Um relacionamento funtorial entre álgebras e seus quocientes pelas n-ésimas potências do radical de Jacobson

Fernando Naves

Orientador: John William MacQuarrie

UFMG

October 20, 2021

Motivação

- 2018 - Iusenko e MacQuarrie - The path algebra as a left adjoint functor - Algebras and Representation Theory;
- 2020 - Iusenko, MacQuarrie e Quirino - A functorial approach to Gabriel k-quiver constructions for coalgebras and pseudocompact algebras - Bulletin of the Brazilian Mathematical Society.

Notação

- O corpo k é um corpo algebricamente fechado;
- Por álgebra, entendemos como álgebra associativa com unidade (e homomorfismos de álgebras são unitais e contínuos); .

Álgebras pseudocompactas

Uma álgebra topológica Hausdorff A é uma álgebra pseudocompacta quando possui uma família de ideais de codimensão finita $\{I_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ que formam uma base de vizinhanças de 0 e

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma = 0.$$

Álgebras pseudocompactas

Uma álgebra topológica Hausdorff A é uma álgebra pseudocompacta quando possui uma família de ideais de codimensão finita $\{I_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ que formam uma base de vizinhanças de 0 e

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma = 0.$$

Equivalentemente, A é o limite inverso de álgebras de dimensão finita munidas com a topologia discreta:

$$A \cong \varprojlim{}_{\gamma\in\Gamma} A/I_\gamma.$$

Álgebras pseudocompactas

Seja A uma álgebra pseudocompacta. Um A-bimódulo M é pseudocompacto se existe um sistema de vizinhança de 0 formada por subbimódulos abertos de codimensão finita $\{M_i\}$ que se intersectam em 0 e $M = \varprojlim M/M_i$.

Exemplos

- Álgebras de dimensão finita são pseudocompactas;

Exemplos

- Álgebras de dimensão finita são pseudocompactas;
- O produto $A = \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$, onde cada A_n é uma álgebra de dimensão finita, é uma álgebra pseudocompacta:

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n \cong \varprojlim{}_n \frac{A}{I_n},$$

onde $I_n = 0 \times \ldots \times 0 \times \prod_{i \geq n} A_i$;

Exemplos

- Álgebras de dimensão finita são pseudocompactas;
- O produto $A = \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$, onde cada A_n é uma álgebra de dimensão finita, é uma álgebra pseudocompacta.
- Dado o sistema inverso de álgebras de dimensão finita:

$$\ldots \xrightarrow{\pi_n} k[X]/X^n \xrightarrow{\pi_{n-1}} k[X]/X^{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-2}} \ldots \xrightarrow{\pi_2} k[X]/X^2 \xrightarrow{\pi_1} k[X]/X$$

O limite inverso do sistema acima é álgebra de série de potências em X sobre k, $k[[X]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mid a_i \in k \right\}$.

Definições

- O radical de Jacobson $J(A)$ de uma álgebra pseudocompacta A é a interseção dos ideais à esquerda fechados maximais de A.

Definições

- O radical de Jacobson $J(A)$ de uma álgebra pseudocompacta A é a interseção dos ideais à esquerda fechados maximais de A.
- Para cada $n \geq 1$,

$$J^n(A) = \overline{J(A)J^{n-1}(A)}.$$

Definições

- O radical de Jacobson $J(A)$ de uma álgebra pseudocompacta A é a interseção dos ideais à esquerda fechados maximais de A.
- Para cada $n \geq 1$,

$$J^n(A) = \overline{J(A)J^{n-1}(A)}.$$

A cadeia

$$... \subset \langle X^n \rangle \subset \langle X^{n-1} \rangle \subset ... \subset \langle X^2 \rangle \subset \langle X \rangle$$

é uma cadeia de ideais fechados de $k[[X]]$. Cada ideal I de $k[[X]]$ é um ideal da forma $\langle X^n \rangle$ para algum n. Portanto,

$$J(k[[X]]) = \langle X \rangle;$$

$$J^n(k[[X]]) = \langle X^n \rangle.$$

Definições

- O *radical de Jacobson* $J(A)$ de uma álgebra pseudocompacta A é a interseção dos ideais à esquerda fechados maximais de A.
- Para cada $n \geq 1$,

$$J^n(A) = \overline{J(A)J^{n-1}(A)}.$$

- Dizemos que uma álgebra pseudocompacta A é *básica* se $A/J(A)$ é um produto de cópias de k.

Radical de Jacobson e homomorfismo de álgebras

- Sejam A, B álgebras pseudocompactas básicas e $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de álgebras contínuo. Então $\varphi(J(A)) \subseteq J(B)$.

Radical de Jacobson e homomorfismo de álgebras

- Sejam A, B álgebras pseudocompactas básicas e $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de álgebras contínuo. Então $\varphi(J(A)) \subseteq J(B)$.
- É válido para qualquer homomorfismo de álgebras? Não. Contra-exemplo de bolso:

$$\iota : \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} : a, b, d \in k \right\} \hookrightarrow \mathbb{M}_2(k)$$

Radical de Jacobson e homomorfismo de álgebras

- Sejam A, B álgebras pseudocompactas básicas e $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de álgebras contínuo. Então $\varphi(J(A)) \subseteq J(B)$.
- Para cada n,

$$\begin{aligned} \varphi(J^n(A)) &= \varphi(\overline{J(A)J^{n-1}(A)}) \\ &\subseteq \overline{\varphi(J(A))\varphi(J^{n-1}(A))} \\ &\subseteq \overline{J(B)J^{n-1}(B)} \\ &= J^n(B) \end{aligned}$$

Dado um homomorfismo de álgebras pseudocompactas básicas

$$\varphi : A \to B,$$

para cada n, existe um único homomorfismo

$$\varphi^{(n)} : A/J^n(A) \to B/J^n(B)$$

tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & B \arrow[d, "\pi"] \\ A/J^n(A) \arrow[r, "\varphi^{(n)}"'] & B/J^n(B) \end{tikzcd}$$

comuta. A saber,

$$\varphi^{(n)} : a + J^n(A) \mapsto \varphi(a) + J^n(B).$$

Álgebra tensorial completa

Dados dois A-bimódulos pseudocompactos $M = \varprojlim M/M_i$ e $N = \varprojlim N/N_j$, definimos o produto tensorial completo entre M e N sobre A como sendo

$$M \widehat{\otimes}_A N = \varprojlim{}_{i,j} \frac{M \otimes_A N}{M \otimes_A N_j + M_i \otimes_A N}.$$

Álgebra tensorial completa

Sejam A uma álgebra pseudocompacta e M um A-bimódulo pseudocompacto. Definimos a *álgebra tensorial completa* como sendo

$$T[[A, M]] = A \times \prod_{n=1}^{\infty} M^{\widehat{\otimes} n},$$

onde $M^{\widehat{\otimes} n} = \underbrace{M \widehat{\otimes}_A ... \widehat{\otimes}_A M}_{n}$.

Álgebra tensorial completa

Sejam A uma álgebra pseudocompacta e M um A-bimódulo pseudocompacto. Definimos a *álgebra tensorial completa* como sendo

$$T[[A, M]] = A \times \prod_{n=1}^{\infty} M^{\widehat{\otimes} n},$$

onde $M^{\widehat{\otimes} n} = \underbrace{M \widehat{\otimes}_A ... \widehat{\otimes}_A M}_{n}$.

A multiplicação de dois elementos $v \in M^{\widehat{\otimes} r}$ e $w \in M^{\widehat{\otimes} s}$ é simplesmente a concatenação:

$$v \widehat{\otimes}_A w \in M^{\widehat{\otimes} r+s}$$

Álgebra tensorial completa

Sejam A uma álgebra pseudocompacta e M um A-bimódulo pseudocompacto. Definimos a *álgebra tensorial completa* como sendo

$$T[[A, M]] := A \times \prod_{n=1}^{\infty} M^{\widehat{\otimes} n},$$

onde $M^{\widehat{\otimes} n} = \underbrace{M \widehat{\otimes}_A ... \widehat{\otimes}_A M}_{n}$.

A multiplicação de dois elementos $v \in M^{\widehat{\otimes} r}$ e $w \in M^{\widehat{\otimes} s}$ é simplesmente a concatenação:

$$v \widehat{\otimes}_A w \in M^{\widehat{\otimes} r+s}$$

Dada uma álgebra pseudocompacta básica A, definimos a *álgebra de caminhos completa de A* como sendo

$$k[[Q_A]] := T[[A/J(A), J(A)/J^2(A)]]$$

.

Exemplos

- Considere a aljava

$$Q: \ 3 \xleftarrow{b} 2 \xleftarrow{a} 1 \ .$$

Se $A = kQ$, então

$$k[[Q_A]] = T[[A/J(A), J(A)/J^2(A)]] = kQ.$$

Exemplos

- Considere a aljava

$$Q: \; 3 \xleftarrow{b} 2 \xleftarrow{a} 1 \; .$$

Se $A = kQ$, então

$$k[[Q_A]] = T[[A/J(A), J(A)/J^2(A)]] = kQ.$$

A álgebra de caminhos completa de uma álgebra acíclica de dimensão finita é a álgebra de caminhos.

Exemplos

- Considere a aljava

$$Q: \ 3 \xleftarrow{b} 2 \xleftarrow{a} 1 \ .$$

Se $A = kQ$, então

$$k[[Q_A]] = T[[A/J(A), J(A)/J^2(A)]] = kQ.$$

A álgebra de caminhos completa de uma álgebra acíclica de dimensão finita é a álgebra de caminhos.

- Quando tratamos k como um k-bimódulo da maneira óbvia, temos

$$T[[k,k]] \cong k[[X]].$$

Propriedades da álgebra tensorial completa

- $\prod_{i=1}^{\infty} M^{\widehat{\otimes} n}$ é um ideal fechado em $T[[A, M]]$ - é o núcleo da projeção contínua $T[[A, M]] \twoheadrightarrow A$;

Propriedades da álgebra tensorial completa

- $\prod_{i=1}^{\infty} M^{\widehat{\otimes} n}$ é um ideal fechado em $T[[A, M]]$ - é o núcleo da projeção contínua $T[[A, M]] \twoheadrightarrow A$;
- $J(T[[A, M]]) = \prod_{i=1}^{\infty} M^{\widehat{\otimes} n}$ quando A é uma álgebra semissimples;

Propriedades da álgebra tensorial completa

- $\prod_{i=1}^{\infty} M^{\widehat{\otimes} n}$ é um ideal fechado em $T[[A, M]]$ - é o núcleo da projeção contínua $T[[A, M]] \twoheadrightarrow A$;
- $J(T[[A, M]]) = \prod_{i=1}^{\infty} M^{\widehat{\otimes} n}$ quando A é uma álgebra semissimples;
- dados

$$f_0 : A \to B;$$

$$f_1 : M \to B,$$

defini-se um homomorfismo de álgebras

$$f : T[[A, M]] \to B$$

do seguinte modo:

$$(a_0, m_1, \sum m_j \widehat{\otimes}_A m_j', \ldots) \mapsto f_0(a_0) + f_1(m_1) + \sum f_1(m_j) f_1(m_j') + \ldots .$$

- Considere **PAlg** a categoria cujos os objetos são álgebras pseudocompactas básicas e os morfismos são homomorfismos de álgebras unitais contínuos;

- Considere **PAlg** a categoria cujos os objetos são álgebras pseudocompactas básicas e os morfismos são homomorfismos de álgebras unitais contínuos;
- Seja $\mathbf{PAlg}^n$ a subcategoria plena de **PAlg** cujos os objetos são álgebras A tais que $J^n(A) = 0$.

- Considere **PAlg** a categoria cujos os objetos são álgebras pseudocompactas básicas e os morfismos são homomorfismos de álgebras unitais contínuos;
- Seja $\mathbf{PAlg}^n$ a subcategoria plena de **PAlg** cujos os objetos são álgebras A tais que $J^n(A) = 0$.

Defina o funtor

$$\begin{array}{cccc} F_n: & \mathbf{Palg} & \to & \mathbf{PAlg}^n \\ & A & \mapsto & A/J^n(A) \\ & \varphi : A \to B & \mapsto & \varphi^{(n)} : \begin{array}{ccc} A/J^n(A) & \to & B/J^n(B) \\ a + J^n(A) & \mapsto & \varphi(a) + J^n(B) \end{array} \end{array}.$$

Exemplos

Considere a aljava Q

$$Q: \ 3 \xleftarrow{b} 2 \xleftarrow{a} 1$$

Seja $\varphi : kQ \to kQ$ o homomorfismo definido como da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccc} e_1 & \mapsto & e_1 + ba \\ e_2 & \mapsto & e_2 \\ e_3 & \mapsto & e_3 - ba \\ a & \mapsto & a \\ b & \mapsto & b \end{array}.$$

Então

$$F_2\varphi = id : kQ/J^2(kQ) \to kQ/J^2(kQ).$$

A relação $\sim_n$

Denote por $\sim_n$ a relação induzida pelo funtor F_n, isto é, dois morfismos $f, g : A \to B$ são equivalentes via $\sim_n$ se, e somente se, $F_n f = F_n g$.

A relação $\sim_n$

Denote por $\sim_n$ a relação induzida pelo funtor F_n, isto é, dois morfismos $f, g : A \to B$ são equivalentes via $\sim_n$ se, e somente se, $F_n f = F_n g$. Equivalentemente:

$$\begin{aligned} f \sim_n g \quad &\iff \quad F_n f = F_n g \\ &\iff \quad f^{(n)} = g^{(n)} \\ &\iff \quad f(a) + J^n(B) = g(a) + J^n(B) \ \forall a \in A \\ &\iff \quad (f-g)(A) \subseteq J^n(B). \end{aligned}$$

A relação $\sim_n$

Denote por $\sim_n$ a relação induzida pelo funtor F_n, isto é, dois morfismos $f, g : A \to B$ são equivalentes via $\sim_n$ se, e somente se, $F_n f = F_n g$. Equivalentemente:

$$\begin{aligned} f \sim_n g \quad &\iff \quad F_n f = F_n g \\ &\iff \quad f^{(n)} = g^{(n)} \\ &\iff \quad f(a) + J^n(B) = g(a) + J^n(B)\ \forall a \in A \\ &\iff \quad (f - g)(A) \subseteq J^n(B). \end{aligned}$$

Observe que $\sim_m$ é mais fina que $\sim_n$ sempre que $n \leq m$:

$$f \sim_m g \implies (f - g)(A) \subseteq J^m(B) \subseteq J^n(B) \implies f \sim_n g.$$

Denote por $\mathbf{PAlg}_{\sim_n}$ a categoria quociente

$$\mathbf{PAlg}/\sim_n .$$

Defina o "novo" funtor F_n como sendo o funtor induzido pelo quociente de $\sim_n$:

$$\begin{array}{rccc} F_n : & \mathbf{PAlg}_{\sim_n} & \to & \mathbf{PAlg}^n \\ & A & \mapsto & A/J^n(A) \\ & f + \sim_n & \mapsto & F_n f = f^{(n)} \end{array}$$

O caso $n = 2$

Quando $n = 2$, temos o seguinte funtor:

$$\begin{array}{rccc} F_2: & \mathbf{PAlg}_{\sim_2} & \to & \mathbf{PAlg}^2 \\ & A & \mapsto & A/J^2(A) \\ & f + \sim_2 & \mapsto & f^{(2)} \end{array}$$

O caso $n = 2$

Iusenko, MacQuarrie e Quirino definem o seguinte funtor:

$$\begin{array}{cccc} F: & \mathbf{PAlg}_{\sim} & \to & \mathbf{ParAlg} \\ & A & \mapsto & (A/J(A), J(A)/J^2(A)) \\ & f + \sim & \mapsto & (f^{(1)}, f^{(2)}|_{J(A/J^2(A))}) \end{array},$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência relacionando morfismos $f, g : A \to B$ tais que

$$(f - g)(A) \subseteq J(B) \qquad (f - g)(J(A)) \subseteq J^2(B).$$

O caso $n = 2$

Iusenko, MacQuarrie e Quirino definem o seguinte funtor:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbf{PAlg}_{\sim} & \to & \mathbf{ParAlg} \\ & A & \mapsto & (A/J(A), J(A)/J^2(A)) \\ & f+\sim & \mapsto & (f^{(1)}, f^{(2)}|_{J(A/J^2(A))}) \end{array},$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência relacionando morfismos $f, g : A \to B$ tais que

$$(f-g)(A) \subseteq J(B) \qquad (f-g)(J(A)) \subseteq J^2(B).$$

Obs: A relação $\sim_2$ é mais fina que $\sim$:

$$(f-g)(A) \subseteq J^2(B) \subseteq J(B) \qquad (f-g)(J(A)) \subseteq J^2(B).$$

O caso $n = 2$

Quando $n = 2$, temos o seguinte funtor:

$$\begin{array}{rccc} F_2 : & \mathbf{PAlg}_{\sim_2} & \to & \mathbf{PAlg}^2 \\ & A & \mapsto & A/J^2(A) \\ & f + \sim_2 & \mapsto & f^{(2)} \end{array}$$

Temos uma leve suspeita de como agir nos objetos:

$$\Sigma \in \mathbf{PAlg}^2 \mapsto k[[Q_\Sigma]] \in \mathbf{PAlg}.$$

E nos morfismos?

Temos uma leve suspeita de como agir nos objetos:

$$\Sigma \in \mathbf{PAlg}^2 \mapsto k[[Q_\Sigma]] \in \mathbf{PAlg}.$$

Um palpite seria utilizar a construção de Iusenko, MacQuarrie e Quirino.

Temos uma leve suspeita de como agir nos objetos:

$$\Sigma \in \mathbf{PAlg}^2 \mapsto k[[Q_\Sigma]] \in \mathbf{PAlg}.$$

Um palpite seria utilizar a construção de Iusenko, MacQuarrie e Quirino.
Problema: Dependendo da escolha de idempotentes de A, não é possível assegurar a naturalidade da unidade e counidade.

Um morfismo $s : A/J(A) \to A$ é um levantamento da projeção $\pi : A \to A/J(A)$ se

$$\begin{tikzcd} A/J(A) \arrow[r, "s"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & A \arrow[r, "\pi"] & A/J(A) \end{tikzcd} .$$

Um morfismo $s : A/J(A) \to A$ é um levantamento da projeção $\pi : A \to A/J(A)$ se

$$\begin{tikzcd} A/J(A) \arrow[r, "s"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & A \arrow[r, "\pi"] & A/J(A) \end{tikzcd} .$$

Seja A uma álgebra pseudocompacta básica. Defina:

$$\mathcal{P}(A) = \{\{e_i\} : \{e_i\} \text{ c.c.i.o.p}\} ;$$

$$\mathcal{L}(A) = \{s : A/J(A) \to A : s \text{ levantamento}\} .$$

Um morfismo $s : A/J(A) \to A$ é um levantamento da projeção $\pi : A \to A/J(A)$ se

$$\begin{tikzcd} A/J(A) \arrow[r, "s"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & A \arrow[r, "\pi"] & A/J(A) \end{tikzcd}.$$

Seja uma álgebra A. Defina:

$$\mathcal{P}(A) = \{\{e_i\} : \{e_i\} \text{ c.c.i.o.p}\};$$

$$\mathcal{L}(A) = \{s : A/J(A) \to A : s \text{ levantamento}\}.$$

Existe uma bijeção entre $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{P}(A)$.

Um truque: Vamos trocar as categorias **PAlg** e $\mathbf{PAlg}^n$ por categorias equivalentes:
Defina $\mathbf{PAlg}^{\mathcal{L}}$ do seguinte modo:

- os objetos são pares (A, s), onde $A \in \mathbf{PAlg}$ e $s \in \mathcal{L}(A)$;
- os morfismos entre (A, s) e (B, s') são todos os morfismos de álgebras contínuos entre A e B.

Um truque: Vamos trocar as categorias $\mathbf{PAlg}$ e $\mathbf{PAlg}^n$ por categorias equivalentes:
Defina $\mathbf{PAlg}^{\mathcal{L}}$ do seguinte modo:

- os objetos são pares (A, s), onde $A \in \mathbf{PAlg}$ e $s \in \mathcal{L}(A)$;
- os morfismos entre (A, s) e (B, s') são todos os morfismos de álgebras contínuos entre A e B.

Defina também $\mathbf{PAlg}^{\mathcal{L},n}$ a subcategoria plena de $\mathbf{PAlg}^{\mathcal{L}}$ cujos objetos são pares (A, s), onde $A \in \mathbf{PAlg}^n$.

Um truque: Vamos trocar as categorias $\mathbf{PAlg}$ e $\mathbf{PAlg}^n$ por categorias equivalentes:
Defina $\mathbf{PAlg}^{\mathcal{L}}$ do seguinte modo:

- os objetos são pares (A, s), onde $A \in \mathbf{PAlg}$ e $s \in \mathcal{L}(A)$;
- os morfismos entre (A, s) e (B, s') são todos os morfismos de álgebras contínuos entre A e B.

Defina também $\mathbf{PAlg}^{\mathcal{L},n}$ a subcategoria plena de $\mathbf{PAlg}^{\mathcal{L}}$ cujos objetos são pares (A, s), onde $A \in \mathbf{PAlg}^n$.
Então:

$$\mathbf{PAlg} \equiv \mathbf{PAlg}^{\mathcal{L}} \qquad \mathbf{PAlg}^n \equiv \mathbf{PAlg}^{\mathcal{L},n}.$$

Considere o funtor $F_2^{\mathcal{L}} : \mathbf{PAlg}^{\mathcal{L}}_{\sim_2} \to \mathbf{PAlg}^{\mathcal{L},n}$ definido do seguinte modo:

$$\begin{array}{ccc} (A, s) & \mapsto & (A/J^2(A), \pi s) \\ f + \sim_2 & \mapsto & f^{(2)} \end{array} .$$

Dado um objeto $(\Sigma, s) \in \mathbf{PAlg}^{\mathcal{L},2}$, defina:

$$(\Sigma, s) \mapsto \left(k[[Q_\Sigma]], \quad s_{Q_\Sigma} : \begin{array}{ccc} k[[Q_\Sigma]]/J(k[[Q_\Sigma]]) & \to & k[[Q_\Sigma]] \\ e_i + J(k[[Q_\Sigma]]) & \mapsto & e_i \end{array} \right).$$

Dado um objeto $(\Sigma, s) \in \mathbf{PAlg}^{\mathcal{L},2}$, defina:

$$(\Sigma, s) \mapsto \left(k[[Q_\Sigma]], \begin{array}{ccc} s_{Q_\Sigma}: & k[[Q_\Sigma]]/J(k[[Q_\Sigma]]) & \to & k[[Q_\Sigma]] \\ & e_i + J(k[[Q_\Sigma]]) & \mapsto & e_i \end{array} \right).$$

Dado um morfismo $\varphi : (\Sigma_1, s_1) \to (\Sigma_2, s_2)$, buscamos definir um morfismo

$$k[[\varphi]] : (K[[Q_{\Sigma_1}]], s_{Q_{\Sigma_1}}) \to (K[[Q_{\Sigma_2}]], s_{Q_{\Sigma_2}}) \in \mathbf{PAlg}^{\mathcal{L}}_{\sim_2}$$

de modo que $k[[-]]$ seja um funtor.

Theorem 1

Sejam A, B álgebras pseudocompactas básicas, $\varphi : A \to B$ homomorfismo contínuo de álgebras e $s_A : A/J(A) \to A$ um levantamento da projeção de A em $A/J(A)$. Se $J^n(B) = 0$ para algum inteiro positivo n então existe um levantamento $s_B : B/J(B) \to B$ da projeção de B em $B/J(B)$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A/J(A) & \overset{\varphi^{(1)}}{\longrightarrow} & B/J(B) \\ {\scriptstyle s_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s_B} \\ A & \xrightarrow[\varphi]{} & B \end{array}$$

comuta.

Dado um morfismo $\varphi : (\Sigma_1, s_1) \to (\Sigma_2, s_2)$, nosso plano será dividido nas seguintes etapas:

Dado um morfismo $\varphi : (\Sigma_1, s_1) \to (\Sigma_2, s_2)$, nosso plano será dividido nas seguintes etapas:

- construir um homomorfismo de álgebras

$$\varphi_0 : \Sigma_1/J(\Sigma_1) \to k[[Q_{\Sigma_2}]];$$

Dado um morfismo $\varphi : (\Sigma_1, s_1) \to (\Sigma_2, s_2)$, nosso plano será dividido nas seguintes etapas:

- construir um homomorfismo de álgebras

$$\varphi_0 : \Sigma_1/J(\Sigma_1) \to k[[Q_{\Sigma_2}]];$$

- construir um homomorfismo de $\Sigma_1/J(\Sigma_1)$-bimódulos

$$\varphi_1 : J(\Sigma_1) \to k[[Q_{\Sigma_2}]].$$

Dado um morfismo $\varphi : (\Sigma_1, s_1) \to (\Sigma_2, s_2)$, nosso plano será dividido nas seguintes etapas:

- construir um homomorfismo de álgebras
$$\varphi_0 : \Sigma_1/J(\Sigma_1) \to k[[Q_{\Sigma_2}]];$$
- construir um homomorfismo de $\Sigma_1/J(\Sigma_1)$-bimódulos
$$\varphi_1 : J(\Sigma_1) \to k[[Q_{\Sigma_2}]].$$

Com os morfismos φ_0 e φ_1 em mãos, a construção de
$$\overline{\varphi} : k[[Q_{\Sigma_1}]] \to k[[Q_{\Sigma_2}]]$$
segue da propriedade universal da álgebra tensorial completa.

Construção de φ_0:

O *Teorema* 1 nos diz que existe um levantamento $\overline{s_2} : \Sigma_2/J(\Sigma_2) \to \Sigma_2$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_1/J(\Sigma_1) & \xrightarrow{\varphi^{(1)}} & \Sigma_2/J(\Sigma_2) \\ s_1\downarrow & & \downarrow\overline{s_2} \\ \Sigma_1 & \xrightarrow[\varphi]{\qquad} & \Sigma_2 \end{array}$$

comuta.

Construção de φ_0:

O *Teorema* 1 nos diz que existe um levantamento $\overline{s_2} : \Sigma_2/J(\Sigma_2) \to \Sigma_2$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_1/J(\Sigma_1) & \xrightarrow{\varphi^{(1)}} & \Sigma_2/J(\Sigma_2) \\ {\scriptstyle s_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{s_2}} \\ \Sigma_1 & \xrightarrow[\varphi]{\hspace{2cm}} & \Sigma_2 \end{array}$$

comuta.

Seja $\varphi_2 : k[[Q_{\Sigma_2}]] \to \Sigma_2$ o homomorfismo induzido dos morfismos

$$s_2 : \Sigma_2/J(\Sigma_2) \to \Sigma_2 \qquad J(\Sigma_2) \hookrightarrow \Sigma_2$$

pela propriedade universal da álgebra tensorial completa.

Construção de φ_0:

Pela versão do Teorema de Malcev para álgebras pseudocompactas [*The Malcev theorem, Frank Eckstein*], existe $x \in J(k[[Q_{\Sigma_2}]])$ tal que

$$\overline{s_2} = (1 - \varphi_2(x))^{-1} s_2 (1 - \varphi_2(x)).$$

Construção de φ_0:

Pela versão do Teorema de Malcev para álgebras pseudocompactas [*The Malcev theorem, Frank Eckstein*], existe $x \in J(k[[Q_{\Sigma_2}]])$ tal que

$$\overline{s_2} = (1 - \varphi_2(x))^{-1} s_2 (1 - \varphi_2(x)).$$

Defina

$$\begin{array}{rrcc} \varphi_0 : & \Sigma_1 / J(\Sigma_1) & \to & k[[Q_{\Sigma_2}]] \\ & a + J(\Sigma_1) & \mapsto & (1 - x)^{-1} \left(\varphi(a) + J(\Sigma_2), 0, \ldots \right) (1 - x). \end{array}$$

Exemplo

Seja Q a aljava

$$Q: \; 3 \xleftarrow{b} 2 \xleftarrow{a} 1 \; .$$

Considere o homomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & (kQ/J^2(kQ), s) & \to & (kQ/J^2(kQ), s) \\ & e_1 + J^2(kQ) & \mapsto & e_1 + a + J^2(kQ) \\ & e_2 + J^2(kQ) & \mapsto & e_2 - a + J^2(kQ) \\ & x + J^2(kQ) & \mapsto & x + J^2(kQ); x = e_3, a, b \end{array},$$

Exemplo

Seja Q a aljava

$$Q: \ 3 \xleftarrow{b} 2 \xleftarrow{a} 1 \ .$$

Considere o homomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & (kQ/J^2(kQ), s) & \to & (kQ/J^2(kQ), s) \\ & e_1 + J^2(kQ) & \mapsto & e_1 + a + J^2(kQ) \\ & e_2 + J^2(kQ) & \mapsto & e_2 - a + J^2(kQ) \\ & x + J^2(kQ) & \mapsto & x + J^2(kQ); x = e_3, a, b \end{array},$$

onde

$$\begin{array}{rccc} s: & kQ/J(kQ) & \to & kQ/J^2(kQ) \\ & e_i + J(kQ) & \mapsto & e_i + J^2(kQ) \end{array}$$

Exemplo

Seja Q a aljava

$$Q: \ 3 \xleftarrow{b} 2 \xleftarrow{a} 1 \ .$$

Considere o homomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & (kQ/J^2(kQ), s) & \to & (kQ/J^2(kQ), s) \\ & e_1 + J^2(kQ) & \mapsto & e_1 + a + J^2(kQ) \\ & e_2 + J^2(kQ) & \mapsto & e_2 - a + J^2(kQ) \\ & x + J^2(kQ) & \mapsto & x + J^2(kQ); x = e_3, a, b \end{array},$$

onde

$$\begin{array}{rccc} s: & kQ/J(kQ) & \to & kQ/J^2(kQ) \\ & e_i + J(kQ) & \mapsto & e_i + J^2(kQ) \end{array}$$

É fácil ver que a projeção canônica

$$\pi : kQ \to kQ/J^2(kQ)$$

é o homomorfismo induzido de s e da inclusão de $J(kQ/J^2(kQ))$ em $kQ/J^2(kQ)$.

Exemplo

O levantamento

$$\begin{array}{rrcl} \overline{s}: & kQ/J(kQ) & \to & kQ/J^2(kQ) \\ & e_1 + J(kQ) & \mapsto & e_1 + a + J^2(kQ) \\ & e_2 + J^2(kQ) & \mapsto & e_2 - a + J^2(kQ) \\ & e_3 + J^2(kQ) & \mapsto & e_3 + J^2(kQ) \end{array}$$

Exemplo

O levantamento

$$\begin{array}{rrcl} \overline{s}: & kQ/J(kQ) & \to & kQ/J^2(kQ) \\ & e_1 + J(kQ) & \mapsto & e_1 + a + J^2(kQ) \\ & e_2 + J^2(kQ) & \mapsto & e_2 - a + J^2(kQ) \\ & e_3 + J^2(kQ) & \mapsto & e_3 + J^2(kQ) \end{array}$$

satisfaz o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} kQ/J(kQ) & \xrightarrow{\varphi^{(1)}} & kQ/J(kQ) \\ s\downarrow & & \downarrow\overline{s} \\ kQ/J^2(kQ) & \xrightarrow[\varphi]{} & kQ/J^2(kQ) \end{array} .$$

Exemplo

Quando escolhemos $x = a \in J(kQ)$, temos

$$\overline{s} = (1 - \pi(x))^{-1} s (1 - \pi(x)). \tag{1}$$

Portanto,

$$\begin{array}{rccc} \varphi_0 : & kQ/J(kQ) & \to & kQ \\ & e_1 + J(kQ) & \mapsto & (1-a)^{-1} e_1 (1-a) = e_1 - a \\ & e_2 + J(kQ) & \mapsto & (1-a)^{-1} e_2 (1-a) = e_2 + a \\ & e_3 + J(kQ) & \mapsto & (1-a)^{-1} e_3 (1-a) = e_3 \end{array}$$

Exemplo

Quando escolhemos $x = a \in J(kQ)$, temos

$$\overline{s} = (1 - \pi(x))^{-1} s (1 - \pi(x)). \tag{1}$$

Portanto,

$$\begin{array}{rccc} \varphi_0 : & kQ/J(kQ) & \to & kQ \\ & e_1 + J(kQ) & \mapsto & (1-a)^{-1} e_1 (1-a) = e_1 - a \\ & e_2 + J(kQ) & \mapsto & (1-a)^{-1} e_2 (1-a) = e_2 + a \\ & e_3 + J(kQ) & \mapsto & (1-a)^{-1} e_3 (1-a) = e_3 \end{array}$$

A igualdade (1) também é verdadeira quando

$$x = a + ba \in J(kQ).$$

Assim, para essa escolha de x, φ_0 seria definido do seguinte modo :

$$e_1 + J(kQ) \mapsto e_1 - a - ba \qquad e_2 + J(kQ) \mapsto e_2 + a \qquad e_3 + J(kQ) \mapsto e_3 + ba$$

Construção de φ_1

Continuando com o morfismo

$$\varphi : (\Sigma_1, s_1) \to (\Sigma_2, s_2).$$

Cada $\Sigma_1/J(\Sigma_1)$-bimódulo é projetivo, segue da propriedade dos bimódulos projetivos que

$$\begin{tikzcd}
 & J(\Sigma_1) \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ddl, dashed, "\varphi_1"'] \\
 & J(\Sigma_2) \arrow[d, hook] \\
K[[Q_{\Sigma_2}]] \arrow[r, two heads, "\varphi_2"'] & \Sigma_2
\end{tikzcd} . \tag{2}$$

Defina

$$\overline{\varphi} : k[[Q_{\Sigma_1}]] \to k[[Q_{\Sigma_2}]]$$

o homomorfismo induzido de φ_0 e φ_1.

Exemplo

Voltando ao exemplo anterior:

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & (kQ/J^2(kQ), s) & \to & (kQ/J^2(kQ), s) \\ & e_1 + J^2(kQ) & \mapsto & e_1 + a + J^2(kQ) \\ & e_2 + J^2(kQ) & \mapsto & e_2 - a + J^2(kQ) \\ & x + J^2(kQ) & \mapsto & x + J^2(kQ); x = e_3, a, b \end{array},$$

onde Q é a aljava

$$Q: \ 3 \xleftarrow{b} 2 \xleftarrow{a} 1 \ .$$

Quando $x = a \in J(kQ)$, segue que

$$\overline{\varphi} : kQ \to kQ$$

é o homomorfismo definido como

$$e_1 \mapsto e_1 - a \qquad e_2 \mapsto e_2 + a \qquad e_3 \mapsto e_3 \qquad a \mapsto a \qquad b \mapsto b + ba.$$

Exemplo

Voltando ao exemplo anterior:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (kQ/J^2(kQ), s) & \to & (kQ/J^2(kQ), s) \\ & e_1 + J^2(kQ) & \mapsto & e_1 + a + J^2(kQ) \\ & e_2 + J^2(kQ) & \mapsto & e_2 - a + J^2(kQ) \\ & x + J^2(kQ) & \mapsto & x + J^2(kQ); x = e_3, a, b \end{array} .$$

Quando $x = a \in J(kQ)$, segue que

$$\overline{\varphi} : kQ \to kQ$$

é o homomorfismo definido como

$$e_1 \mapsto e_1 - a \qquad e_2 \mapsto e_2 + a \qquad e_3 \mapsto e_3 \qquad a \mapsto a \qquad b \mapsto b + ba.$$

Quando $x = a + ba$, então

$$\overline{\varphi} : e_1 \mapsto e_1 - a - ab \qquad e_2 \mapsto e_2 + a \qquad e_3 \mapsto e_3 + ba$$

$$a \mapsto a \qquad b \mapsto b + ba.$$

Dado $\varphi : (\Sigma_1, s_1) \to (\Sigma_2, s_2)$, defina

$$k[[\varphi]] = \overline{\varphi} + \sim_2$$

Dado $\varphi : (\Sigma_1, s_1) \to (\Sigma_2, s_2)$, defina

$$k[[\varphi]] = \overline{\varphi} + \sim_2$$

Perguntas naturais que surgem:

- Por que razão $k[[\varphi]]$ é bem-definido?
- $$\begin{array}{rccc} k[[-]] : & \mathbf{PAlg}^2 & \to & \mathbf{PAlg}_{\sim_2} \\ & \Sigma & \mapsto & k[[Q_\Sigma]] \\ & \varphi & \mapsto & k[[\varphi]] \end{array}$$

  é mesmo um funtor?

A resposta de ambas perguntas se encontra na proposição a seguir:

Proposição 3

Dado um morfismo $\varphi : (\Sigma_1, s_1) \to (\Sigma_2, s_2)$, *então o morfismo* $\overline{\varphi}$ *satisfaz o diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} k[[Q_{\Sigma_1}]] & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & k[[Q_{\Sigma_2}]] \\ {\scriptstyle \varphi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} \\ \Sigma_1 & \xrightarrow[\varphi]{} & \Sigma_2 \end{array},$$

onde φ_i *é o homomorfismo induzido de* s_i *e* $J(\Sigma_i) \hookrightarrow k[[Q_{\Sigma_i}]]$, *para* $i = 1, 2$.

Theorem 2

O funtor $k[[-]] : \boldsymbol{PAlg}^{\mathcal{L},2} \to \boldsymbol{PAlg}^{\mathcal{L}}_{\sim_2}$ *é adjunto à esquerda do funtor* $F_2^{\mathcal{L}} : \boldsymbol{PAlg}^{\mathcal{L}}_{\sim_2} \to \boldsymbol{PAlg}^{\mathcal{L},2}$.

Theorem 2

O funtor $k[[-]] : \boldsymbol{PAlg}^{\mathcal{L},2} \to \boldsymbol{PAlg}^{\mathcal{L}}_{\sim_2}$ é adjunto à esquerda do funtor $F_2^{\mathcal{L}} : \boldsymbol{PAlg}^{\mathcal{L}}_{\sim_2} \to \boldsymbol{PAlg}^{\mathcal{L},2}$.

Sejam $U : \mathbf{PAlg}^{\mathcal{L}}_{\sim_2} \to \mathbf{PAlg}_{\sim_2}$ funtor esquecido e $H : \mathbf{PAlg}_2 \to \mathbf{PAlg}^{\mathcal{L},2}$ um funtor quase-isomorfo ao funtor esquecimento $U : \mathbf{PAlg}^{\mathcal{L},2} \to \mathbf{PAlg}^2$. Então:

Theorem 2

O funtor $k[[-]] : \boldsymbol{PAlg}^{\mathcal{L},2} \to \boldsymbol{PAlg}^{\mathcal{L}}_{\sim_2}$ *é adjunto à esquerda do funtor* $F^{\mathcal{L}}_2 : \boldsymbol{PAlg}^{\mathcal{L}}_{\sim_2} \to \boldsymbol{PAlg}^{\mathcal{L},2}$.

Sejam $U : \mathbf{PAlg}^{\mathcal{L}}_{\sim_2} \to \mathbf{PAlg}_{\sim_2}$ funtor esquecido e $H : \mathbf{PAlg}_2 \to \mathbf{PAlg}^{\mathcal{L},2}$ um funtor quase-isomorfo ao funtor esquecimento $U' : \mathbf{PAlg}^{\mathcal{L},2} \to \mathbf{PAlg}^2$. Então:

Theorem 3

O funtor $Uk[[-]]H : \boldsymbol{PAlg}^2 \to \boldsymbol{PAlg}_{\sim_2}$ *é adjunto à esquerda do funtor* $F_2 : \boldsymbol{PAlg}_{\sim_2} \to \boldsymbol{PAlg}^2$.

Generalizando para todo n

Dizemos que uma álgebra básica A é *n-admissível* se é isomorfo a $k[[Q_A]]/I$ com $I \subseteq J^n(k[[Q_A]])$.

Generalizando para todo n

Dizemos que uma álgebra básica A é *n-admissível* se é isomorfo a $k[[Q_A]]/I$ com $I \subseteq J^n(k[[Q_A]])$.
Obs: Cada álgebra básica A é 2-admissível.

Generalizando para todo n

Dizemos que uma álgebra básica A é n-admissível se A é isomorfa a $k[[Q_A]]/I$ com $I \subseteq J^n(k[[Q_A]])$.
Obs: Cada álgebra básica A é 2-admissível.
Provamos que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{PAlg}_{\sim_n}}(k[[\Sigma]], A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{PAlg}^n}\left(\Sigma, \frac{A}{J^n(A)}\right),$$

sempre que $A \in \mathbf{PAlg}$ e $\Sigma \in \mathbf{PAlg}^n$ são álgebras n-admissíveis.

Funtor $F : A \mapsto A/J^3(A)$

- Mostramos que cada álgebra 3-admissível A pode ser aproximada funtorialmente por $k[[Q_A]]$.
- Queremos estender a adjunção para uma classe maior de álgebras.
- Em outras palavras, buscamos uma aproximação de A por um quociente da álgebra de caminhos de A por um ideal quadrático.

Dada uma álgebra $\Sigma \in \mathrm{PAlg}^3$, seja $k[[Q_\Sigma]]$ a álgebra de caminhos completas associada a Σ. Defina:

Dada uma álgebra $\Sigma \in \mathrm{PAlg}^3$, seja $k[[Q_\Sigma]]$ a álgebra de caminhos completas associada a Σ. Defina:

$$I_\Sigma = \langle x \in k[[Q_\Sigma]]_2 \cap \ker\varphi \rangle \subseteq k[[Q_\Sigma]],$$

onde $\varphi : k[[Q_\Sigma]] \twoheadrightarrow \Sigma$ é um homomorfismo induzido da escolha de dois levantamentos

$$s : \Sigma/J(\Sigma) \to \Sigma \qquad t : J(\Sigma)/J^2(\Sigma) \to J(\Sigma)$$

das respectivas projeções.

Dada uma álgebra $\Sigma \in \mathrm{PAlg}^3$, seja $k[[Q_\Sigma]]$ a álgebra de caminhos completas associada a Σ. Defina:

$$I_\Sigma = \langle x \in k[[Q_\Sigma]]_2 \cap \ker\varphi \rangle \subseteq k[[Q_\Sigma]],$$

onde $\varphi : k[[Q_\Sigma]] \twoheadrightarrow \Sigma$ é um homomorfismo induzido da escolha de dois levantamentos

$$s : \Sigma/J(\Sigma) \to \Sigma \qquad t : J(\Sigma)/J^2(\Sigma) \to J(\Sigma)$$

das respectivas projeções.

Obs: O ideal I_Σ não depende da escolha de levantamentos s e t.

Associe a cada $\Sigma \in \mathbf{PAlg}^3$ a álgebra

$$Q[[\Sigma]] := k[[Q_\Sigma]]/I_\Sigma \in \mathbf{PAlg}_{\sim_3}.$$

Exemplos

- Se $\Sigma = k[[X]]/X^3$ então $I_\Sigma = 0$. Portanto,

$$Q[[\Sigma]] = k[[X]];$$

Exemplos

- Se $\Sigma = k[[X]]/X^3$ então $I_\Sigma = 0$. Portanto,
$$Q[[\Sigma]] = k[[X]];$$
- Se $\Sigma = k[[X,Y]]/\langle X^2, Y^3\rangle$ temos que
$$\Sigma \cong k[[Q]]/\langle XY - YX, X^2, Y^3\rangle,$$
onde Q é a aljava
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "X"] \arrow[loop below, "Y"] \end{tikzcd} .$$
Portanto, $I_\Sigma = \langle X^2, XY - YX\rangle$. Assim,
$$Q[[\Sigma]] = k[[Q]]/\langle X^2, XY - YX\rangle \cong k[[X,Y]]/X^2;$$

Exemplos

- Considere Q a aljava

$$Q : \begin{tikzcd} 5 & & 3 \arrow[ll, "f"'] \arrow[dl, "d"] & & 1 \arrow[ll, "a"'] \arrow[dl, "b"] \\ & 4 \arrow[ul, "e"] & & 2 \arrow[ul, "c"] & \end{tikzcd} .$$

Se $\Sigma = kQ/\langle fa, eda, fcb, dcb, edc\rangle$ então $I_\Sigma = \langle fa\rangle$.
Portanto,

$$Q[[\Sigma]] = kQ/\langle fa\rangle.$$

Dado um morfismo $\varphi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, pretendemos associar a *varphi* um morfismo

$$Q[[f]] : k[[Q_{\Sigma_1}]]/I_{\Sigma_1} \to k[[Q_{\Sigma_2}]]/I_{\Sigma_2} \in \mathbf{PALg}_{\sim_3}.$$

Isto só é possível se existir um homomorfismo

$$\varphi' : k[[Q_{\Sigma_1}]] \to k[[Q_{\Sigma_2}]]$$

satisfazendo:

$$\begin{array}{ccc} k[[Q_{\Sigma_1}]] & \xrightarrow{\varphi'} & k[[Q_{\Sigma_2}]] \\ {\scriptstyle \varphi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} \\ \Sigma_1 & \xrightarrow[\varphi]{\qquad} & \Sigma_2 \end{array} \qquad \varphi'(I_{\Sigma_1}) \subseteq I_{\Sigma_2}.$$

Defina

$$\mathcal{H}(\Sigma_1, \Sigma_2) = \left\{\varphi : \Sigma_1 \to \Sigma_2 | \exists \varphi', \varphi_2\varphi' = \varphi\varphi_1 \text{ e } \varphi'(I_{\Sigma_1}) \subseteq I_{\Sigma_2}\right\}.$$

Obs:

$$\mathcal{H}(\Sigma_1, \Sigma_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{PAlg}_{\sim_3}}\left(\frac{k[[Q_{\Sigma_1}]]}{I_{\Sigma_1}}, \frac{k[[Q_{\Sigma_2}]]}{I_{\Sigma_2}}\right)$$

Defina

$$\mathcal{H}(\Sigma_1, \Sigma_2) = \left\{\varphi : \Sigma_1 \to \Sigma_2 | \exists \varphi', \varphi_2\varphi' = \varphi\varphi_1 \text{ e } \varphi'(I_{\Sigma_1}) \subseteq I_{\Sigma_2}\right\}.$$

Obs:

$$\mathcal{H}(\Sigma_1, \Sigma_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{PAlg}_{\sim 3}}\left(\frac{k[[Q_{\Sigma_1}]]}{I_{\Sigma_1}}, \frac{k[[Q_{\Sigma_2}]]}{I_{\Sigma_2}}\right)$$

Obs: Quando Σ_1 é uma álgebra 3-admissível,

$$\mathcal{H}(\Sigma_1, \Sigma_2) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{PAlg}^3}(\Sigma_1, \Sigma_2)$$

Considere o homomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{rcl} \varphi : k[[X]]/X^2 & \to & k[[X]]/X^3 \\ X + \langle X^2 \rangle & \mapsto & X^2 + \langle X^3 \rangle \end{array}$$

Considere o homomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{rcl} \varphi : k[[X]]/X^2 & \to & k[[X]]/X^3 \\ X + \langle X^2 \rangle & \mapsto & X^2 + \langle X^3 \rangle \end{array}$$

Se $\varphi' : k[[X]] \to k[[X]]$ é tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} k[[X]] & \xrightarrow{\varphi'} & k[[X]] \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ k[[X]]/X^2 & \xrightarrow[\varphi]{} & k[[X]]/X^3 \end{array}$$

comuta, então

$$\varphi' : X \mapsto X^2 + p,$$

onde $p \in J^3(k[[X]])$.

Considere o homomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{rcl} \varphi : k[[X]]/X^2 & \to & k[[X]]/X^3 \\ X + \langle X^2 \rangle & \mapsto & X^2 + \langle X^3 \rangle \end{array}$$

Se $\varphi' : k[[X]] \to k[[X]]$ é tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} k[[X]] \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\pi"'] & k[[X]] \arrow[d, "\pi"] \\ k[[X]]/X^2 \arrow[r, "\varphi"'] & k[[X]]/X^3 \end{tikzcd}$$

comuta, então

$$\varphi' : X \mapsto X^2 + p,$$

onde $p \in J^3(k[[X]])$. Como

$$I_{k[[X]]/X^2} = \langle X^2 \rangle \qquad I_{k[[X]]/X^3} = 0,$$

segue que

$$\varphi'(I_{k[[X]]/X^2}) = \varphi'(\langle X^2 \rangle) \nsubseteq I_{k[[X]]/X^3} = 0.$$

Portanto, $\varphi \notin \mathcal{H}(k[[X]]/X^2, k[[X]]/X^3)$.

Considere $\mathcal{H}\mathbf{PAlg}^3$ a subcategoria de $\mathbf{PAlg}^3$ com os mesmos objetos e os morfismos entre duas álgebras Σ_1 e Σ_2 são os morfismos em $\mathcal{H}(\Sigma_1, \Sigma_2)$.

Considere $\mathcal{H}\mathbf{PAlg}^3$ a subcategoria de $\mathbf{PAlg}^3$ com os mesmos objetos e os morfismos entre duas álgebras Σ_1 e Σ_2 são os morfismos em $\mathcal{H}(\Sigma_1, \Sigma_2)$.
Defina:

$$\begin{array}{rcl} Q[[-]] : \mathcal{H}\mathbf{PAlg}^3 & \to & \mathbf{PAlg}_{\sim_3} \\ \Sigma & \mapsto & k[[Q_\Sigma]]/I_\Sigma \\ \varphi & \mapsto & \overline{\varphi}' + \sim_3; \end{array}$$

Considere $\mathcal{H}\mathbf{PAlg}^3$ a subcategoria de $\mathbf{PAlg}^3$ com os mesmos objetos e os morfismos entre duas álgebras Σ_1 e Σ_2 são os morfismos em $\mathcal{H}(\Sigma_1, \Sigma_2)$.
Defina:

$$\begin{array}{rcc} Q[[-]] : \mathcal{H}\mathbf{PAlg}^3 & \to & \mathbf{PAlg}_{\sim_3} \\ \Sigma & \mapsto & k[[Q_\Sigma]]/I_\Sigma \\ \varphi & \mapsto & \overline{\varphi}' + \sim_3; \end{array}$$

onde $\overline{\varphi}' : k[[Q_{\Sigma_1}]]/I_{\Sigma_1} \to k[[Q_{\Sigma_2}]]/I_{\Sigma_2}$ é o único homomorfismo tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} k[[Q_{\Sigma_1}]] \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\pi"'] & k[[Q_{\Sigma_2}]] \arrow[d, "\pi"] \\ k[[Q_{\Sigma_1}]]/I_{\Sigma_1} \arrow[r, dashed, "\overline{\varphi}'"'] & k[[Q_{\Sigma_2}]]/I_{\Sigma_2} \end{tikzcd}$$

comuta.

Defina $\mathcal{H}\mathbf{PAlg}_{\sim_3}$ a subcategoria de $\mathbf{PAlg}_{\sim_3}$ do seguinte modo:

Defina $\mathcal{H}\mathbf{PAlg}_{\sim_3}$ a subcategoria de $\mathbf{PAlg}_{\sim_3}$ do seguinte modo:

- os objetos são álgebras A tais que existem

$$s : A/J(A) \to A \qquad t : J(A)/J^2(A) \to J(A)$$

satisfazendo

$$I_{A/J^3(A)} \subseteq \ker\varphi,$$

onde $\varphi : k[[Q_A]] \to A$ é o homomorfismo induzido de s e t pela propriedade universal da álgebra tensorial completa.

Defina $\mathcal{H}\mathbf{PAlg}_{\sim_3}$ a subcategoria de $\mathbf{PAlg}_{\sim_3}$ do seguinte modo:

- os objetos são álgebras A tais que existem

$$s : A/J(A) \to A \qquad t : J(A)/J^2(A) \to J(A)$$

  satisfazendo

$$I_{A/J^3(A)} \subseteq \ker\varphi,$$

  onde $\varphi : k[[Q_A]] \to A$ é o homomorfismo induzido de s e t pela propriedade universal da álgebra tensorial completa.
- os morfismos entre A e B são os morfismos cuja a imagem por F_3 pertence a $\mathcal{H}(F_3A, F_3B)$.

Considere os funtores

$$\begin{array}{rccc} Q[[-]] : & \mathcal{H}\mathbf{PAlg}^3 & \to & \mathcal{H}\mathbf{PAlg}_{\sim_3} \\ & \Sigma & \mapsto & k[[Q_\Sigma]]/I_\Sigma \\ & \varphi & \mapsto & \overline{\varphi}' + \sim_3; \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{H}F_3 : & \mathcal{H}\mathbf{PAlg}_{\sim_3} & \to & \mathcal{H}\mathbf{PAlg}^3 \\ & A & \mapsto & A/J^3(A) \\ & f + \sim_3 & \mapsto & f^{(3)}. \end{array}$$

Considere os funtores

$$\begin{array}{rccc} Q[[-]]: & \mathcal{H}\mathbf{PAlg}^3 & \to & \mathcal{H}\mathbf{PAlg}_{\sim_3} \\ & \Sigma & \mapsto & k[[Q_\Sigma]]/I_\Sigma \\ & \varphi & \mapsto & \overline{\varphi}' + \sim_3; \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{H}F_3: & \mathcal{H}\mathbf{PAlg}_{\sim_3} & \to & \mathcal{H}\mathbf{PAlg}^3 \\ & A & \mapsto & A/J^3(A) \\ & f + \sim_3 & \mapsto & f^{(3)}. \end{array}$$

Theorem 4

O funtor $Q[[-]] : \mathcal{H}\boldsymbol{PAlg}^3 \to \overline{\mathcal{H}}\boldsymbol{PAlg}_{\sim_3}$ é adjunto à esquerda do funtor $\mathcal{H}F_3 : \overline{\mathcal{H}}\boldsymbol{PAlg}_{\sim_3} \to \mathcal{H}\boldsymbol{PAlg}^3$.

A adjunção é verdadeira para álgebras $A \in \mathbf{PAlg}$ da forma

$$A \cong \frac{k[[Q_A]]}{I_2 + I_3},$$

onde I_2 é um ideal homogêneo de grau 2 e I_3 é um ideal contido em $J^3(k[[Q_A]])$.

A adjunção é verdadeira para álgebras $A \in \mathbf{PAlg}$ da forma

$$A \cong \frac{k[[Q_A]]}{I_2 + I_3},$$

onde I_2 é um ideal homogêneo de grau 2 e I_3 é um ideal contido em $J^3(k[[Q_A]])$.
Nem toda álgebra $A \in \mathbf{PAlg}$ é dessa forma. Veja o exemplo a seguir.

Considere a álgebra $A = kQ/I$, onde

$$Q: \begin{tikzcd} 5 & & 3 \arrow[ll, "f"'] \arrow[dl, "d"] & & 1 \arrow[ll, "a"'] \arrow[dl, "b"] \\ & 4 \arrow[ul, "e"] & & 2 \arrow[ul, "c"] & \end{tikzcd} \qquad I = \langle fa - edcb \rangle.$$

Considere a álgebra $A = kQ/I$, onde

$$Q: \begin{tikzcd} 5 & & 3 \arrow[ll, "f"'] \arrow[dl, "d"] & & 1 \arrow[ll, "a"'] \arrow[dl, "b"] \\ & 4 \arrow[ul, "e"] & & 2 \arrow[ul, "c"] & \end{tikzcd} \qquad I = \langle fa - edcb \rangle.$$

Como

$$F_3 A = kQ/\langle fa, dcb, fcb, eda, edc \rangle,$$

segue que

$$I_{A/J^3(A)} = \langle fa \rangle.$$

Se $A \in \mathcal{H}\mathbf{PAlg}_{\sim_3}$, então existiria uma sobrejeção

$$kQ/\langle fa \rangle \twoheadrightarrow kQ/I.$$

Considere a álgebra $A = kQ/I$, onde

$$Q : \begin{tikzcd} 5 & & 3 \arrow[ll, "f"'] \arrow[dl, "d"] & & 1 \arrow[ll, "a"'] \arrow[dl, "b"] \\ & 4 \arrow[ul, "e"] & & 2 \arrow[ul, "c"] & \end{tikzcd} \qquad I = \langle fa - edcb \rangle.$$

Como

$$F_3 A = kQ/\langle fa, dcb, fcb, eda, edc \rangle,$$

segue que

$$I_{A/J^3(A)} = \langle fa \rangle.$$

Se $A \in \mathcal{H}\mathbf{PAlg}_{\sim_3}$, então existiria uma sobrejeção

$$kQ/\langle fa \rangle \twoheadrightarrow kQ/I.$$

Portanto, $kQ/\langle fa \rangle \cong kQ/I$, absurdo! Concluindo que $A \notin \mathcal{H}\mathbf{PAlg}_{\sim_3}$.

A adjunção é verdadeira para álgebras $A \in \mathbf{PAlg}$ da forma

$$A \cong \frac{k[[Q_A]]}{I_2 + I_3},$$

onde I_2 é um ideal homogêneo de grau 2 e I_3 é um ideal contido em $J^3(k[[Q_A]])$.

A adjunção é verdadeira para álgebras $A \in \mathbf{PAlg}$ da forma

$$A \cong \frac{k[[Q_A]]}{I_2 + I_3},$$

onde I_2 é um ideal homogêneo de grau 2 e I_3 é um ideal contido em $J^3(k[[Q_A]])$.
Exemplos:

- álgebras homogêneas;
- álgebras 3-admissíveis.

Exemplo

Considere a álgebra $A = kQ/I$, onde

$$Q: \begin{tikzcd} 5 & 4 \arrow[l, "e"'] & & 3 \arrow[l, "d"'] & & 1 \arrow[ll, "a"'] \arrow[dl, "b"] \\ & & & & 2 \arrow[ul, "c"] & \end{tikzcd} \qquad I = \langle da - dcb, eda \rangle.$$

O ideal quadrático de $A/J^3(A) = kQ/\langle da, dcb, edc \rangle$ é

$$I_{A/J^3(A)} = \langle da \rangle.$$

Exemplo

Considere a álgebra $A = kQ/I$, onde

$$Q: \begin{tikzcd} 5 & 4 \arrow[l, "e"'] & 3 \arrow[l, "d"'] & & 1 \arrow[ll, "a"'] \arrow[dl, "b"] \\ & & & 2 \arrow[ul, "c"] & \end{tikzcd} \qquad I = \langle da - dcb, eda \rangle.$$

O ideal quadrático de $A/J^3(A) = kQ/\langle da, dcb, edc \rangle$ é

$$I_{A/J^3(A)} = \langle da \rangle.$$

O homomorfismo de álgebras $\varphi : kQ/\langle da \rangle \to kQ/I$ levando

$$a + \langle da \rangle \mapsto a - cb + I$$

é uma uma aproximação de A pela álgebra quadrática de $A/J^3(A)$.

Agradecimentos

Agradeço pela atenção!