Contexto da apresentação:

- Reta projetiva com peso. Categoria de feixes coerentes Coh $\mathbb{X}$.
- Propriedades de Coh $\mathbb{X}$.
- Um resultado que mostra uma forte conexão entre álgebra e geometria.
- sequências excepcionais em Coh $\mathbb{X}$.
- mutação de par excepcional
- ação do grupo de tranças
- Aplicação para dimensão global forte.

Reta projetiva com peso $(\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}})$.

Seja $p = (p_1, \dots, p_t)$ $p_i > 0$, $p_i \in \mathbb{Z}$ uma sequência peso é uma sequência de pontos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)$ dois a dois distintos em $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ (Assumindo $\lambda_1 = \infty$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$)

Seja:

$\mathbb{L}(p)$ grupo abeliano de rank 1 com geradores $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_t$ com relações

$$p_1\vec{x}_1 = \dots = p_t\vec{x}_t := \vec{c}.$$

Um elemento $\vec{x} \in \mathbb{L}(p)$ tem a forma normal

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{t} l_i \vec{x}_i + l\vec{c} \quad \text{com } 0 \le l_i \le p_i - 1 \text{ e } l \in \mathbb{Z}.$$

Seja S a álgebra comutativa:

$$S = S(p,\lambda) = K[X_1, \dots, X_t] \big/ I$$

$$I = (f_3, \dots, f_t) \qquad f_i = X_i^{p_i} - X_2^{p_2} + \lambda_i X_1^{p_1}$$

S é $\mathbb{L}(p)$-graduado fazendo $\deg X_i = \vec{x}_i$.

A reta projetiva com peso p e parâmetros λ é definida por

$$\mathbb{X} = \operatorname{Proj}^{\mathbb{L}(p)} S$$

o espectro projetivo dos ideais primos homogêneos $\mathbb{L}(p)$-graduados de S.

A categoria de feixes coerentes sobre $\mathbb{X}$ é a categoria quociente

$$\operatorname{Coh}\mathbb{X} = \operatorname{mod}^{\mathbb{L}(p)} S \Big/ \operatorname{mod}_0^{\mathbb{L}(p)} S$$

cat. dos S-módulos $\mathbb{L}(p)$-graduados f.g.

subcategoria de Serre dos S-módulos $\mathbb{L}(p)$-graduados de comprimento finito.

Se denotarmos por $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{X}}$ o feixe estrutural, um feixe sobre $\mathbb{X}$ pode ser pensado como um feixe $\mathbb{L}(p)$-graduado de $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}$-módulos.

O grupo $\mathbb{L}(p)$ age sobre a categoria dos $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}$-módulos $\mathbb{L}(p)$-graduados pelo shift do grau:

$$(\vec{l}, M) \longmapsto M(\vec{l})$$

$$M(\vec{l})_{\vec{x}} = M(\vec{l} + \vec{x}).$$

Coh X é uma categoria abeliana e hereditária com dualidade de Serre.

Hereditária $= \boxed{\mathrm{Ext}^2(\_,\_) = 0}$

$$D\mathrm{Ext}^1(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}(Y, X(\vec{\omega}))$$

$D = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\_, \mathbb{K})$.

$\vec{\omega} := (t-2)\vec{c} - \sum_{i=1}^{t} \vec{x}_i$ é o elemento dualizante.

Se vale a dualidade de Serre então a categoria tem sequências quase cindidas.

Denotaremos o transladado de Auslander-Reiten $\tilde{\tau}$ por
$\tilde{\tau}(\ ) = (\ )\vec{\omega}$

A categoria $\operatorname{coh}\mathbb{X}$ admite um par de torção cindido
$(\operatorname{coh}_0 \mathbb{X}, \operatorname{Vec}\mathbb{X})$

vector bundles.

subcategorias plenas

feixes de torsão

O módulo livre S nos fornece o feixe estrutural $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}$ e cada objeto de $\operatorname{Vec}\mathbb{X}$ tem uma filtração por line bundles isto é, feixes da forma

$\mathcal{O}(\vec{x})$ e para qualquer $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{L}(p)$

$$\mathrm{Hom}\left(\mathcal{O}(\vec{x}), \mathcal{O}(\vec{y})\right) = S_{\vec{y}-\vec{x}}$$

Escrevendo $\vec{y}-\vec{x}$ na forma normal $\vec{y}-\vec{x} = l\vec{c} + \sum_{i=1}^{t} l_i \vec{x}_i$ então

$$\dim S_{\vec{y}-\vec{x}} = l+1 \quad \text{se } l \geq -1.$$

Observação:
Existe um mergulho natural entre as categorias de feixes coerentes

$$i : \operatorname{Coh} \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \longrightarrow \operatorname{Coh} \mathbb{X}$$

$$\mathcal{O}(n) \longmapsto \mathcal{O}(n\vec{c})$$

que induz um mergulho

$$i : \mathcal{D}^b(\operatorname{Coh} \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}) \longrightarrow \mathcal{D}^b(\operatorname{Coh} \mathbb{X})$$

A subcategoria $\operatorname{Coh} \mathbb{X}$ admite feixes simples ordinários

$$S_\lambda \qquad \lambda \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$$

e feixes simples excepcionais $S_{i,j}$ para $1 \leq i \leq t$ e $j \in \mathbb{Z}_{p_i}$.

Os feixes ordinários são determinados pelas seq. exatas

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{X_2^{p_2} - \lambda X_1^{p_1}} \mathcal{O}(\vec{c}) \longrightarrow S_\lambda \longrightarrow 0$$

e os simples excepcionais por

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(j\vec{x}_i) \xrightarrow{X_i} \mathcal{O}((j+1)\vec{x}_i) \longrightarrow S_{i,j} \longrightarrow 0$$

O seguinte resultado de Geigle-Lenzing nos fornece uma relação entre "retas projetivas com peso" e "álgebras canônicas".

Th. $T = \bigoplus_{0 \le \vec{x} \le \vec{c}} \mathcal{O}(\vec{x}) \in \operatorname{Coh} \mathbb{X}$.

Então $\operatorname{End} T$ é isomorfa à álg. canônica

e $\mathcal{D}^b(\operatorname{Coh}\mathbb{X}) \simeq \mathcal{D}^b(\operatorname{End} T)$.

Objetos Excepcionais.

$E \in \operatorname{Coh}\mathbb{X}$ $\qquad \operatorname{Ext}^i(E, E) = \delta_{i,0} \mathbb{K}$.

Exemplo de Objetos Excepcionais:

Line Bundles

De fato, $\operatorname{Hom}(\mathcal{O}(\vec{x}), \mathcal{O}(\vec{x})) = S_0$

e $\dim S_0 = 0 + 1 = 1$.

$\therefore \operatorname{End} \mathcal{O}(\vec{x}) \simeq \mathbb{K}$.

$\operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}(\vec{x}), \mathcal{O}(\vec{x})) \simeq D\operatorname{Hom}(\mathcal{O}(\vec{x}), \mathcal{O}(\vec{x} + \vec{\omega})) \simeq S_{\vec{\omega}}$

$\dim S_{\vec{\omega}} = 0$.

Sequências de objetos excepcionais.

$(E_1, \dots, E_n)$ $\qquad n = \operatorname{rank} \operatorname{Coh} \mathbb{X}$

- E_i é excepcional $1 \leq i \leq n$.
- $\operatorname{Ext}^1(E_j, E_i) = 0 \qquad j > i$
- $\operatorname{Hom}(E_j, E_i) = 0 \qquad j > i$.

Exemplo: Os line bundles que aparecem no tilting canônico podem ser dispostos de forma a obter-se uma sequência de objetos excepcionais.

$(\mathcal{O}, \mathcal{O}(\vec{x}), \dots, \mathcal{O}((p_1-1)\vec{x}_1), \mathcal{O}(\vec{x}_2), \dots,$
$\mathcal{O}((p_2-1)\vec{x}_2), \mathcal{O}(\vec{x}_t), \dots, \mathcal{O}((p_t-1)\vec{x}_t), \mathcal{O}(\vec{c}))$

Exemplo

$p = (\underset{p_1}{2}, \underset{p_2}{2})$

$$\operatorname{rk} \operatorname{Coh} \mathbb{X} = 2 + \sum_{i=1}^{2} (p_i - 1) = 4.$$

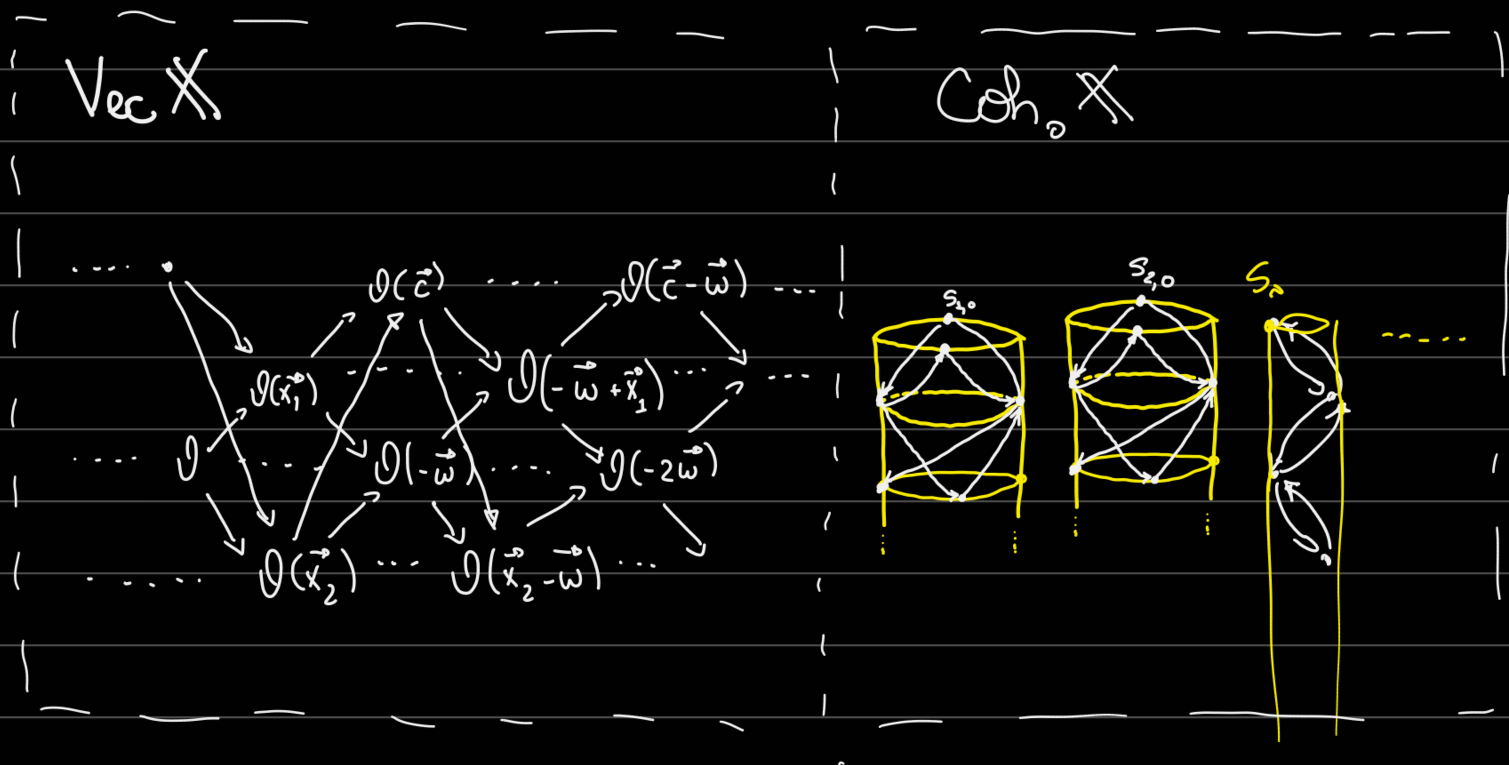
$$\vec{\omega} = -\vec{x}_1 - \vec{x}_2$$

$$\vec{c} = 2\vec{x}_1 = 2\vec{x}_2$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(\vec{x}_1) \longrightarrow S_{1,0} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(\vec{x}_2) \longrightarrow S_{2,0} \longrightarrow 0$$

O quiver de Auslander-Reiten de $\operatorname{Coh} \mathbb{X}(2,2)$ pode ser assim descrito:



objetos de comprimento finito. Esta categoria pode ser decomposta numa união de tubos 2 a 2 ortogonais. Note que neste exemplo temos 2 tubos de posto 2.

Os tubos homogeneos desta família podem ser pensados como "uma categoria" equivalente à categoria das representações nilpotentes do quiver de Jordan.

(A, B) par excepcional se

$$\mathrm{Hom}(B, A) = 0 = \mathrm{Ext}^1(B, A)$$

Temos que para para excepcional
$\mathrm{Hom}(A, B) = 0$ ou $\mathrm{Ext}^1(A, B) = 0$

Se

- $\mathrm{Hom}(A, B) \neq 0$ definimos

$$\mathrm{Hom}(A, B) \otimes_K A \xrightarrow{\text{can}} B$$
$$f \otimes a \longmapsto f(a).$$

Este morfismo é mono ou epi

Mutação à esquerda.

$$(A, B) \rightsquigarrow (L_A B, A)$$

onde $L_A B$ é kernel ou cokernel em:

$$0 \to L_A B \to \mathrm{Hom}(A, B) \otimes A \xrightarrow{\text{can}} B \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, B) \otimes_K A \xrightarrow{\text{can}} B \longrightarrow L_A B \to 0$$

Se $\operatorname{Ext}^1(A,B) \neq 0$, tomamos a

$$0 \to B \longrightarrow L_A B \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(A,B) \otimes_k A \longrightarrow 0.$$

sequência exata universal.

Com isso fica definida a mutação de um par excepcional nos casos em que

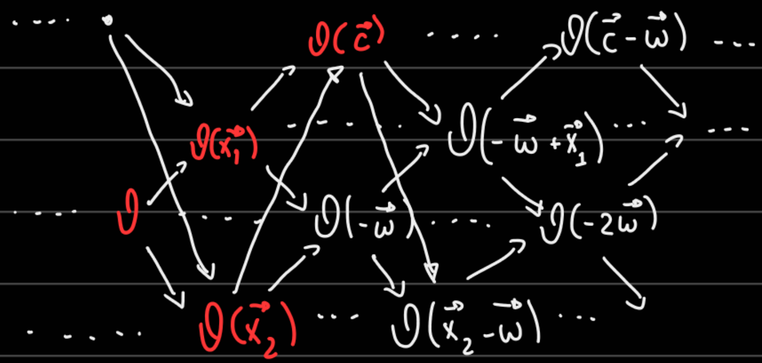
$$\operatorname{Hom}(A,B) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{Ext}^1(A,B) \neq 0$$

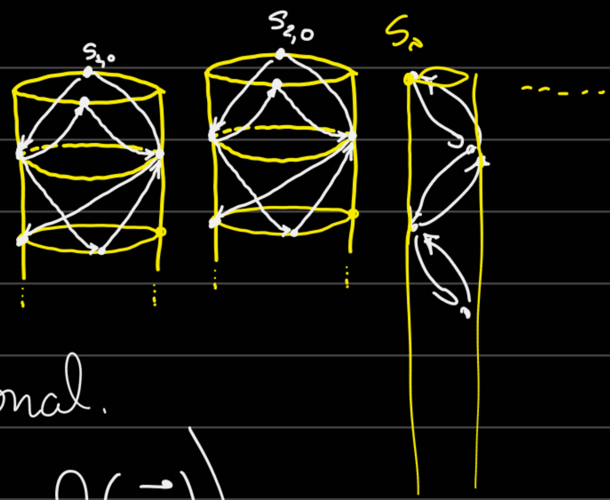
Se $\operatorname{Hom}(A,B) = 0 = \operatorname{Ext}^1(A,B)$

$$(A,B) \longrightarrow (B,A)$$

Exemplo:

Vec $\mathbb{X}$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{Coh}_0\,\mathbb{X}$





Considere a sequência excepcional.

$$(\mathcal{O}, \mathcal{O}(\vec{x}_1), \mathcal{O}(\vec{x}_2), \mathcal{O}(\vec{c}))$$

$$(\mathcal{O}, \mathcal{O}(\vec{x}_1)) \xrightarrow{\text{mutação}} (S_{1,0}, \mathcal{O})$$

$$(\mathcal{O}, \mathcal{O}(\vec{x}_2)) \xrightarrow{\text{mutação}} (S_{2,0}, \mathcal{O})$$

Considere o grupo de tranças

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad i-j \geq 2,$$
$$\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_1 \rangle$$

Acão de B_n sobre o conjunto das sequências excepcionais.

definimos:

$$\sigma_i(E_1, \dots, E_n) = (E_1, \dots, E_{i-1}, L_{E_i}E_{i+1}, E_i, E_{i+2}, \dots E_n)$$

Para definir σ_i^{-1}, fazemos:

$$\sigma_i^{-1}(E_1, \dots, E_n) = (E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, R E_{i+1}, E_i, \dots, E_n)$$

Para isso utilizamos uma das sequências exatas

$$0 \to A \to D\,\mathrm{Hom}(A,B) \otimes B \longrightarrow R_B A \to 0$$

$$0 \to R_B A \to A \longrightarrow D\,\mathrm{Hom}(A,B) \otimes_k B \longrightarrow 0$$

$$0 \to D\,\mathrm{Ext}^1(A,B) \otimes_k B \longrightarrow R_B A \to A \to 0.$$

Th: Alvares, Marcos, Meltzer.

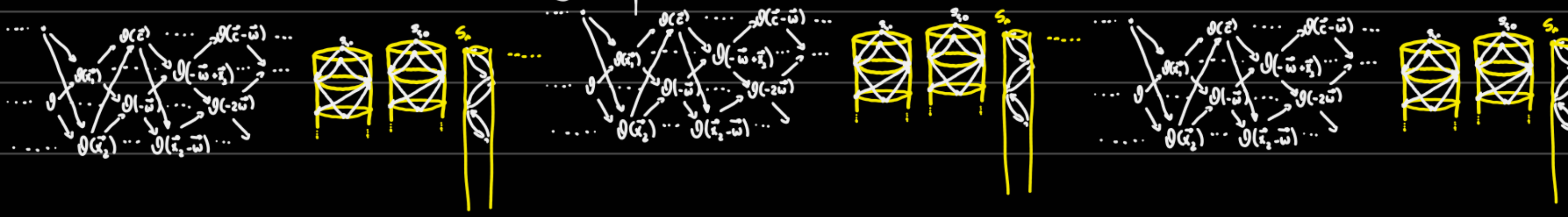
A acão do grupo de trancas sobre o conjunto das sequências excepcionais completas é transitiva

A idéia da prova consiste em mostrar que na órbita de uma seqüência excepcional tem uma seqüência excepcional com um simples S.

Podemos também mostrar que na órbita dos objetos excepcionais do tilting canônico está o mesmo simples S.

Como $S^{\perp} = \operatorname{coh} \mathbb{X}'$ onde $\mathbb{X}'$ é uma reta projetiva com peso tal que $\operatorname{rank} \operatorname{coh} \mathbb{X}' < \operatorname{rank} \operatorname{coh} \mathbb{X}$ e $\operatorname{coh} \mathbb{X}'$ contém as duas seqüências excepcionais ao sacar o simples S, então por hipótese de recorrência a ação é transitiva e podemos terminar a prova.

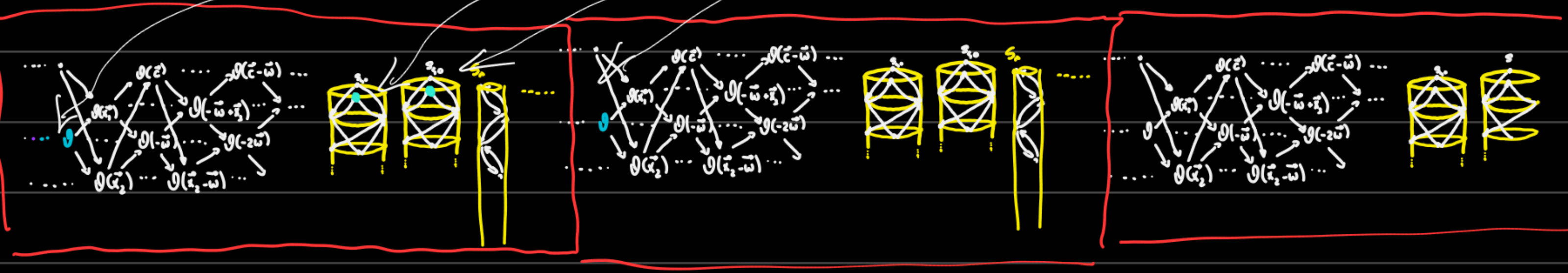
Vamos aplicar este resultado para analisar a dimensão global forte de uma álgebra. $\mathcal{D}^b(\mathrm{Coh}\,\mathbb{X})$ pode ser assim representado:



Se A é uma K-álgebra tal que
$$\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}\,A) \simeq \mathcal{D}^b(\mathrm{Coh}\,\mathbb{X})$$
então
$$A \simeq \mathrm{End}\,T^{\bullet} \quad \text{onde}$$
$T^{\bullet}$ é um complexo tilting.
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathbb{X})}(T^{\bullet}, T^{\bullet}[i]) = 0 \qquad \forall\, i \neq 0.$$
e $T^{\bullet}$ gera $\mathcal{D}^b(\mathrm{Coh}\,\mathbb{X})$.

Exemplo:

$$T = \mathcal{O} \oplus S_{1,1} \oplus S_{1,2} \oplus \mathcal{O}[1]$$



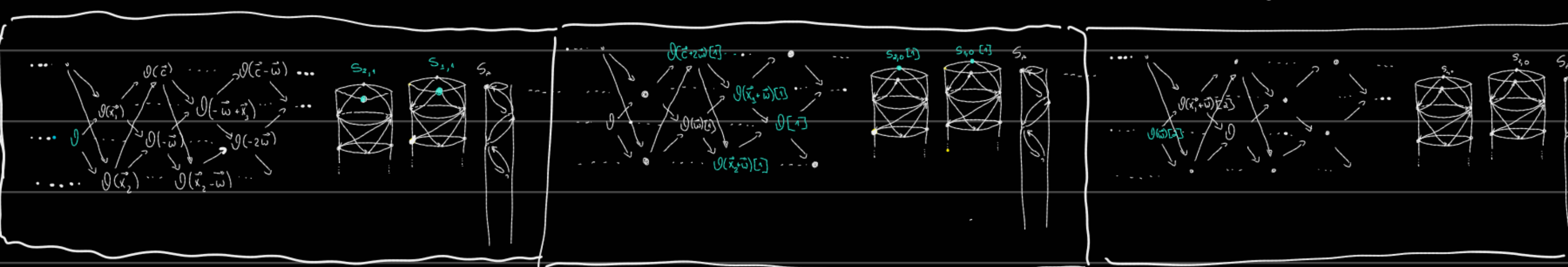
coh $\mathbb{X}$ | coh $\mathbb{X}[1]$ | coh $\mathbb{X}[2]$

Este tilting está espalhado por coh $\mathbb{X}$ $\vee$ coh $\mathbb{X}[1]$. Já a categoria de módulos de $\operatorname{End} T^{\circ}$ está espalhada

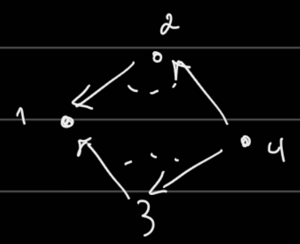
$$\operatorname{mod}(\operatorname{End} T) \subset \mathcal{D}^b(\operatorname{coh} \mathbb{X})$$

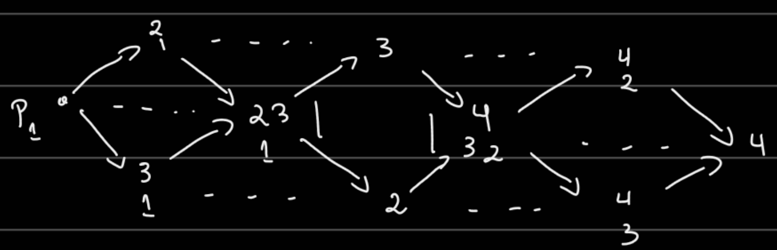
como podemos ver abaixo.

coh $\mathbb{X}$ | coh $\mathbb{X}[1]$ | coh $\mathbb{X}[2]$



$\operatorname{End} T^{\circ}$ é a álgebra dada pelo quiver ordinário e tem como quiver de A.R.





Vamos lembrar o seguinte resultado

Th: Alvares, Le Meur, Marcos

Seja $T \in \mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ um objeto tilting e $\mathcal{H}$ uma cat. hereditária.

Suponha $\operatorname{End} T^{op}$ não é uma álgebra hereditária.

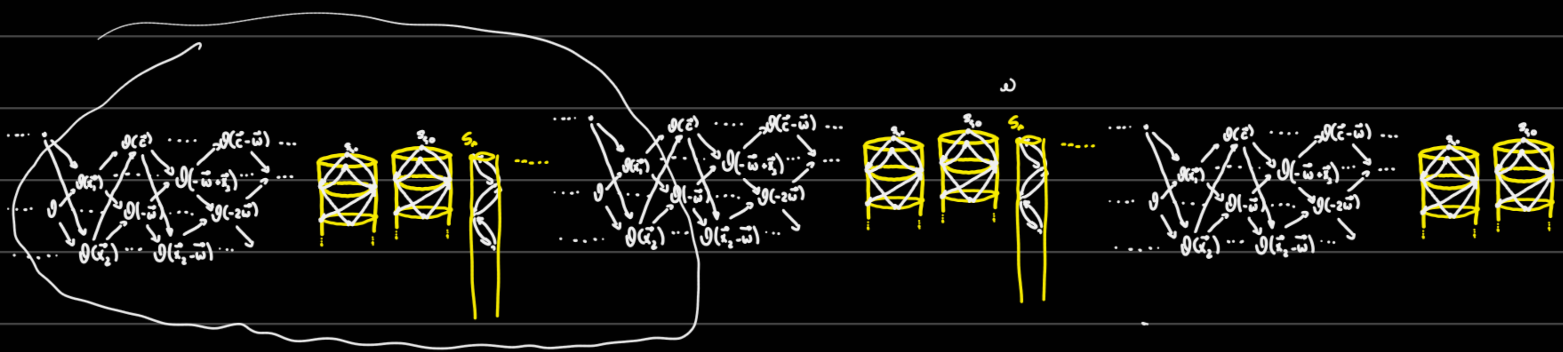
Então existe uma subcategoria $\mathcal{H}' \subset \mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ que é abeliana e hereditária tal que $T \in \bigvee_{i=1}^{\ell} \mathcal{H}'[i]$ para algum $\ell \geq 0$

e

$\operatorname{Sgldim} \operatorname{End} T^{op} \leq \ell + 2$ para qualquer par $(\mathcal{H}', \ell)$ e existe um par tal que $\operatorname{Sgldim} \operatorname{End} T^{op} = \ell + 2$.

No nosso exemplo acima podemos escolher uma nova categoria hereditária $\mathcal{H}'$ como mostra o desenho tal que $T \in \mathcal{H}'$.

$$T = \mathcal{O} \oplus S_{1,1} \oplus S_{1,2} \oplus \mathcal{O}[1]$$



Desta forma sgldim End $T = 2$.

Definimos

$$\operatorname{stgldim} \mathbb{X} = \max\{\operatorname{sgldim} A \mid \mathcal{D}^b(\operatorname{mod} A) \simeq \mathcal{D}^b(\operatorname{coh} \mathbb{X})$$

Como aplicação da transitividade do grupo de tranças podemos mostrar que se $\mathbb{X}' = \mathbb{X}(p, \lambda')$ isto é, uma reta projetiva com os mesmos pesos e parametros distintos, então

$$\operatorname{stgldim} \mathbb{X} = \operatorname{stgldim} \mathbb{X}'$$