou mais bits.



Formamos K subconjuntos: para cada subconjunto calculamos um bit paridade

Veremos:

Quanto vale K para dado M?

Como formar os K subconjuntos?

Como formalizar tudo?

Uma palavra de M bits precisa de K bits adicionais

- Para o caso geral de uma palavra de M bits, quantos bits adicionais são necessários? Isto é:
  Dado M, quanto vale K?
- Suponha que o código de Hamming lido (de $M + K$ bits) pode ou estar correto ou errado em no máximo 1 bit. Não consideramos erros em mais de um bit. O código de Hamming não funciona para este caso.
- Depois de lido o código de Hamming, calculamos K paridades.
  - Se 0 paridade está errada: a palavra está correta.
  - Se 1 ou mais paridades erradas: um dos $M + K$ bits foi lido errado.

Uma palavra de *M* bits precisa de *K* bits adicionais

Calculadas *K* paridades, cada uma pode estar correta ou errada.

0 significa paridade correta

1 significa paridade errada

K Paridades

1	2	3	4	. . .	K-2	K-1	K
0	0	0	0		0	0	0
0	0	0	0		0	0	1
0	0	0	0		0	1	0
0	0	0	0		0	1	1
0	0	0	0		1	0	0
0	0	0	0		1	0	1
0	0	0	0		1	1	0
0	0	0	0		1	1	1
				.			
				.			
				.			
1	1	1	1		1	1	1

Uma palavra de *M* bits precisa de *K* bits adicionais

Calculadas *K* paridades, cada uma pode estar correta ou errada.

K Paridades

1	2	3	4	. . .	K-2	K-1	K
0	0	0	0		0	0	0
0	0	0	0		0	0	1
0	0	0	0		0	1	0
0	0	0	0		0	1	1
0	0	0	0		1	0	0
0	0	0	0		1	0	1
0	0	0	0		1	1	0
0	0	0	0		1	1	1
				.			
				.			
				.			
1	1	1	1		1	1	1

0 significa paridade correta

1 significa paridade errada

$\Downarrow$

2^k possiblildades

Uma palavra de *M* bits precisa de *K* bits adicionais

Calculadas *K* paridades, cada uma podendo estar correta ou errada.

K Paridades

1	2	3	4	. . .	K-2	K-1	K
0	0	0	0		0	0	0
0	0	0	0		0	0	1
0	0	0	0		0	1	0
0	0	0	0		0	1	1
0	0	0	0		1	0	0
0	0	0	0		1	0	1
0	0	0	0		1	1	0
0	0	0	0		1	1	1
				.			
				.			
				.			
1	1	1	1		1	1	1

0 significa paridade correta

1 significa paridade errada

2^k **possiblildades**

Sem erro: 1 possibilidade

Com erro:

$2^k - 1$ **possibilidades**

Uma palavra de *M* bits precisa de *K* bits adicionais

Calculadas *K* paridades, cada uma podendo estar correta ou errada.

K Paridades

1	2	3	4	. . .	K-2	K-1	K
0	0	0	0		0	0	0
0	0	0	0		0	0	1
0	0	0	0		0	1	0
0	0	0	0		0	1	1
0	0	0	0		1	0	0
0	0	0	0		1	0	1
0	0	0	0		1	1	0
0	0	0	0		1	1	1
				.			
				.			
				.			
1	1	1	1		1	1	1

0 significa paridade correta

1 significa paridade errada

2^k **possiblildades**

Sem erro: 1 possibilidade

Com erro:

$2^k - 1$ **possibilidades**

O erro pode estar em um dos M + K bits.

Portanto:

$$2^k - 1 \geq M + K$$

Uma palavra de M bits precisa de K bits adicionais

- Devemos ter: $2^K - 1 \geq M + K$.
- Portanto K deve ser tal que $2^K - 1 - K \geq M$.
- Então dado M, como calculamos K?
  - Dado M, obtemos o menor K que satisfaz $2^K - 1 - K \geq M$.
  - Exemplo: para $M = 4$, obtemos o menor $K = 3$ e temos $2^3 - 1 - 3 = 4 \geq 4$.
  - Exemplo: para $M = 8$, obtemos o menor $K = 4$ e temos $2^4 - 1 - 4 = 11 \geq 8$.

Caso geral: palavra de M bits

Seja uma palavra dada de M bits. O código de Hamming precisa de K bits adicionais, com a condição: $2^K - 1 - K \geq M$.

Palavra de M bits	Exemplo $M = 2^s$	K bits adicionais
1		2
2 até 4	4	3
5 até 11	8	4
12 até 26	16	5
27 até 57	32	6
58 até 120	64	7
121 até 247	128	8

- Temos $2^K \geq M + 1 + K > M$.
  Para $M = 2^s$, $2^K > M$ ou $2^K > 2^s$.
  Assim temos $K > s$.
  Podemos fazer $K = s + 1 = \log M + 1$.
- Para M grande, o *overhead* é menor. Mas lembre-se que o código só funciona para erro de um só bit no código.

Código de Hamming para palavra de $M = 8$ bits

Vamos ver como calcular o código de Hamming para uma palavra de $M = 8$ bits. Numere os bits de

$$m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_6 m_7 m_8$$

A essa palavra de 8 bits vamos acrescentar 4 bits adicionais, formando o código de Hamming de 12 bits.
Numere os bits do código de Hamming como sendo:

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12}$$

Inserir os M bits originais no código de Hamming

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \text{a determinar} \\
x_2 &= \text{a determinar} \\
x_3 &= m_1 \\
x_4 &= \text{a determinar} \\
x_5 &= m_2 \\
x_6 &= m_3 \\
x_7 &= m_4 \\
x_8 &= \text{a determinar} \\
x_9 &= m_5 \\
x_{10} &= m_6 \\
x_{11} &= m_7 \\
x_{12} &= m_8
\end{aligned}
$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
?	?	m_1	?	m_2	m_3	m_4	?	m_5	m_6	m_7	m_8

Falta obter x_1, x_2, x_4, x_8: note índices todos potências de 2.

Obtenção dos bits adicionais

Os 4 bits adicionais x_1, x_2, x_4 e x_8 são assim calculados, onde $\oplus$ representa a operação *ou-exclusivo*:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{11} \\
x_2 &= x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \\
x_4 &= x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{12} \\
x_8 &= x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \oplus x_{12}
\end{aligned}
$$

Observe que a operação ou-exclusivo é equivalente à paridade par.

Explicação

Considere o conjunto dos 12 bits:

$$\{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12}\}$$

A ideia é

- Primeiro escolhemos vários subconjuntos desse conjunto de bits
- Vamos exigir que a paridade seja par para cada um desses subconjuntos
- Ao invés de um bit paridade, teremos vários bits de paridade. Isso será útil conforme veremos mais tarde.

Vejamos como escolher esses subconjuntos.

Explicação

Considere o conjunto dos 12 bits: $\{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12}\}$

Escrevemos os números 0 a 12 em binário:

0 a 12 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0

São 4 colunas na tabela. Vamos ter 4 subconjuntos. Vejamos como obter o primeiro subconjunto.

Explicação

Considere o conjunto dos 12 bits: $\{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12}\}$

Escrevemos os números 0 a 12 em binário:

0 a 12 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0

O primeiro subconjunto é (olhe a cor vermelha):
$\{x_1 x_3 x_5 x_7 x_9 x_{11}\}$

Explicação

Considere o conjunto dos 12 bits: $\{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12}\}$

Escrevemos os números 0 a 12 em binário:

0 a 12 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0

Para $\{x_1 x_3 x_5 x_7 x_9 x_{11}\}$ ter paridade par, basta fazer

$x_1 = x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{11}$

Explicação

Temos assim uma regra simples para calcular x_1, x_2, x_4 e x_8

Veremos nos próximos slides.

Uma regra simples para chegar às fórmulas

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{11} \\
x_2 &= x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \\
x_4 &= x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{12} \\
x_8 &= x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \oplus x_{12}
\end{aligned}
$$

0 a 12 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0

Uma regra simples para chegar às fórmulas

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{11} \\
x_2 &= x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \\
x_4 &= x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{12} \\
x_8 &= x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \oplus x_{12}
\end{aligned}
$$

0 a 12 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0

Uma regra simples para chegar às fórmulas

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{11} \\
x_2 &= x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \\
x_4 &= x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{12} \\
x_8 &= x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \oplus x_{12}
\end{aligned}
$$

0 a 12 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0

Uma regra simples para chegar às fórmulas

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{11} \\
x_2 &= x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \\
x_4 &= x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{12} \\
x_8 &= x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \oplus x_{12}
\end{aligned}
$$

0 a 12 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0

Uma regra simples para chegar às fórmulas

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{11} \\
x_2 &= x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \\
x_4 &= x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{12} \\
x_8 &= x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \oplus x_{12}
\end{aligned}
$$

0 a 12 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0

Correção de erro

O código de Hamming calculado é gravado na memória:

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12}$$

Agora suponha que esses 12 bits são lidos como sendo:

$$y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 y_7 y_8 y_9 y_{10} y_{11} y_{12}$$

Se não houver erro, então cada y_i é igual seu respectivo x_i.

Se houver erro em um bit apenas, é possível detectar esse erro e corrigi-lo.

Para isso fazemos o seguinte cálculo de 4 bits de paridade, denominados k_1, k_2, k_3 e k_4.

Correção de erro

$$
\begin{aligned}
k_1 &= y_1 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_7 \oplus y_9 \oplus y_{11} \\
k_2 &= y_2 \oplus y_3 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \\
k_3 &= y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{12} \\
k_4 &= y_8 \oplus y_9 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \oplus y_{12}
\end{aligned}
$$

Se $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, então não há erro.

Senão o bit y_i (onde i é o valor decimal de $k_4 k_3 k_2 k_1$) está errado. Mais tarde vamos mostrar o por quê.

Correção de erro

$$
\begin{aligned}
k_1 &= y_1 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_7 \oplus y_9 \oplus y_{11} \\
k_2 &= y_2 \oplus y_3 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \\
k_3 &= y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{12} \\
k_4 &= y_8 \oplus y_9 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \oplus y_{12}
\end{aligned}
$$

Exemplo, se $k_4 k_3 k_2 k_1 = 0111$ entao o bit y_7 está errado.

Correção de erro

De onde vieram essas fórmulas?

$$
\begin{aligned}
k_1 &= y_1 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_7 \oplus y_9 \oplus y_{11} \\
k_2 &= y_2 \oplus y_3 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \\
k_3 &= y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{12} \\
k_4 &= y_8 \oplus y_9 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \oplus y_{12}
\end{aligned}
$$

0 a 12 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0

Correção de erro

De onde vieram essas fórmulas?

$$
\begin{aligned}
k_1 &= y_1 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_7 \oplus y_9 \oplus y_{11} \\
k_2 &= y_2 \oplus y_3 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \\
k_3 &= y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{12} \\
k_4 &= y_8 \oplus y_9 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \oplus y_{12}
\end{aligned}
$$

0 a 12 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0

Correção de erro

De onde vieram essas fórmulas?

$$
\begin{aligned}
k_1 &= y_1 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_7 \oplus y_9 \oplus y_{11} \\
k_2 &= y_2 \oplus y_3 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \\
k_3 &= y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{12} \\
k_4 &= y_8 \oplus y_9 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \oplus y_{12}
\end{aligned}
$$

0 a 12 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0

Correção de erro

De onde vieram essas fórmulas?

$$
\begin{aligned}
k_1 &= y_1 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_7 \oplus y_9 \oplus y_{11} \\
k_2 &= y_2 \oplus y_3 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \\
k_3 &= y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{12} \\
k_4 &= y_8 \oplus y_9 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \oplus y_{12}
\end{aligned}
$$

0 a 12 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0

Correção de erro

Suponha ao ler um código de Hamming, os seguintes bits foram lidos. (Supomos apenas um bit pode estar errado.)

$$y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 y_7 y_8 y_9 y_{10} y_{11} y_{12}$$

Calculamos os 4 bits de paridade k_1, k_2, k_3, k_4 pelas fórmulas vistas:

$$\begin{aligned}
k_1 &= y_1 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_7 \oplus y_9 \oplus y_{11} \\
k_2 &= y_2 \oplus y_3 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \\
k_3 &= y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{12} \\
k_4 &= y_8 \oplus y_9 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \oplus y_{12}
\end{aligned}$$

Suponha $k_4 k_3 k_2 k_1 = 0111$ **entao o bit y_7 está errado**. Por quê?

- $k_1 = 1$ significa que o bit errado está no conjunto $A = \{y_1, y_3, y_5, y_7, y_9, y_{11}\}$
- $k_2 = 1$ significa que o bit errado está no conjunto $B = \{y_2, y_3, y_6, y_7, y_{10}, y_{11}\}$
- $k_3 = 1$ significa que o bit errado está no conjunto $C = \{y_4, y_5, y_6, y_7, y_{12}\}$
- $k_4 = 0$ significa que o bit errado não está no conjunto $D = \{y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}\}$
- O bit errado portanto está em $A \cap B \cap C - D$. Portanto em $\{y_7\}$

Correção de erro

Nos próximos slides vamos explicar:

> *Se* $k_4k_3k_2k_1 = 0111$ **entao o bit** y_7 **está errado**. *Por quê?*

O que se segue não faz parte da etapa para descobrir o bit errado, mas tão somente uma explicação sobre o método.

Correção de erro

Seja $k_4k_3k_2k_1 = 0111$.

- O bit errado está no conjunto $A = \{y_1, y_3, y_5, y_7, y_9, y_{11}\}$
- O bit errado também está no conjunto $B = \{y_2, y_3, y_6, y_7, y_{10}, y_{11}\}$
- O bit errado também está no conjunto $C = \{y_4, y_5, y_6, y_7, y_{12}\}$
- E o bit errado não está no conjunto $D = \{y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}\}$
- O bit errado portanto está em $A \cap B \cap C - D$. Vamos calcular isso.

	A	$\cap$	B	$\cap$	C	-	D	8	4	2	1
0								0	0	0	0
1								0	0	0	1
2								0	0	1	0
3								0	0	1	1
4								0	1	0	0
5								0	1	0	1
6								0	1	1	0
7								0	1	1	1
8								1	0	0	0
9								1	0	0	1
10								1	0	1	0
11								1	0	1	1
12								1	1	0	0

Correção de erro

Seja $k_4k_3k_2k_1 = 0111$.

- O bit errado **está** no conjunto $A = \{y_1, y_3, y_5, y_7, y_9, y_{11}\}$
- O bit errado também está no conjunto $B = \{y_2, y_3, y_6, y_7, y_{10}, y_{11}\}$
- O bit errado também está no conjunto $C = \{y_4, y_5, y_6, y_7, y_{12}\}$
- E o bit errado não está no conjunto $D = \{y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}\}$
- O bit errado portanto está em $A \cap B \cap C - D$. Vamos calcular isso.

	A	$\cap$	B	$\cap$	C	-	D	8	4	2	1
0								0	0	0	0
1	1							0	0	0	1
2								0	0	1	0
3	3							0	0	1	1
4								0	1	0	0
5	5							0	1	0	1
6								0	1	1	0
7	7							0	1	1	1
8								1	0	0	0
9	9							1	0	0	1
10								1	0	1	0
11	11							1	0	1	1
12								1	1	0	0

Correção de erro

Seja $k_4k_3k_2k_1 = 0111$.

- O bit errado está no conjunto $A = \{y_1, y_3, y_5, y_7, y_9, y_{11}\}$
- O bit errado também **está** no conjunto $B = \{y_{\mathbf{2}}, y_{\mathbf{3}}, y_{\mathbf{6}}, y_{\mathbf{7}}, y_{\mathbf{10}}, y_{\mathbf{11}}\}$
- O bit errado também está no conjunto $C = \{y_4, y_5, y_6, y_7, y_{12}\}$
- E o bit errado não está no conjunto $D = \{y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}\}$
- O bit errado portanto está em $A \cap B \cap C - D$. Vamos calcular isso.

	A	$\cap$	B	$\cap$	C	-	D	8	4	2	1
0								0	0	0	0
1	1							0	0	0	1
2			2					0	0	1	0
3	3		3					0	0	1	1
4								0	1	0	0
5	5							0	1	0	1
6			6					0	1	1	0
7	7		7					0	1	1	1
8								1	0	0	0
9	9							1	0	0	1
10			10					1	0	1	0
11	11		11					1	0	1	1
12								1	1	0	0

Correção de erro

Seja $k_4k_3k_2k_1 = 0111$.

- O bit errado está no conjunto $A = \{y_1, y_3, y_5, y_7, y_9, y_{11}\}$
- O bit errado também está no conjunto $B = \{y_2, y_3, y_6, y_7, y_{10}, y_{11}\}$
- O bit errado também **está** no conjunto $C = \{y_4, y_5, y_6, y_7, y_{12}\}$
- E o bit errado não está no conjunto $D = \{y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}\}$
- O bit errado portanto está em $A \cap B \cap C - D$. Vamos calcular isso.

	A	$\cap$	B	$\cap$	C	-	D	8	4	2	1
0								0	0	0	0
1	1							0	0	0	1
2			2					0	0	1	0
3	3		3					0	0	1	1
4					4			0	1	0	0
5	5				5			0	1	0	1
6			6		6			0	1	1	0
7	7		7		7			0	1	1	1
8								1	0	0	0
9	9							1	0	0	1
10			10					1	0	1	0
11	11		11					1	0	1	1
12					12			1	1	0	0

Correção de erro

Seja $k_4k_3k_2k_1 = 0111$.

- O bit errado está no conjunto $A = \{y_1, y_3, y_5, y_7, y_9, y_{11}\}$
- O bit errado também está no conjunto $B = \{y_2, y_3, y_6, y_7, y_{10}, y_{11}\}$
- O bit errado também está no conjunto $C = \{y_4, y_5, y_6, y_7, y_{12}\}$
- E o bit errado **não está** no conjunto $D = \{y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}\}$
- O bit errado portanto está em $A \cap B \cap C - D$. Vamos calcular isso.

	A	$\cap$	B	$\cap$	C	-	D	8	4	2	1
0								0	0	0	0
1	1							0	0	0	1
2			2					0	0	1	0
3	3		3					0	0	1	1
4					4			0	1	0	0
5	5				5			0	1	0	1
6			6		6			0	1	1	0
7	**7**		**7**		**7**			0	1	1	1
8							8	1	0	0	0
9	9						9	1	0	0	1
10			10				10	1	0	1	0
11	11		11				11	1	0	1	1
12					12		12	1	1	0	0

Correção de erro

Seja $k_4k_3k_2k_1 = 0111$.

- O bit errado está no conjunto $A = \{y_1, y_3, y_5, y_7, y_9, y_{11}\}$
- O bit errado também está no conjunto $B = \{y_2, y_3, y_6, y_7, y_{10}, y_{11}\}$
- O bit errado também está no conjunto $C = \{y_4, y_5, y_6, y_7, y_{12}\}$
- E o bit errado não está no conjunto $D = \{y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}\}$
- O bit errado portanto está em $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C} - \mathbf{D}$. Portanto o bit errado é y_7.

	A	$\cap$	B	$\cap$	C	-	D	8	4	2	1
0								0	0	0	0
1								0	0	0	1
2								0	0	1	0
3								0	0	1	1
4								0	1	0	0
5								0	1	0	1
6								0	1	1	0
7	**7**		**7**		**7**			0	1	1	1
8								1	0	0	0
9								1	0	0	1
10								1	0	1	0
11								1	0	1	1
12								1	1	0	0

Correção de erro

Seja $k_4k_3k_2k_1 = 0111$ **Portanto BIT ERRADO: 7**.

- O bit errado está no conjunto $A = \{y_1, y_3, y_5, y_7, y_9, y_{11}\}$
- O bit errado também está no conjunto $B = \{y_2, y_3, y_6, y_7, y_{10}, y_{11}\}$
- O bit errado também está no conjunto $C = \{y_4, y_5, y_6, y_7, y_{12}\}$
- E o bit errado não está no conjunto $D = \{y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}\}$
- O bit errado portanto está em $A \cap B \cap C - D$.

	A	$\cap$	B	$\cap$	C	-	D	8	4	2	1
0								0	0	0	0
1								0	0	0	1
2								0	0	1	0
3								0	0	1	1
4								0	1	0	0
5								0	1	0	1
6								0	1	1	0
7								**0**	**1**	**1**	**1**
8								1	0	0	0
9								1	0	0	1
10								1	0	1	0
11								1	0	1	1
12								1	1	0	0

Correção de erro

Recapitulando: lido o código de Hamming, a verificação se há erro é assim:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= y_1 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_7 \oplus y_9 \oplus y_{11} \\
k_2 &= y_2 \oplus y_3 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \\
k_3 &= y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{12} \\
k_4 &= y_8 \oplus y_9 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \oplus y_{12}
\end{aligned}
$$

Exemplo, se $k_4 k_3 k_2 k_1 = 0111$ entao o bit y_7 está errado.

Não é necessário calcular $A \cap B \cap C - D$, que serve apenas para mostrar que o método funcina.

Lista de Exercícios 4

- Fazer e entregar por email a Lista de Exercícios 4.
- Há prazo para entrega. Recomendo não demorar muito. Bom fazer logo com a matéria fresquinha na cabeça.

Erro em mais de 1 bit

- O código de Hamming não funciona para erro em mais de um bit no código.
- Há uma extensão do método que permite corrigir erros de 1 bit e detectar erros de 2 bits (mas sem corrigi-los). Esse método usa um bit a mais, i.e. $K + 1$ bits adicionais. (Não vamos ver esse método aqui.)
- Em comunicação de dados, onde uma sequência longa de bits é transmitida de um local a outro, é comum uma série consecutiva de bits ser danificada.
- Veremos um truque que permite detectar e corrigir erros em uma sequência de bits.
- (Uau, que legal!, não posso perder essa dica! :-)

Como foi o meu aprendizado?

Vamos fazer um exercício juntos.

- Parte 1: Escolha um número M entre 5 a 11. Invente um número de M bits e escreva o código de Hamming.
- Parte 2: Agora erre um bit nesse código e use a técnica para corrigir o erro. (Obviamente não é para olhar a primeira parte para descobrir qual bit errado :-)

Continuamos esse exercício nos próximos slides.

Como foi o meu aprendizado?

Parte 1: Escolha um número M entre 5 a 11. Invente um número de M bits e escreva o código de Hamming.

- Por exemplo escolhemos $M = 7$ e seja o dado de 7 bits como sendo 1001110.
- Pela tabela vista anteriormente (slide no. 64), para 7 bits de dados precisamos acrescenter 4 bits adicionais.
- Mas podemos deduzir que precisamos de mais 4 bits, assim.
- Escrevemos uma linha com $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots$.
- Deixamos de lado os x_i onde i é potência de 2 (i.e. x_1, x_2, x_4, x_8, *etc.*) e preenchemos os bits do número dado.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
		1		0	0	1		1	1	0

- Notamos que precisamos usar x_1, x_2, x_4, x_8 e portanto 4 bits adicionais. Vamos agora calcular esses 4 bits.

Como foi o meu aprendizado?

Cálculo de x_1:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
?		1		0	0	1		1	1	0

0 a 11 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1

$$x_1 = x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{11} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

Como foi o meu aprendizado?

Cálculo de x_2:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
1	?	1		0	0	1		1	1	0

0 a 11 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1

$$x_2 = x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{10} \oplus x_{11} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

Como foi o meu aprendizado?

Cálculo de x_4:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
1	1	1	?	0	0	1		1	1	0

0 a 11 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1

$$x_4 = x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

Como foi o meu aprendizado?

Cálculo de x_8:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
1	1	1	1	0	0	1	?	1	1	0

0 a 11 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1

$$x_8 = x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11} = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

Como foi o meu aprendizado?

Resposta da Parte 1: o código de Hamming calculado foi:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0

Parte 2: Agora erre um bit nesse código e use a técnica para corrigir o erro.

Os bits lidos y_i são os seguintes. Note que o bit 7 foi lido erradamente.

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0

Vamos agora ver como detectamos e corrigimos o erro.

Como foi o meu aprendizado?

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0

Calculamos k_1:

0 a 11 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1

$$k_1 = y_1 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_7 \oplus y_9 \oplus y_{11} = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

Como foi o meu aprendizado?

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0

Calculamos k_2:

0 a 11 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1

$$k_2 = y_2 \oplus y_3 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{10} \oplus y_{11} = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

Como foi o meu aprendizado?

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0

Calculamos k_3:

0 a 11 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1

$$k_3 = y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

Como foi o meu aprendizado?

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0

Calculamos k_4:

0 a 11 em binário	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1

$$k_4 = y_8 \oplus y_9 \oplus y_{10} \oplus y_{11} = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

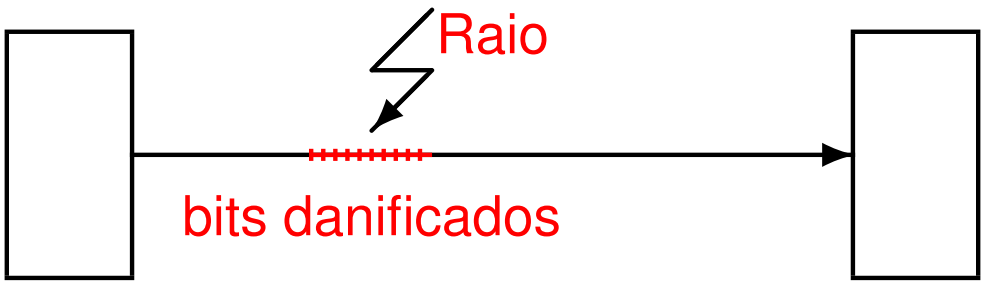
Como foi o meu aprendizado?

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0

Obtivemos $k_4k_3k_2k_1 = 0111$ (7 em decimal).

Portanto o bit y_7 está errado. Ao invés de 0 corrigimos para 1.

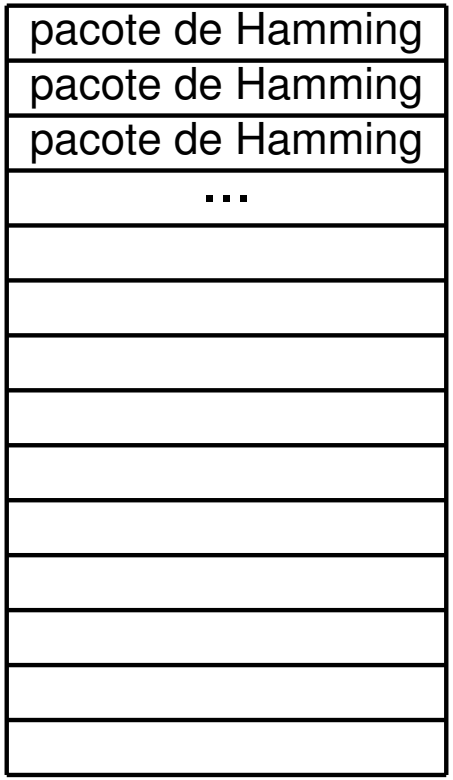
Erro em mais de 1 bit



Vamos ilustrar por um exemplo em comunicação de dados.

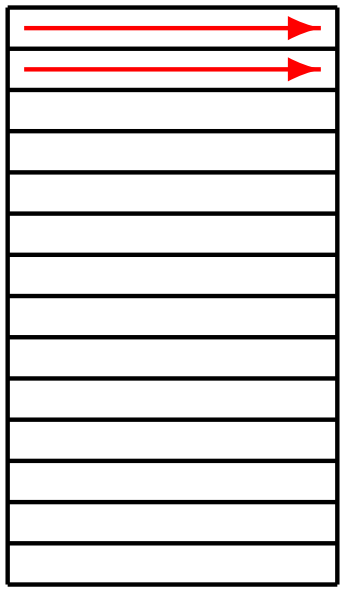
- Uma mensagem constituída de um número de pacotes (cada pacote tem M bits) deve ser enviada de um local a outro.
- O meio de transmissão é sujeito a chuvas e trovoadas :-) quando um raio pode danificar uma sequência de bits consecutivos.
- Não queremos apenas detectar erro de transmissão e pedir para retransmitir os pacotes errados. Queremos corrigir os erros.

Erro em mais de 1 bit



- Vamos acrescentar a cada pacote de M bits os K bits adicionais conforme estudamos no código de Hamming. Chamamos cada pacote assim incrementado de pacote de Hamming.
- Colocamos os pacotes de Hamming em uma matriz.

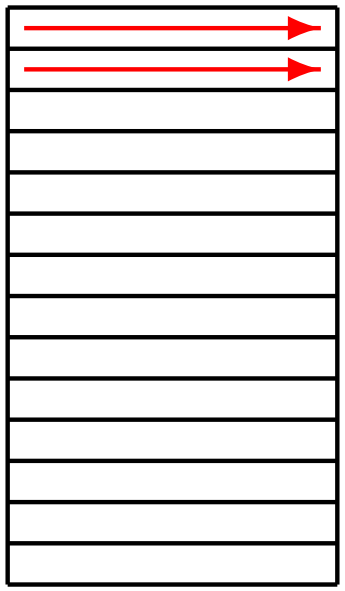
Erro em mais de 1 bit



- Se transmitirmos esses pacotes de Hamming sequencialmente, um a um, então o dano de um raio (que estraga uma série consecutiva de bits) pode ser irrecuperável. Nada adiantou :-(.

Agora vem a ideia brilhante :-).

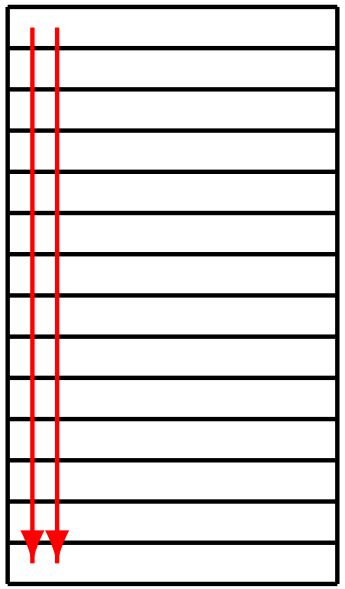
Erro em mais de 1 bit



- Se transmitirmos esses pacotes de Hamming sequencialmente, um a um, então o dano de um raio (que estraga uma série consecutiva de bits) pode ser irrecuperável. Nada adiantou :-(.

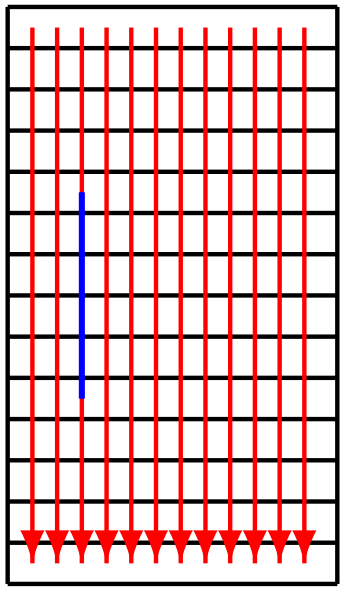
Agora vem a ideia brilhante :-).

A ideia brilhante



- Basta transmitirmos a matriz por coluna. No outro lado da recepção coletamos os bits recebidos para reconstruir a matriz.
- Agora aplicamos método de Hamming para cada pacote de Hamming recebido.

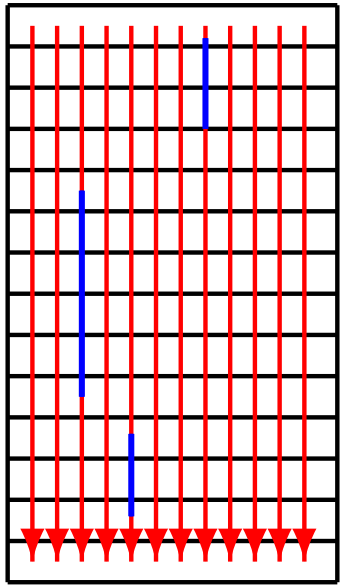
A idéia brilhante



Cor azul = bits danificados

- Basta transmitirmos a matriz por coluna. No outro lado da recepção coletamos os bits recebidos para reconstruir a matriz.
- Cada bit errado (bit azul na figura) está num pacote de Hamming. Por isso, podemos corrigi-los.

A idéia brilhante



Cor azul = bits danificados

- Basta transmitirmos a matriz por coluna. No outro lado da recepção coletamos os bits recebidos para reconstruir a matriz.
- Com sorte, pode até aguentar erros de várias sequências de bits. Basta não ter mais um erro em cada pacote.

Como foi o meu aprendizado?

Marque as afirmações corretas.

1. DRAM e SRAM são ambas voláteis, mas SRAM precisa de circuitaria de refrescamento para repor as cargas que se perdem por vazamento.
2. DRAM e SRAM são ambas não-voláteis e assim seu conteúdo não se perde mesmo sem energia elétrica.
3. DRAM e SRAM são ambas voláteis, mas DRAM precisa de circuitaria de refrescamento para repor as cargas que se perdem por vazamento.
4. A memória ROM é não-volátil mas EPROM é volátil.
5. Todos os tipos de memória ROM são não-voláteis.
6. A memória flash pode ser regravada mas somente pelo fabricante.
7. O número de ciclos de escrita numa memória flash é grande mas não é ilimitado.
8. O uso de um bit de paridade pode corrigir erros de memória quando há apenas um bit errado.
9. O código de Hamming serve para corrigir erros de memória quando há apenas um bit errado.

Como foi o meu aprendizado?

Desejo usar o código de Hamming para corrigir erro de memória.

Qual das duas alternativas está mais adequada?

- Devemos escolher M bem grande, digamos 2^{10}. Assim, nesse caso, usaremos apenas 11 bits adicionais, uma grande economia.
- Para proteger contra erro de leitura de um dado grande, digamos 2^{10} de bits, o melhor é dividir esse dado em blocos menores e para cada um deles usar o código de Hamming.

Próximo assunto: Memória externa

- Próximo assunto: Memória externa
- Disco magnético (HD), Discos RAID (Redundant Array of Independent Disks), SSD (*Solid State Disks*), etc.
- Não percam!