Propriedades homológicas de álgebras preservadas por certas extensões

John MacQuarrie

UFMG

Maio, 2021

Plano da palestra

1. Umas dimensões homológicas
2. Álgebras pseudocompactas
3. Extensões proj-limitadas

Junto com Kostiantyn Iusenko

Parte 1

Umas dimensões homológicas

Extensões de álgebras

Seja k um corpo algebricamente fechada. Uma extensão de álgebras (pra gente) é uma k-álgebra associativa A com subálgebra B: $B \leqslant A$.

Diremos que A é uma extensão de B.

Questão: Suponha que sei alguma coisa sobre B. Posso concluir alguma coisa sobre A?

Example

Seja A uma álgebra qualquer. Temos $B = \langle 1_A \rangle = k \leqslant A$. k é uma álgebra bem fofinha, mas A pode ser arbitrariamente mal-humorada. Então...

Resposta: não.

Questões?

Obrigado pela atenção!

Extensões de álgebras

Questão: Suponha que sei alguma coisa sobre B. Posso concluir alguma coisa sobre A?

Resposta: não, ok, mas por que?

Porque se queremos que A herda propriedades boas de B, temos que impor umas relações entre B e A.

As "propriedades boas" que queremos herdar serão homológicas, então as "relaçoes" serão homológicas também.

O trabalho de Cibils, Lanzilotta, Marcos e Solotar

Em uma sequência de ártigos, Claude Cibils, Marcelo Lanzilotta, Eduardo Marcos e Andrea Solotar consideraram "propriedades boas" da extensão $B \leqslant A$. O truque é para tratar A como B-bimódulo da forma óbvia:

$$b \cdot a \cdot b' := bab'.$$

Já que B é B-subbimódulo de A, também podemos considerar o B-bimódulo A/B.

Eles relacionam B com A por impor condições sobre o bimódulo A/B. As condições são:

O trabalho de Cibils, Lanzilotta, Marcos e Solotar

Definition

A extensão $B \leqslant A$ é limitada (à direita) se

1. O B-bimódulo A/B tem dimensão projetiva finita;
2. O B-módulo à direita A/B é projetivo;
3. Para algum $n \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{(A/B) \otimes_B (A/B) \otimes_B \ldots \otimes_B (A/B)}_{n \text{ vezes}} = 0.$$

(Lembrete: A dimensão projetiva de um (bi)módulo M é o menor cumprimento possível (n) de uma sequência exata

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to M \to 0$$

de (bi)módulos projetivos e homs de (bi)módulos).

O trabalho de Cibils, Lanzilotta, Marcos e Solotar

Seja $B \leqslant A$ uma extensão limitada. Eles mostram que:

Theorem (CLMS)

1. *B tem dimensão global finita $\iff$ A tem dimensão global finita.*
2. *A homologia de Hochschild de B tem suporte finito $\iff$ a homologia de Hochschild de A tem suporte finito.*

Explico melhor esses termos:

Dimensão Global

Definition

A álgebra B tem dimensão global no máximo $n \in \mathbb{N}$, se todo B-módulo finitamente gerada tem dimensão projetiva no máximo n. B tem dimensão global finita se tiver dimensão global n para algum n. Denotamos por gldim(B) a dimensão global de B

Fato útil: se B tem dimensão finita, então gldim(B) é a maior dimensão projetiva de um B-módulo simples.

Dimensão Global, Exemplos

Vamos calcular a dimensão global de umas álgebras fáceis.

Example ($B = k[\, 3 \xleftarrow[\beta]{} 2 \xleftarrow[\alpha]{} 1 \,]$)

B tem base $\langle e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta, \beta\alpha \rangle$. Os B-módulos projetivos indecomponíveis são

$$P_1 = Be_1 = \langle e_1, \alpha, \beta\alpha \rangle, \quad P_2 = Be_2 = \langle e_2, \beta \rangle,$$

$$P_3 = Be_3 = \langle e_3 \rangle.$$

Se lembre que os simples S_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) têm dim 1 e multiplicação do elemento b da base é dada por

$$b \cdot s = \delta_{b,e_i} s.$$

Dimensão Global, Exemplos

Example ($B = k[\, 3 \xleftarrow[\beta]{} 2 \xleftarrow[\alpha]{} 1 \,]$)

As seguintes são resoluções projetivas dos simples $S_i = \langle s_i \rangle$:

$$0 \to \langle e_3 \rangle \xrightarrow{e_3 \mapsto s_3} \langle s_3 \rangle \to 0$$

$$0 \to \langle e_3 \rangle \xrightarrow{e_3 \mapsto \beta} \langle e_2, \beta \rangle \xrightarrow{\substack{e_2 \mapsto s_2 \\ \beta \mapsto 0}} \langle s_2 \rangle \to 0$$

$$0 \to \langle e_2, \beta \rangle \xrightarrow{\substack{e_2 \mapsto \alpha \\ \beta \mapsto \beta\alpha}} \langle e_1, \alpha, \beta\alpha \rangle \xrightarrow{\substack{e_1 \mapsto s_1 \\ \alpha, \beta\alpha \mapsto 0}} \langle s_1 \rangle \to 0$$

Já que as resoluções têm a forma $0 \to P_0 \to S \to 0$ ou $0 \to P_1 \to P_0 \to S \to 0$, a dimensão global de B é $\mathbf{1}$.

Dimensão Global, Exemplos

De fato: uma álgebra (básica) de dimensão finita B tem dimensão global 1 se, e somente se, ela é isomorfa à álgebra de caminhos de algum quiver finito Q sem cíclos orientados.

Dimensão Global, Exemplos

Example ($B = k[\, 3 \xleftarrow[\beta]{} 2 \xleftarrow[\alpha]{} 1 \,]/\langle \beta\alpha \rangle$)

B tem base $\langle e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta \rangle$. Os B-módulos projetivos indecomponíveis são

$$P_1 = \langle e_1, \alpha \rangle, \quad P_2 = \langle e_2, \beta \rangle, \quad P_3 = \langle e_3 \rangle.$$

S_3 é projetivo ainda e S_2 continua tendo dimensão projetiva 1. Mas com S_1:

$$0 \to \langle e_3 \rangle \xrightarrow{e_3 \mapsto \beta} \langle e_2, \beta \rangle \xrightarrow{\substack{e_2 \mapsto \alpha \\ \beta \mapsto 0}} \langle e_1, \alpha \rangle \xrightarrow{\substack{e_1 \mapsto s_1 \\ \alpha \mapsto 0}} \langle s_1 \rangle \to 0$$

Então S_1 tem dimensão projetiva 2, logo B tem dimensão global **2**.

Dimensão Global, Exemplos

Example ($B = k[x]/x^2$)

$B = \langle 1, x \rangle$ tem único simples $S = \langle s \rangle$, com multiplicação $1 \cdot s = s, x \cdot s = 0$. Mas a resolução projetiva de S fica assim:

$$\cdots \xrightarrow[x \mapsto 0]{1 \mapsto x} B \xrightarrow[x \mapsto 0]{1 \mapsto x} B \xrightarrow[x \mapsto 0]{1 \mapsto x} B \xrightarrow[x \mapsto 0]{1 \mapsto s} \langle s \rangle \to 0$$

Então $\operatorname{gldim}(B) = \infty$.

Homologia de Hochschild

Um truque útil: a álgebra envelopante B^e de B é a álgebra $B \otimes_k B^{\mathrm{op}}$, com multiplicação

$$(b \otimes b') \cdot (c \otimes c') := bc \otimes c'b'.$$

A categoria dos B-bimódulos é equivalente à categoria dos B^e-módulos à esquerda e à categoria dos B^e-módulos à direita:

Se M for um B-bimódulo, então é um B^e-módulo à esquerda via:

$$(b \otimes b') \cdot m := bmb',$$

e é um B^e-módulo à direita via:

$$m \cdot (b \otimes b') := b'mb.$$

Homologia de Hochschild

A álgebra B é B-módulo à esquerda. É livre, logo projetivo, então as resoluções projetivas dele não nos ensina muita coisa sobre B. Mas B como B-bimódulo geralmente não é projetivo.

Então faremos o que? Pegue uma resolução projetiva de B como B-bimódulo:

$$\cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to B \to 0.$$

Tire B:

$$\cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0.$$

Pegue um B-bimódulo M e aplique o functor $- \otimes_{B^e} M$:

$$\cdots \to P_n \otimes_{B^e} M \to \cdots \to P_1 \otimes_{B^e} M \to P_0 \otimes_{B^e} M \to 0.$$

Homologia de Hochschild

Essa sequência

$$\cdots \xrightarrow{b_{n+1}} P_n \otimes_{B^e} M \xrightarrow{b_n} \cdots \xrightarrow{b_2} P_1 \otimes_{B^e} M \xrightarrow{b_1} P_0 \otimes_{B^e} M \to 0$$

não é exata em geral. Os espaços vetoriais $\mathrm{Ker}(b_i)/\mathrm{Im}(b_{i+1})$ são (por definição) os grupos $\mathrm{Tor}_i^{B^e}(B, M)$.

Definition

O i-ésimo grupo de Homologia de Hochschild de B com coeficientes em M é

$$\mathrm{HH}_i(B, M) := \mathrm{Tor}_i^{B^e}(B, M).$$

O i-ésimo grupo de Homologia de Hochschild de B é

$$\mathrm{HH}_i(B) := \mathrm{HH}_i(B, B).$$

Homologia de Hochschild, Exemplos

Calcular os espaços HH fica meio chato em geral, pois as dimensões dos espaços dos complexos “padrões” crescem muito rápido. Pularei as contas e só mostrarei as respostas pros mesmos exemplos:

Homologia de Hochschild, Exemplos

Sköldberg em 1996, usando resoluções espertas, fez o cálculo das HH de uma classe de álgebras que inclua nossos exemplos. As respostas são:

Example ($B = k[\,3 \xleftarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\alpha} 1\,]$)

$\mathrm{HH}_0(B) = k^3\,, \quad \mathrm{HH}_n(B) = 0 \quad \forall n \geqslant 1.$

Example ($B = k[\,3 \xleftarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\alpha} 1\,]/\langle \beta\alpha \rangle$)

$\mathrm{HH}_0(B) = k^3\,, \quad \mathrm{HH}_n(B) = 0 \quad \forall n \geqslant 1.$

Example ($B = k[x]/x^2$ ($\mathrm{car}(k) \neq 2$))

$\mathrm{HH}_0(B) = k\,, \quad \mathrm{HH}_n(B) = k \quad \forall n \geqslant 1.$

Comparando HH e gldim

O suporte $\mathrm{Sup}(\mathrm{HH}(B))$ de $\mathrm{HH}(B)$ é o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$ em qual $\mathrm{HH}_n(B) \neq 0$. Umas observações dos nossos exemplos:

1. $k[\, 3 \xleftarrow[\beta]{} 2 \xleftarrow[\alpha]{} 1 \,]$: $\mathrm{gldim}(B) = 1$, $\mathrm{Sup}(\mathrm{HH}(B)) = \{0\}$
2. $k[\, 3 \xleftarrow[\beta]{} 2 \xleftarrow[\alpha]{} 1 \,]/\beta\alpha$: $\mathrm{gldim}(B) = 2$, $\mathrm{Sup}(\mathrm{HH}(B)) = \{0\}$
3. $k[x]/x^2$: $\mathrm{gldim}(B) = \infty$, $\mathrm{Sup}(\mathrm{HH}(B)) = \mathbb{N}$

Em 1998, Keller provou que se B é de dimensão finita com $\mathrm{gldim}(B) < \infty$, então $\mathrm{Sup}(\mathrm{HH}(B)) = \{0\}$.

Conjectura de Han (2006): Se $\dim(B) < \infty$ então

$$\mathrm{gldim}(B) < \infty \iff |\mathrm{Sup}(\mathrm{HH}(B))| < \infty \iff \mathrm{Sup}(\mathrm{HH}(B)) = \{0\}.$$

A Conjectura de Han

Casos conhecidos:

- Já era conhecida que a conjectura vale para álgebras comutativas finitamente geradas (Avramov e Vigué-Poirrier (1992), "Buenes Aires Cyclic Homology Group" (1994));
- No mesmo artigo de anunciar a conjectura, Han provou que ela vale para álgebras monomiais;
- Vale para várias outras classes de álgebras (Bergh, Madsen, Erdmann, Solotar e Suárez-Álvarez)
- O resultado de CLMS: Se $B < A$ for uma extensão limitada, então Han vale para B se, e somente se, vale para A.

Parte 2

Álgebras Pseudocompactas

Álgebras Pseudocompactas

Definition

Seja k um corpo. Uma k-álgebra pseudocompacta é um limite inverso de k-álgebras de dimensão finita.

Álgebras pseudocompactas são álgebras topológicas e poderiam ser enormes, mas elas são *extremamente* bem comportadas da perspectiva formal.

Se você conhece *coálgebras*, então: a categoria das álgebras pseudocompactas é dual à categoria das coálgebras.

Exemplos

- Álgebras de dimensão finita são pseudocompactas.
- Considere o seguinte "sistema inverso" de álgebras de dimensão finita:

$$\cdots \xrightarrow{x \mapsto x} k[x]/x^4 \xrightarrow{x \mapsto x} k[x]/x^3 \xrightarrow{x \mapsto x} k[x]/x^2.$$

  O limite inverso desse sistema é $k[[x]]$ – a álgebra das séries de potência em x.
- (como eu cheguei para álgebras pseudocompactas): Para entender a teoria das reps do grupo profinito $G = \varprojlim G/N$, precisamos de uma álgebra. Aplicando o funtor $k[-]$ para este sistema, obtemos um sistema de álgebras de dimensão finita. O seu limite

$$k[[G]] := \varprojlim k[G/N]$$

  é uma álgebra pseudocompacta.

Exemplos

Mais um.
Sempre que tenho uma inclusão de quivers finitos, obtenho um hom de álgebras de caminhos óbvio *na outra direção*, por exemplo:

$$
\begin{array}{ccc}
(\, 2 \xleftarrow{\alpha} 1 \,) & \hookrightarrow & (\, 3 \xleftarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\alpha} 1 \,) \\
\langle e_2, e_1, \alpha \rangle & \leftarrow & \langle e_3, e_2, e_1, \beta, \alpha, \beta\alpha \rangle \\
0 & \leftarrow\!\shortmid & e_3 \\
e_2 & \leftarrow\!\shortmid & e_2 \\
e_1 & \leftarrow\!\shortmid & e_1 \\
0 & \leftarrow\!\shortmid & \beta \\
\alpha & \leftarrow\!\shortmid & \alpha \\
0 & \leftarrow\!\shortmid & \beta\alpha
\end{array}
$$

Exemplo: álgebra de caminhos completa

Seja Q um quiver qualquer (enumerável e sem cíclos ou laços para simplificar a conversa). Escreva Q como uma união de subquivers finitos Q_i:

$$Q_1 \quad \subseteq \quad Q_2 \quad \subseteq \quad Q_3 \quad \subseteq \quad \cdots \quad Q.$$

Pela observação do último slide, obtemos um sistema inverso de álgebras de dimensão finita assim:

$$k[Q_1] \longleftarrow k[Q_2] \longleftarrow k[Q_3] \longleftarrow \cdots \qquad =: k[[Q]].$$

Álgebras de caminhos completas têm exatamente o mesmo papel no mundo das álgebras pseudocompactas como álgebras de caminhos normais têm no mundo das álgebras de dimensão finita!

Exemplo do exemplo

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots \arrow[d] \\
4 \xleftarrow{\alpha_3} 3 \xleftarrow{\alpha_2} 2 \xleftarrow{\alpha_1} 1 \arrow[u] & \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \arrow[d] \\
3 \xleftarrow{\alpha_2} 2 \xleftarrow{\alpha_1} 1 \arrow[u] & \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \arrow[d] \\
2 \xleftarrow{\alpha_1} 1 \arrow[u] & \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

Exemplo do exemplo

"Logo", a álgebra de caminhos completa do quiver infinito

$$\cdots \xleftarrow{\alpha_4} 4 \xleftarrow{\alpha_3} 3 \xleftarrow{\alpha_2} 2 \xleftarrow{\alpha_1} 1$$

é matrizes triangulares inferiores $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$k[[Q]] = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \\ * & * & 0 & \cdots \\ * & * & * & \\ & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Parte 3

Extensões proj-limitadas

Plano de ação

A gente quer uma versão do teorema de CLMS que diz coisas interessantes sobre nossas queridas álgebras pseudocompactas.

O teorema deles, como anunciado, passa diretamente para álgebras pseudocompactas sem basicamente nem mexer na sua prova.

Mas lembre-se da terceira condição de uma extensão limitada: que para algum $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\underbrace{(A/B) \otimes_B (A/B) \otimes_B \ldots \otimes_B (A/B)}_{n \text{ vezes}} = 0.$$

Quando A tem dimensão finita, essa condição é natural, mas com nossas álgebras maiores, é extremamente restritiva.

Então gostaríamos de relaxar essa condição.

Homologia relativa

Precisamos de mais umas ferramentas. “Homologia” é mexer com módulos projetivos. Só um lembrete:

Definition

O A-módulo P é projetivo se dado um diagrama de A-módulos e homomorfismos de A-módulos assim:

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\alpha"] \\
U \arrow[r, two heads, "\beta"'] & V
\end{tikzcd}
$$

existe um homomorfismo de A-módulos $\rho : P \to U$ tal que $\beta\rho = \alpha$.

Homologia relativa

Os módulos projetivos são exatamente os somandos diretos dos módulos livres.

Outro jeito de falar a mesma coisa: Um espaço vetorial X é um $k = \langle 1_A \rangle$-módulo. Um módulo livre (de posto finito) tem a forma:

$$A^n = A \otimes_{\langle 1_A \rangle} X,$$

onde a gente trata A como A-$\langle 1_A \rangle$-bimódulo.

Diremos que módulos livres são *induzidos* de $\langle 1_A \rangle$-módulos.

Homologia relativa acontece quando trocar $\langle 1_A \rangle$ por uma subálgebra B qualquer:

Homologia relativa

O A-módulo à esquerda P é projetiva relativa à subálgebra B se satisfaz as seguintes condições equivalentes:

- P é isomorfo a um somando direto do A-módulo induzido $A \otimes_B X$, para algum B-módulo X.
- Dado um diagrama de A-módulos assim:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\alpha"] \\ U \arrow[r, two heads, "\beta"'] & V \end{tikzcd}$$

  existe um hom de A-módulos $\rho : P \to U$ tal que $\beta\rho = \alpha$ desde que existe um hom de B-módulos $\rho' : P \to U$ tal que $\beta\rho' = \alpha$.

Homologia relativa

A filosofia do módulo projetivo P é: tudo funciona.

A filosofia do módulo relativamente B-projetivo P é: pode não funcionar, mas se funciona como B-módulo, então funciona.

Segue um exemplo disso.

Resoluções relativamente projetivas

Uma resolução projetiva do A-módulo M é uma sequência exata

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "d"'] & P_2 \arrow[r, "d"'] & P_1 \arrow[r, "d"'] & P_0 \arrow[r, "d"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

com os P_i projetivos.

Mas tem mais acontecendo. Todo mundo é espaço vetorial, e todo hom de espaços vetorias é "split". Então existem homs de k-módulos s indo na outra direção:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, shift right, "d"'] & P_2 \arrow[l, dashed, shift right, "s"'] \arrow[r, shift right, "d"'] & P_1 \arrow[l, dashed, shift right, "s"'] \arrow[r, shift right, "d"'] & P_0 \arrow[l, dashed, shift right, "s"'] \arrow[r, shift right, "d"'] & M \arrow[l, dashed, shift right, "s"'] \arrow[r, shift right] & 0 \arrow[l, dashed, shift right] \end{tikzcd}$$

A propriedade dos s é que, para cada X da sequência, temos

$$sd + ds = \mathrm{id}_X.$$

Os "s" são uma homotopia contratante da sequência.

Resoluções relativamente projetivas

Uma resolução *relativamente* projetiva de M é

$$\cdots \xrightarrow[d]{} P_2 \xrightarrow[d]{} P_1 \xrightarrow[d]{} P_0 \xrightarrow[d]{} M \longrightarrow 0$$

com os P_i relativamente projetivos.

Só que agora esses mapas s não existem de graça, então temos que exigir que existem homs de B-módulos s na outra direção

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, shift right, "d"'] & P_2 \arrow[l, dashed, shift right, "s"'] \arrow[r, shift right, "d"'] & P_1 \arrow[l, dashed, shift right, "s"'] \arrow[r, shift right, "d"'] & P_0 \arrow[l, dashed, shift right, "s"'] \arrow[r, shift right, "d"'] & M \arrow[l, dashed, shift right, "s"'] \arrow[r, shift right] & 0 \arrow[l, dashed, shift right] \end{tikzcd}$$

tais que $sd + ds = \mathrm{id}_X$ para cada X.

Agora pela filosofia: resoluções relativamente projetivas funcionam como resoluções projetivas.

Lembrete: Extensão Limitada

Definition (CLMS)

A extensão $B \leqslant A$ é limitada à direita se

1. O B-bimódulo A/B tem dimensão projetiva finita;
2. O B-módulo à direita A/B é projetivo;
3. Para algum $n \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{(A/B) \otimes_B (A/B) \otimes_B \ldots \otimes_B (A/B)}_{n \text{ vezes}} = 0.$$

A gente quer relaxar a terceira condição. Nossa definição é:

Extensão Proj-Limitada

Definition (Iusenko-M)

A extensão $B \leqslant A$ é proj-limitada à direita se

1. O B-bimódulo A/B tem dimensão projetiva finita;
2. O B-módulo à direita A/B é projetivo;
3. Para algum $n \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{(A/B) \otimes_B (A/B) \otimes_B \ldots \otimes_B (A/B)}_{n \text{ vezes}}$$

   é projetivo como B-bimódulo;
4. O A^e-módulo A tem dimensão B^e-projetiva relativa finita.

Observações

- Já que o módulo 0 é projetivo, Condição 3. claramente generaliza "tensor-nilpotente".
- Condição 4. também generaliza "tensor-nilpotente": no trabalho de CLMS, eles mostram que existe uma resolução relativamente B^e-projetiva de A, cujos termos são:

$$A \otimes_B \underbrace{(A/B) \otimes_B (A/B) \otimes_B \ldots \otimes_B (A/B)}_{i \text{ vezes}} \otimes_B A$$

  então com extensões limitadas, os módulos da resolução se tornam $A \otimes_B 0 \otimes_B A = 0$.

  (Aliás, a existência dessa resolução é não trivial, e é um dos grandes avanços de CLMS).

Exemplos de extensões proj-limitadas

Sejam $B = k$ e $A = k[[x]]$. Esta extensão *não é* limitada.

Já que $B^e = k \otimes_k k = k$ é semisimples, todo B-(bi)módulo é projetivo, então condições 1, 2, 3 são trivialmente satisfeitas.

Falta confirmar que a dimensão projetiva B^e-relativa de A^e é finita. Mas

- já que $B^e = k$, dimensão projetiva relativa é só dimensão projetiva normal,
- $k[[x]]^e \cong k[[x, y]]$ tem dimensão global 2,
- logo em particular $k[[x]]$ tem $k[[x]]^e$-dimensão projetiva no máximo $2 < \infty$.
- Então $k \leqslant k[[x]]$ é proj-limitada.

Exemplos de extensões proj-limitadas

Seja $B = k[[Q]]$, onde

$$Q \quad = \quad \begin{tikzcd} 4 & 3 \arrow[l, "\delta"'] & 2 \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[loop above, "\beta"] & 1 \arrow[l, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Seja M o B-bimódulo $(S_3 \otimes S_1) \oplus {}_B\langle e_2 \otimes e_2 \rangle_B$.

A álgebra tensorial (completa) $A = T[[B, M]]$ é uma extensão não limitada de B. Mas é proj-limitada, pois

- A/B tem dimensão projetiva 1 como B-bimódulo
- A/B é projetiva como B-módulo à direita (mas não à esquerda)
- $A/B \otimes_B A/B$ é projetiva como bimódulo (A/B não a é)
- $T[[B, M]]$ (sempre!) tem B-rel proj dim $\leqslant 1$.

Nosso teorema

Theorem (Iusenko-M)

Seja $B \leqslant A$ uma extensão proj-limitada de álgebras pseudocompactas. Então

1. *B tem dimensão global finita $\iff$ A tem dimensão global finita.*
2. $\mathrm{Sup}(\mathrm{HH}(B)) < \infty \iff \mathrm{Sup}(\mathrm{HH}(A)) < \infty$.

   Adicionamos (essa semana :ı) uma "propriedade homologica" nova pra lista, qual a gente acha deve ser interessante até para álgebras de dimensão finita:

3. $\mathrm{findim}(B) < \infty \iff \mathrm{findim}(A) < \infty$.

Demonstração

A prova (longa!) de CLMS usa bastante álgebra homológica relativa. Nossa prova de Partes 1 e 2 funciona $\pm$ por seguir a prova deles, confirmando sempre que eles usam tensor-nilpotência, que as nossas condições 3 e 4 (uma condição de homológia relativa!) funcionam no seu lugar.

Parte 3 segue (com cuidado) pois quando o B-módulo X tem dimensão projetiva (pd) finita, as condições garantem que o A-módulo induzido $A \otimes_B X$ tem pd finita. Similarmente, se o A módulo Y tem pd finita, então Y como B-módulo tem pd finita...

... logo argumentos similares aos que mostraram que gldim finita seja preservada, também mostram que fimdim é preservada.

E a conjectura de Han?

HH e gldim finita são preservadas por extensões proj-limitadas, mas isso não quer sugerir que a "Conjectura de Han" vale para álgebras pseudocompactas...
De fato, é absurdamente falsa:

Considere $A = k[[Q]]/J^2 = k[[Q]]/\langle \alpha_{i+1}\alpha_i \rangle$, com

$$Q = \cdots \xleftarrow{\alpha_4} 4 \xleftarrow{\alpha_3} 3 \xleftarrow{\alpha_2} 2 \xleftarrow{\alpha_1} 1 \, .$$

- O argumento de Sköldberg mostra que $\mathrm{Sup}(\mathrm{HH}(A)) = \{0\}$.
- Mas o módulo simples S_1 tem resolução projetiva minimal assim:

$$\cdots \to P_4 \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to S_1$$

então $\mathrm{gldim}(A) = \infty$.

Uma Questão

Quando trabalhar com álgebras pseudocompactas, é legal quando o resultado diz algo nova sobre álgebras de dimensão finita.

Quando A tem dimensão finita, extensões proj-limitas continuam sendo mais gerais do que extensões limitas.

Exemplo Idiota: $A = k[2 \quad 1] \cong k \times k$. $B = \langle e_1 + e_2 \rangle$.
Essa extensão é proj-limitada, mas não limitada.

Question: Existem extensões proj-limitadas (mas não limitadas) interessantes $B \leqslant A$ com A de dimensão finita? Se sim, como descrever tais extensões combinatorialmente?

Obrigado