

## MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

### Lista de Exercícios sobre Interpolação e Integração

1: Sejam  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$  e  $x_3 = 3$ .

- (a) Determine os polinômios de Lagrange  $L_i(x)$  correspondentes a estes pontos e mostre que eles são dois a dois ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle \phi, \psi \rangle = \sum_{k=0}^3 \phi(x_k) \psi(x_k).$$

- (b) Encontre o polinômio de grau  $\leq 3$  que melhor aproxima a função  $f(x) = \sin(\pi x/2)$  segundo o produto interno dado. Qual o erro quadrático cometido? Surpreso?

2: Utilizando interpolação polinomial de grau  $\leq 3$  para a tabela abaixo, estime o valor de  $\sin(0.65)$ . Delimite o erro cometido em tal estimativa sem empregar o valor exato de  $\sin(0.65)$ .

$x_i$	0	0.5	0.75	1
$\sin x_i$	0	0.479	0.682	0.841

3: Considere a seguinte tabela de diferenças simples de uma certa função  $f$ .

$x_i$	$f(x_i)$	$\Delta^1$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$	$\Delta^5$	$\Delta^6$
-1.0	4						
		-3					
-0.5	1		10				
		...		-21			
0.0	8		-11		17		
		-4		-4		...	
0.5	...		...		...		...
		...		...		2	
1.0	...		-3		18		
		-22		...			
1.5	-37		...				
		...					
2.0	-32						

- (a) Preencha as lacunas da tabela.  
 (b) Determine o polinômio interpolador (de grau  $\leq 6$ ) na forma de Newton relativo à tabela inteira.  
 (c) Determine o polinômio de grau  $\leq 3$  que interpola  $f$  nos últimos 4 pontos da tabela.  
 (d) Sabendo que  $f(3) = -5$ , qual dos dois polinômios obtidos nas partes (b) e (c) é o que melhor aproxima  $f$  no ponto  $x = 3$ ?

4: (a) Utilizando a Fórmula de Simpson, calcule numericamente a integral definida

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} e^{\cos^2 t} dt,$$

a partir dos dados da seguinte tabela:

$t$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/3$
$f(t)$	$e^{1/4}$	$e^{3/4}$	$e$	$e^{3/4}$	$e^{1/4}$

onde  $e = 2.718282\dots$  e  $f(t) = e^{\cos^2 t}$ .

- (b) Delimite o erro cometido na integração numérica efetuada na parte (a), sabendo que no intervalo  $-\pi/3 \leq t \leq \pi/3$  temos  $|f^{(4)}(t)| \leq 20e$ .

5: Seja  $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$  e considere a tabela

$x$	0	1	2	3
$f(x)$	1	0	-1	0

- (a) Determine o polinômio interpolador  $p(x)$  da tabela na forma de Newton usando diferenças simples.  
 (b) Estime o erro da interpolação, ou seja, encontre uma cota superior para  $|f(x) - p(x)|$ ,  $x \in [0, 3]$ .

6: (a) Estime o valor da integral

$$\int_1^5 \log x \, dx$$

usando o método de Simpson e os pontos  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = 4$  e  $x_4 = 5$ .

- (b) Quantos pontos devemos levar em conta na integração por Simpson para que a diferença entre o valor aproximado e o valor exato da integral seja menor do que  $10^{-3}$ ? Justifique.

7: Considere a função  $F(x)$  dada por

$$F(x) = \int_0^x \sin(\cos y) \, dy.$$

Utilizando a fórmula de Simpson com uma repetição, calcule

$$S = \int_0^1 F(x) \, dx.$$

Para obter cada um dos valores de  $F$  necessários ao cálculo de  $S$ , utilize a fórmula dos trapézios com duas repetições. Estime os erros cometidos no cálculo desses valores.

8: Seja  $f(x) = \int_0^x e^{\cos y} \, dy$ .

- (a) Use o método de  $n$ -trapézios para calcular os valores  $f(1)$ ,  $f(2)$  e  $f(3)$  com erro menor que  $10^{-2}$  (justifique a escolha dos valores de  $n$ ).  
 (Dado: o erro na integração por  $n$  trapézios é limitado por  $\max_{x \in [a,b]} |f''(x)| (b-a)h^2/12$ .)  
 (b) Determine o polinômio interpolador (de grau menor ou igual a 3) de  $f$  nos pontos 0, 1, 2 e 3 (usando os valores calculados no item (a)).

9: Dados 4 pontos uniformemente espaçados  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  (onde  $x_{i+1} = x_i + h$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), determine coeficientes  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$  tal que para todo polinômio de grau menor ou igual a 3 tenhamos

$$p\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) = \sum_{i=1}^4 a_i p(x_i).$$

10: No cálculo de  $\int_a^b f(x) \, dx$  com o método de 1 trapézio obtemos o valor  $4/3$ , com o método de 2-trapézios obtemos o valor  $7/6$  e com 4-trapézios  $67/60$ . Determine que valores obtemos ao se calcular a integral pelos métodos de Simpson e 2-Simpsons.

11: (a) Mostre que  $\int_{-1}^1 p(x) \, dx = p(\sqrt{3}/3) + p(-\sqrt{3}/3)$ , para todo polinômio  $p$  de grau menor ou igual a 3.

(b) Use o item (a) para calcular  $\int_0^3 (x^3 - 2x) \, dx$ .

12: É dada a função  $f$  tabelada a seguir:

$f(x)$	1.0	0.5	0.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	1.0
$x$	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0

Determine o polinômio de grau menor ou igual a dois que interpola  $F(t) = \int_0^t f(x) \, dx$  nos pontos  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$  e  $t_2 = 2$  (utilizando o método de  $n$ -simpsons para avaliar  $F(t)$ ). Determine então o polinômio interpolador de  $F$  (de grau 3) nos pontos 0, 0.5, 1 e 2.

**13:** Calcule  $\int_0^1 e^{-x} dx$ :

- (a) pelo método de  $n$ -trapézios, para  $n = 1, n = 2$  e  $n = 4$ , ( $h = 1, h = 0.5, h = 0.25$ ).
- (b) Utilize os valores do item (a) para calcular  $\int_0^1 e^{-x} dx$  pelo método de  $n$ -Simpsons com  $n = 1$  e  $n = 2$ .
- (c) Estime qual o valor de  $h$  para calcular  $\int_0^1 e^{-x} dx$  pelo método de  $n$ -simpsons com erro menor que  $10^{-5}$  e faça o cálculo da integral. Compare a estimativa com o erro realmente obtido.  
Dado: Erro com  $n$ -simpsons:  $|E| \leq \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| h^4 (b-a) / 180$ .

**14:** Uma fórmula de integração aberta não faz uso dos valores da função nos extremos do intervalo. Por exemplo, para calcular  $\int_a^b f(x) dx$  dividimos  $[a, b]$  em pontos uniformemente espaçados  $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = b$  ( $x_{i+1} = x_i + h, h = (b-a)/3$ ) e aproximamos a integral de  $f$  pela integral do polinômio linear que interpola  $f$  nos pontos interiores  $x_1$  e  $x_2$ .

- (a) Qual fórmula de integração se obtém nesse caso?
- (b) Use-a para calcular  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ . Qual a vantagem em relação ao método de Simpson?
- (c) Refine o cálculo da integral do item (b) usando a fórmula com repetições (para dois sub-intervalos e para 4 sub-intervalos). Como se comporta o erro em relação a  $h$ ? (Use o valor exato da integral para comparações.)

**15:** É dada a seguinte fórmula de integração numérica:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = w(f(x_1) + f(-x_1)) + (1-w)(f(x_2) + f(-x_2)),$$

onde  $w = 0.347855$ ,  $x_1 = 0.861136$  e  $x_2 = 0.339981$ . Esta fórmula é exata (a menos de erros de arredondamento) para polinômios de grau até 7. Verifique este fato integrando:  $\int_0^1 x^5 dx$  (sim, use uma mudança de variáveis!). Use a fórmula também para avaliar  $\int_1^2 (1/x) dx$  e determine o erro efetivamente cometido.

**16:** Dados pontos  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  sabemos que  $p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$  é o polinômio interpolador de  $f$  de grau menor ou igual a  $n$  (escrito na forma de Lagrange). Use este fato para mostrar que:

- (a)  $\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1$ , para todo  $x$  real.
- (b)  $\sum_{i=0}^n L_i(0) x_i^k = 0$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ . (Pense!)

**17:** (a) Calcule o polinômio de grau menor ou igual a 4 que interpola a função  $\sin(\pi x/2)$  nos pontos  $x_i = i, i = 0, \dots, 4$ . Utilize-o para estimar  $\sin(\pi/4)$ , delimitando o erro. Dado: erro na interpolação é menor ou igual a

$$\frac{\max_{y \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

- (b) Sabendo que  $p(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1$  é o polinômio de grau menor ou igual a 4 que interpola uma função  $f(x)$  nos pontos  $x_i = i, i = 0, \dots, 4$ , determine o polinômio de grau 3 que interpola esta mesma função  $f$  nos pontos 0, 1, 3 e 4.

**18:** É dada uma função contínua  $s(x) = p(x) + q(x)$ , onde  $p(x)$  é um polinômio quadrático e  $q(x)$  é tal que para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $q(m-x) = -q(m+x)$ , onde  $m = (a+b)/2$ . Mostre que  $\int_a^b s(x) dx$  é calculada exatamente pelo método de Simpson.

**19:** (a) Calcule  $\int_1^3 \frac{1}{5x-2} dx$  pelo método de  $n$ -trapézios, com  $n = 1, 2$  e 4. Estime qual seria o valor de  $n$  necessário para garantir um erro menor que  $10^{-3}$ .

(Erro  $n$ -trapézios:  $|E_n| \leq h^2 (b-a) \max_{x \in [a,b]} |f^{(2)}(x)| / 12$ .)

- (b) Seja  $T(h)$  a aproximação do valor da integral do item (a) obtida com o método dos trapézios com passo  $h$ . O valor exato da integral é o limite dos valores  $T(h)$ , com  $h$  tendendo a zero. Podemos tentar estimar este valor calculando o polinômio de grau 2 que interpola  $T(h)$  nos pontos  $h = 2, h = 1$  e  $h = 0.5$  e avaliando seu valor em  $h = 0$  como estimativa para o valor da integral. Faça isto e compare os valores obtidos com o valor exato da integral.

**20:** Desejamos aproximar o valor de  $\log_2 5/2$  através de interpolação polinomial, usando para tal os valores conhecidos de  $\log_2 x$ , nos pontos 1, 2, 4 e 8. Usando diferenças divididas, calcule os polinômios interpoladores de  $\log_2 x$  nos pontos 2 e 4 (linear), 2, 4 e 8 (quadrático) e 1, 2, 4 e 8 (cúbico). Delimite o erro cometido na aproximação de  $\log_2 5/2$  em cada caso. Dado: erro na interpolação é menor ou igual a

$$\frac{\max_{y \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

**21:** É dada uma função contínua  $f$  definida em  $[0,4]$ , tal que  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  para  $x \in [0,1]$ ,  $f(x) = -x^2 + 5x - 4$ , para  $x \in [1, 5/2]$  e  $f(x) = 3(2 - x/2)$  em  $[5/2, 4]$ .

(a) Calcule  $\int_0^4 f(x)dx$  pelo método de 2-Simpsons e 4-Simpsons (ou seja, com espaçamentos  $h = 1$  e  $1/2$ ). Algum destes resultados fornece o valor exato da integral? Justifique!

(b) Usando os valores de  $f$  apenas nos pontos 0,  $1/2$ , 1,  $7/4$ ,  $5/2$  e 4 obtenha o valor exato da integral! Justifique! (Obs: trabalhe com frações)

**22:** A função  $F(t) = 100/(1 + 9e^{-t/2})$  representa a evolução de uma população a partir de  $t = 0$ . Valores aproximados desta população estão na tabela a seguir:

$t$	0	1	2	3	4	5	6
$F(t)$	10	15	23	33	45	58	69

Determine, usando a tabela, o polinômio  $p$  de grau menor ou igual a 3 que interpola  $F$  nos pontos 1, 2, 4 e 6 (use diferenças divididas). Faça um gráfico comparativo entre  $F$  e  $p$  no intervalo  $[0, 12]$ .

**23:** (*continuação da questão 22*) A população média entre o instante 0 e o instante 6 é dada por

$$P_m = \frac{\int_0^6 F(t)dt}{\int_0^6 dt}$$

Aproxime o valor de  $P_m$  através do método de 3 e 6-trapézios (use os dados da tabela da questão 22), e de 1 e 3-Simpsons. Compare os resultados obtidos com o valor exato da integral, a ser determinado por você.

**24:** A função  $F(t) = 100/(1 + 9e^{-t/2})$  é solução da equação diferencial (“crescimento logístico”):

$$x'(t) = \frac{x(t)}{2} \left( 1 - \frac{x(t)}{100} \right), \quad x(0) = 10$$

Verifique que  $F(t)$  é realmente solução da equação. Partindo de  $x(0)=10$ , utilize o método de Euler com  $\Delta t = 1$ , e com  $\Delta t = 0.5$ , para aproximar o valor de  $x(1)$ .

**25:** Utilize o método de Euler e dos Trapézios com  $\Delta t = 0.5$ , para calcular uma aproximação para  $X(1)$ , onde  $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$  é uma solução da equação

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X(t), \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$