2.4 Subespaços

Definição 2.37 *Seja* $\langle M, d\rangle$ *um espaço métrico e* $E \subseteq M$. *A restrição de* d *'a* $E \times E$ *fornece uma métrica em* E, *com a qual* E *torna-se um espaço métrico, denominado* **sub-espaço de M de domínio E**. *Quando necessário indicar a métrica usaremos* $\langle E, d\rangle$ *no lugar de* $\langle E, d_{|E\times E}\rangle$.

Se $p \in E$ *e* $r > 0$, *escrevemos*

$$N_r^E(p) \;=\; \{q \in E : d(p,q) < r\}$$

para indicar a bola aberta de raio r *e centro* p *no espaço métrico* $\langle E, d\rangle$.

Lema 2.38 *Se* $\langle M, d\rangle$ *um espaço métrico e* E *um sub-espaço de* M.

a) As sequintes condições são equivalentes para $U \subseteq E$:

(1) U *é aberto em* $\langle E, d\rangle$; (2) U *é interseção de um aberto de* M *com* E.

b) As sequintes condições são equivalentes para $K \subseteq E$:

(1) K *é fechado em* E; (2) K *é interseção de um fechado de* M *com* E.

Prova. Para (a), basta notar que para $p \in E$ e $r > 0$

$$N_r^E(p) \;=\; N_r(p) \cap E,$$

para concluir que (1) $\Leftrightarrow$ (2). O ítem (b) é consequência imediata de (a) e da definição de fechado. $\square$

O Lema 2.38 garante que a topologia de sub-espaço é a mais natural possível : os abertos e fechados do sub-espaço são a interseção de abertos ou fechados do ambiente com o o domínio do sub-espaço.

2.5 Sequências

Definição 2.39 *Uma* **sequência em um conjunto A** *é uma função* $s : \omega \longrightarrow A$. *Em geral indicamos* s *por* s_n, $n \geq 1$.

Se s *é um sequência, uma* **subsequência de s** *é a restrição de* s *a um subconjunto* <u>*infinito*</u> J *de* ω, *isto é,* $s_{|J}$. *Em geral, indicamos uma subsequência de* s *por* s_{n_k}, $k \geq 1$ [10].

Definição 2.40 *Seja* $\langle M, d\rangle$ *um espaço métrico,* x_n, $n \geq 1$, *uma sequência em* M *e* x *um ponto de* M. *Dizemos que* **x_n converge para x** *e escrevemos*

$$x_n \longrightarrow x \quad ou \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

s a seguinte condição estiver satisfeita

(lim) *Para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* n_0 *tal que para todo* $n \geq n_0$, $d(x_n, x) \leq \varepsilon$.

[10] Neste caso, $J = \{n_k : k \geq 1\}$.

Lema 2.41 *Seja M um espaço métrico, $E \subseteq M$ e $x \in M$.*

a) $x \in \overline{E}$ sse existe uma sequência em E que converge para x.

b) $x \in E'$ [11] *sse existe uma sequência* <u>*infinita*</u> *em E que converge para x.*

c) Se $x_n \longrightarrow x$, toda subsequência de x_n converge para x.

Prova. Para (a) é só lembrar que $x \in \overline{E}$ sse para todo $n \geq 1$, $N_{1/n}(x) \cap E \neq \emptyset$, para produzir uma sequência em E que converge para x. No caso de (b), podemos garantir que a sequência é infinita, pois cada interseção $N_{1/n}(x) \cap E$ é infinita. O item (c) vem imediatamente da Definição 2.40. $\square$

Proposição 2.42 *Sejam $\langle M_n, d_n \rangle$ uma sequência de espaços métricos e x, σ_k, $k \geq 1$, um ponto e uma sequência em $M \overset{def}{=} \prod_{n\geq 1} M_n$* [12]*. Então σ_n converge para x sse converge em cada coordenada, isto é, as seguintes condições são equivalentes :*

(1) *$\sigma_k \longrightarrow x$ em $\prod_{n\geq 1} M_n$;*

(2) *Para todo $n \geq 1$, $\sigma_k(n) \longrightarrow x(n)$ em M_n.*

Prova. É importante lembrar que um elemento de M é uma função $\sigma : \omega \longrightarrow \bigcup_{n\geq 1} M_n$, tal que $\sigma(n) \in M_n$. Além disso, a métrica que consideramos padrão no produto é

$$(*) \qquad d(x, y) \;=\; \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \, \frac{d_n(x(n), y(n))}{1 + d_n(x(n), y(n))}.$$

Fato. *Para $u \geq 0$ e $0 < \varepsilon \leq 1$,* $\dfrac{u}{1+u} \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \;\Rightarrow\; u \leq \varepsilon$.

Prova. $\dfrac{u}{1+u} \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \quad\Rightarrow\quad 2u \leq \varepsilon(1+u) \quad\Rightarrow\quad u \leq \dfrac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \leq \varepsilon.$ $\triangle$

<u>(1) $\Rightarrow$ (2)</u> : Fixemos uma coordenada $n \geq 1$ e um real $\varepsilon > 0$. A definição de convegência garante que existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$

$$d(\sigma_k,\, x) \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Uma vez que $d(\sigma_k,\, x)$ é dada pela soma da série em (*), concluímos que a parcela relativa à coordenada n deve satisfazer

$$\text{Para todo } k \geq k_0,\; \frac{1}{2^n}\, \frac{d_n(\sigma_k(n),\, x(n))}{1 + d_n(\sigma_k(n),\, x(n))} \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},$$

e portanto seque do Fato provado acima que $\forall\, k \geq k_0$, $d_n(\sigma_k(n),\, x(n)) \;\leq\; \varepsilon$, mostrando que $\sigma_k(n)$ converge para $x(n)$ em M_n.

<u>(2) $\Rightarrow$ (1)</u> : Para um real $\varepsilon > 0$, seja $n \geq 1$ tal que

$$(**) \qquad \sum_{m\geq n+1} \frac{1}{2^m} \;<\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

Isto é posssivel pois a série geométrica de razão $1/2$ é convergente. Para cada $1 \leq j \leq n$, a convergência de $\sigma_k(j)$ para $x(j)$ em M_j fornece $k_{j0} \geq 1$ tal que

[11] E' é o conjunto dos pontos de acumulação de E.

[12] Como em 2.35.

(***) $\qquad$ Para todo $k \geq k_{j0}$, $\; d_j(\sigma_k(j), \; x(j)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Seja $k_0 = \max_{1 \leq j \leq n} k_{j0}$. Então, se $k \geq k_0$, as relações (*), (**) e (***) acarretam

$$\begin{aligned} d(\sigma_k, x) &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(\sigma_k(n), x(n))}{1 + d_n(\sigma_k(n), x(n))} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{2^j} \frac{d_j(\sigma_k(j), x(j))}{1 + d_j(\sigma_k(j), x(j))} + \sum_{m \geq n+1} \frac{1}{2^m} \frac{d_m(\sigma_k(m), x(m))}{1 + d_m(\sigma_k(m), x(m))} \\ &< \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando que $\sigma_k \longrightarrow x$ em M. □

No livro texto [Rudin] o leitor encontrará resultados garantindo que limite de sequências comutam com as operações usuais em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$.

2.6 Espaços Métricos Compactos

Definição 2.43 *Seja M um espaço métrico.*

a) Um conjunto $\mathcal{B}$ de <u>*abertos*</u> *é uma* **base** *para M se todo aberto é união de elementos de $\mathcal{B}$. Dizemos que M tem* **base enumerável** *se possuir uma base de cardinalidade ω.*

b) M é **separável** *se existir $D \subseteq M$ tal que D é enumerável e $\overline{D} = M$* [13].

Exemplo 2.44 a) Se M é um espaço métrico, o conjunto

$$\{N_r(p) : r > 0 \quad \text{e} \quad p \in M\}$$

é, por definição de aberto, uma base para M.

b) Em $\mathbb{R}$, a coleção os intervalos abertos de extremidade racional é uma base para $\mathbb{R}$.

c) Em $\mathbb{R}^n$, os conjuntos das bolas de centro em pontos com coordenadas racionais e raio $1/n$, $n \geq 1$, é uma base para $\mathbb{R}^n$. O mesmo é verdade para a coleção dos cubos da forma

$$(a, b)^n = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \mathbb{R}^n : x_j \in (a, b), 1 \leq j \leq n\}$$

onde $a < b$ são racionais. □

Exercício 2.45 *Seja M um espaço métrico e $\mathcal{B}$ um conjunto de abertos em M. $\mathcal{B}$ é base para M sse toda bola aberta de M é união de elementos de $\mathcal{B}$.*

Exercício 2.46 *Seja M_n, $n \geq 1$, uma sequência de espaços métricos e seja D_n um subconjunto denso em M_n, $n \geq 1$. Seja $M = \prod_{n \geq 1} M_n$ e γ um elemento de M. Definimos*

$$D = \{\sigma \in M : \exists\, n \text{ tal que para } 1 \leq j \leq n,\ \sigma(j) \in D_j \quad \text{e} \quad \forall\, m > n,\ \sigma(m) = \gamma(m)\}.$$

Então, D é denso em M. Conclua que o produto de uma sequência de separáveis é separável. Lembre-se que a métrica produto em M é dada por $(*)$ na prova de 2.42.

[13] $\overline{D}$ é o fecho de D em M.

Teorema 2.47 *Para um espaço métrico M, as seguintes condições são equivalentes :*

(1) *M é separável;*

(2) *M tem base enumerável;*

(3) *Toda cobertura de M por abertos tem subcobertura enumerável.* [14]

Prova. $\underline{(1) \Rightarrow (2) :}$ Seja $D = \{d_n : n \in \omega\}$ um conjunto denso enumerável em M. Definimos

$$\mathcal{B} = \{N_{1/m}(d_n) : m \geq 1 \text{ e } d_n \in D\}.$$

Verificaremos que $\mathcal{B}$ é uma base de M, claramente enumerável. Pelo Exercício 2.45, é suficiente mostrar que se $p \in M$ e $r > 0$, então $N_r(p)$ é união de elementos de $\mathcal{B}$. Dado $y \in N_r(p)$, escolhemos $m \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{m} \;<\; \frac{r - d(p,y)}{2}.$$

Como D é denso em M, existe $d_n \in D$ tal que $d_n \in N_{1/m}(y)$. Mas então, $y \in N_{1/m}(d_n)$; além disso, se $x \in N_{1/m}(d_n)$, a desigualdade triangular nos fornece

$$\begin{aligned} d(x,\, p) \;&\leq\; d(x,y) + d(y,d_n) + d(d_n,x) \;<\; d(x,y) + 1/m + 1/m \\ &<\; d(x,y) + \frac{r - d(x,y)}{2} + \frac{r - d(x,y)}{2} \;=\; r, \end{aligned}$$

mostrando que $N_{1/m}(d_n) \subseteq N_r(p)$. Uma vez que y é arbitrário em $N_r(p)$, esta bola aberta é união de elementos de $\mathcal{B}$, como desejado.

$\underline{(2) \Rightarrow (1) :}$ Se $\mathcal{B} = \{U_n : n \geq 1\}$ é uma base enumerável de M, considere o conjunto D formado tomando-se um ponto em cada U_n, $n \geq 1$. Claro que D é enumeável; mas também é denso, já que satisfaz a condição necessária e suficiente para que um conjunto seja denso : tem interseção não vazia com todo aberto não vazio.

$\underline{(2) \Rightarrow (3) :}$ Seja U_i, $i \in I$, uma cobertura de M por abertos e $\mathcal{B} = \{V_n : n \geq 1\}$ uma base para M. Considere

$$\mathcal{C} = \{V_n \in \mathcal{B} : V_n \subseteq U_i, \text{ para algum } i \in I\}. \qquad ,$$

Claro que $\mathcal{C}$ é enumerável, pois é subconjunto de $\mathcal{B}$. Por outro lado, temos

$$(*) \qquad M \;=\; \bigcup \{V_n : V_n \in \mathcal{C}\} \;=\; \bigcup \mathcal{C}.$$

De fato, dado $p \in M$, existe $i \in I$ tal que $p \in U_i$ (os U_i's formam uma cobertura). Como $\mathcal{B}$ é base para M, existe $V_n \in \mathcal{B}$ tal que $p \in V_n \subseteq U_i$. Logo, $p \in V_n \in \mathcal{C}$, verificando (*). Como $\mathcal{C}$ é uma cobertura enumerável de M, basta escolher, para cada $V_n \in \mathcal{C}$, U_{i_n} da cobertura original contendo V_n. Então, $\{U_{i_n} : n \geq 1\}$ é uma subcobertura enumerável de M, como desejado.

$\underline{(3) \Rightarrow (1) :}$ Para cada $m \geq 1$, considere a cobertura de M formada pela bolas de raio $1/m$ e centro em cada um de seus pontos. Por (3), cada uma destas coberturas possui subcobertura enumerável. Assim, para $m \geq 1$, existe uma sequência $\{x_{mk} : k \geq 1\}$, tal que

$$(C) \qquad M \;=\; \textstyle\bigcup_{k\geq 1} N_{1/m}(x_{mk}).$$

Considere $D = \{x_{mk} : m,\, k \geq 1\}$; por 1.19, D é enumerável. Para mostrar que D é denso em M, seja $r > 0$ e $p \in M$. É suficiente verificar que existe $x_{mk} \in N_r(p)$. Seja $m \geq 1$ tal

[14] Os espaços topológicos com esta propriedade denominam-se Lindelöff ou ω-compactos.

que $1/m < \frac{r}{2}$. Como vale (C), as bolas de centro em x_{mk} e raio $1/m$ cobrem $N_{r/2}(p)$. Assim, deve existir $x_{mk} \in D$ tal que $z \in N_{1/m}(x_{mk}) \cap N_{r/2}(p)$. Então, teremos

$$d(p, x_{mk}) \;\leq\; d(p,z) + d(z, x_{mk}) \;<\; r/2 + 1/m \;<\; r,$$

mostrando que $x_{mk} \in N_r(p)$ e completando a prova. □

Definição 2.48 *Seja M um espaço métrico e E um subconjunto de M. E é* **compacto** *se toda cobertura de E por abertos tem subcobertura finita. Se M tiver esta propriedade, M é chamado um* **espaço métrico compacto**.

Corolário 2.49 *Todo espaço métrico compacto é Lindelöff; portanto, tem base enumerável e é separável.*

Prova. Vem imediatamente da Definição 2.48 e do Teorema 2.47. □

Lema 2.50 *Seja M um espaço métrico.*

a) Todo subconjunto compacto de M é fechado.

b) Todo subconjunto fechado de um subconjunto compacto é compacto.

c) Se E, F são subconjuntos compactos e disjuntos de M, então existem abertos disjuntos U, V em M, tal que $E \subseteq U$ e $F \subseteq V$.

Prova. Exercício. □

Definição 2.51 *Uma família de conjuntos, A_i, $i \in I$, tem a* **propriedade da interseção finita (pif)** *se para todo subconjunto finito $\alpha \subseteq I$, $\bigcap_{i\in\alpha} A_i \;\neq\; \emptyset$.*

Proposição 2.52 *Para um espaço métrico M, as seguintes condições são equivalentes :*

(1) M é compacto;

(2) Se F_i, $i \in I$, é uma família de fechados com a pif, então $\bigcap_{i\in I} F_i \;\neq\; \emptyset$.

(3) M é separável e se $\emptyset \neq F_n$, $n \geq 1$, é uma sequência decrescente [15] de fechados, então $\bigcap_{n\geq 1} F_n \;\neq\; \emptyset$.

(4) M é separável e toda cobertura enumerável de M por abertos tem subcobertura finita.

Prova. (1) $\Leftrightarrow$ (2) : Seja F_i, $i \in I$, uma família de fechados com a pif. Se $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, então $A_i = F_i^c$ é uma cobertura por abertos de M, sem subcobertura finita, pois $\bigcap_{i\in\alpha} F_i \neq \emptyset$, para todo subconjunto finito $\alpha \subseteq I$. A recíproca é análoga.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) : (4) $\Rightarrow$ (3) é exatamente como (1) $\Rightarrow$ (2) acima. Agora suponha que U_n, $n \geq 1$, seja uma cobertura de M por abertos, sem subcobertura finita. Definimos

$$A_n \;=\; \bigcup_{1\leq j\leq n} U_j.$$

Então, A_n é uma sequência crescente de abertos tal que $A_n \neq M$, satisfazendo

[15] Isto é, $F_{n+1} \subseteq F_n$, $n \geq 1$.

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n \;=\; \bigcup_{n\geq 1} U_n \;=\; M.$$

Considere, para $n \geq 1$, $F_n = A_n^c$; então F_n é uma sequência decrescente de fechados não vazios, mas cuja interseção é vazia, contradizendo (3).

(1) $\Leftrightarrow$ (4) : Segue imediatamente do Corolário 2.49. □

Exercício 2.53 *Se M é um espaço métrico e K_i, $i \in I$, é uma família de compactos em M com a pif, então $\bigcap_{i\in I} K_i \neq \emptyset$.*

Teorema 2.54 *Para um espaço métrico M, as seguintes condições são equivalentes :*

(1) *M é compacto;*

(2) *Todo subconjunto infinito de M tem ponto de acumulação;*

(3) *Toda sequência em M possui subsequência convergente.*

Prova. (1) $\Rightarrow$ (2) : Seja E um subconjunto infinito de M, tal que $E' = \emptyset$. Então, E é fechado e por 2.50.(b), E é compacto. Como $E' = \emptyset$, para cada ponto $p \in E$, existe $n_p \geq 1$ tal que $N_{1/n_p}(p) \cap E = \{p\}$. Está claro que a cobertura de E formada pelas bolas $N_{1/n_p}(p)$ não pode ter subcobertura finita.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Seja x_n, $n \geq 1$, uma sequência em M.

$*$ Se $\{x_n : n \geq 1\}$ é finito, algum valor deve se repetir infnitas vezes, isto é, existe um subconjunto infinito de ω, $\{n_k : k \geq 1\}$ tal que $x_{n_k} = x_{n'_k}$, para todo k, $k' \geq 1$. Claramente, a subsequência x_{n_k} é convergente.

$*$ Se $\{x_n : n \geq 1\}$ é infinito, (2) implica que possui ponto de acumulação. Então, 2.41.(b) garante a existêcia de uma subsequência dos x_n que é convergente (para este ponto de acumulação).

(3) $\Rightarrow$ (2) : Seja E um subconjunto infinito de M e seja e_n, $n \geq 1$, uma sequência de elementos *distintos* de E. Por (3), e_n tem subsequência convergente, que é necessariamente infinita. Outra aplicação de 2.41.(b) fornece que o limite desta subsequência é um ponto de acumulação de E.

Para completar a prova resta mostrar que (2) (ou (3)) $\Rightarrow$ (1). Para isto, iremos precisar de resultados e definições auxiliares, que têm interesse próprio e independente desta prova.

Definição 2.55 *Um espaço métrico M é* **totalmente limitado** *se para todo $\varepsilon > 0$, M pode ser coberto por um número finito de bolas abertas de raio ε.*

Fato 2.56 *Um espaço métrico totamente limitado é separável.*

Prova. Para cada $n \geq 1$, existe $\{x_{nj} : 1 \leq j \leq k_n\}$ tal que

$$M \;=\; \bigcup_{1\leq j\leq k_n} N_{1/n}(x_{nj}).$$

Seja $D \;=\; \{x_{nj} : n \geq 1 \;\text{ e }\; 1 \leq j \leq k_n\}$. Então, D é enumerável e denso em M. Para a densidade, utiliza-se o mesmo método que na prova de (3) $\Rightarrow$ (1) no Teorema 2.47. △

Fato 2.57 *Um espaço métrico que verifica (2)* [16] *é totalmente limitado, sendo portanto separável.*

Prova. Dado $r > 0$, se não for possível recobrir M por um número finito de bolas de raio r, podemos produzir uma sequência infinita de pontos em M que distem, dois a dois, mais do que r. De fato, seja x_1 um ponto qualquer de M. Como $N_r(x_1) \neq M$, existe $x_2 \notin N_r(x_1)$. Uma vez que $M \neq N_r(x_1) \cup N_r(x_2)$, existe x_3 fora desta união. Observe que x_3 dista mais do que r tanto de x_1, quanto de x_2. Repetindo este raciocínio, por indução em $n \geq 1$, obtemos a sequência infinita desejada. Está claro que esta sequência não tem ponto de acumulação, contradizendo (2) em 2.54. $\triangle$

Completando a prova do Teorema 2.54, mostraremos :

(2) $\Rightarrow$ (1) : Sabemos dos Fatos 2.56 e 2.57 que M é separável. Portanto, segue das equivalências em 2.52 que é suficientre mostrar que se F_n, $n \geq 1$, é uma sequência decrescente de fechados não vazios, então $\bigcap_{n\geq 1} F_n \neq \emptyset$. Podemos supor que esta sequência de fechados não estaciona [17], senão nada há a demonstrar. Além disso podemos supor que sejam todos distintos, senão raciocinaríamos com uma subsequência estritamente descrescente, que tem a mesma interseção que a sequência completa.

Para $n \geq 1$, seja $x_n \in F_n - F_{n+1}$; note que $\{x_n : n \geq 1\}$ é infinito. Por (2), o conjunto $\{x_n : n \geq 1\}$ possui um ponto de acumulação, x. Mas então $x \in F_n$, $\forall\, n \geq 1$. De fato, como $\{x_m : m \geq n\} \subseteq F_n$ e x é ponto de acumulação de $\{x_m : m \geq n\}$, temos $x \in F_n'$. Uma vez que F_n é fechado, concluímos que $x \in F_n$, como desejado. Logo, $x \in \bigcap_{n\geq 1} F_n$, encerrando a prova do Teorema 2.54. $\square$

No livro texto [Rudin] o leitor encontrará a prova do seguinte

Teorema 2.58 *Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é compacto sse for fechado e limitado.*

O último resultado desta seção mostra que produtos enumeráveis preservam compacidade.

Teorema 2.59 *O produto de uma sequência de espaços métricos compactos é um espaço métrico compacto.*

Prova. Seja $M = \prod_{n\geq 1} M_n$ um produto de espaços métricos compactos com a métrica dada por (*) na prova de 2.42. Mostraremos que toda sequência σ_n, $n \geq 1$, em M possui subsequência convergente (2.54.(3)). Por indução em $k \geq 1$ iremos construir um par $\langle\, x_k,\ \{\sigma_{kj}\ :\ j \geq 1\}\,\rangle$, satisfazendo as seguintes condições :

(i) Para todo $k \geq 1$, $x_k \in M_k$ e $\{\sigma_{(k+1)j} : j \geq 1\}$ é subsequência de $\{\sigma_{kj} : j \geq 1\}$;

(ii) Para $1 \leq n \leq k$, $\sigma_{kj}(n) \longrightarrow x_n$ em M_n.

Para $k = 1$, considere a sequência $\{\sigma_n(1) : n \geq 1\}$ em M_1. Por 2.54.(3), esta sequência tem subsequência convergente para $x_1 \in M_1$; indica-mo-la por $\{\sigma_{1j} : j \geq 1\}$. Agora considere a sequência $\{\sigma_{1j}(2) : j \geq 1\}$ em M_2; o mesmo raciocínio diz que esta sequência tem subsequência convergente para $x_2 \in M_2$, indicada por σ_{2j}, $j \geq 1$. Note que como σ_{2j} é

[16] No enunciado do Teorema 2.54, claro.

[17] Estacionar significa que $\exists\, n \geq 1$ tal que $F_m = F_n$, para todo $m \geq n$.

subsequência de σ_{1j}, temos que $\sigma_{2j}(n) \longrightarrow x_n$, $n = 1, 2$. Prosseguindo por indução com este método, obtemos os pares $\langle\, x_k;\ \{\sigma_{kj}\ :\ j \geq 1\}\,\rangle$ com as propriedades (i) e (ii) acima.

$$
(\sigma) \qquad
\begin{array}{cccccccc}
k = 1 & : & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1k} & \ldots & x_1 \\
k = 2 & : & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2k} & \ldots & x_2 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
k & : & \sigma_{k1} & \sigma_{k2} & \ldots & \sigma_{kk} & \ldots & x_k \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & &
\end{array}
$$

Considere a subsequência de σ_n dada por $\{\sigma_{kk} : k \geq 1\}$, i.e., a diagonal da matriz em (σ). Para $n \geq 1$, $\{\sigma_{mm} : m \geq n\}$ é, por construção, subsequência de $\{\sigma_{nj} : j \geq 1\}$. Logo, 2.41.(c) garante que $\sigma_{kk}(n) \longrightarrow x_n$. Assim, para todo $n \geq 1$, $\sigma_{kk}(n) \longrightarrow x_n$. Agora a Proposição 2.42 implica que em M, $\sigma_{kk} \longrightarrow x = \langle\, x_n\,\rangle_{n\geq 1}$, como necessário para completar a prova. □

A **prova** do Teorema 2.59 tem o seguinte

Corolário 2.60 *O produto finito de espaços métricos compactos é compacto.*

Prova. Se o número de componentes é finito, a matrix (σ) da prova de 2.59 tem última linha. Esta é uma subsequência da original que converge em todas as coordenadas. □

Observação 2.61 O Teorema 2.59 tem uma versão topológica que vale para *produtos arbitrários*, devida a Tychonoff : todo produto de espaços compactos é compacto. Talvez seja bom registrar que o produto de uma coleção não enumerável de métricos **não é**, em geral, metrizável. Assim, no contexto de espaços métricos, o melhor que podemos fazer é 2.59. □

Como consequência de 2.59 temos :

Corolário 2.62 *O cubo de Hilbert* (2.34) *e* 2^ω (2.28) *são espaços métricos compactos.*

Prova. O intervalo fechado $[0, 1]$ é um espaço métrico compacto; todo espaço métrico *finito*, como $2 = \{0, 1\}$, é compacto. □

Exercício 2.63 *A prova de* 2.62 *está correta* [18] *?*

Exercício 2.64 *Mostre que nenhuma bola fechada de* $\ell_\infty(\omega)$ (2.19) *é compacta.*

[18] A seção 2.2.7 pode ter algo a ver com esta esta estória.

2.7 Métrica e Topologia

Definição 2.65 *Seja* $\langle M, d \rangle$ *um espaço métrico. Seja*

$$\tau(d) \;=\; \{U \subseteq M : U \text{ é aberto em } \langle M, d \rangle\}$$

a família dos abertos em $\langle M, d \rangle$*, também chamada de* **topologia de** $\langle \boldsymbol{M}, \boldsymbol{d} \rangle$.

Sabemos que

$$U \in \tau(d) \quad \text{sse} \quad \forall\, p \in U,\ \exists\, r > 0 \text{ tal que } N_r(p) \subseteq U.$$

Se for necessário indicar qual métrica é a origem das bolas abertas, escreveremos

$$N_r^d(p) \text{ no lugar de } N_r(p).$$

Se x, x_n, $n \geq 1$, *são pontos em* M, *se for necessário deixar claro a métrica em relação à qual se dá a convergência de* x_n *para* x, *escrevemos*

$$x_n \xrightarrow{d} x.$$

Seja P *uma propriedade de espaços métricos. Dizemos que* P *é uma* **propriedade topológica** *se para todo conjunto* M *e métricas* d, d' *em* M,

$$\tau(d) = \tau(d') \quad \Rightarrow \quad \langle M, d \rangle \text{ tem a propriedade } P \quad \text{sse} \quad \langle M, d' \rangle \text{ tem a propriedade } P.$$

Exercício 2.66 *Seja* $\langle M, d \rangle$ *um espaço métrico. Para* $p \in M$ *e* $r \geq 0$, [19]

$$\overline{N_r(p)} \;=\; \overline{N}_r(p).$$

Exercício 2.67 *a) Seja* $\langle M, d \rangle$ *um espaço métrico e* x, x_n, $n \geq 1$, *elementos de* M. *Então*

$$x_n \longrightarrow x \qquad \text{sse} \qquad \begin{array}{c} \text{Para todo aberto } U \text{ contendo } x, \text{ existe } n_0 \geq 1 \text{ tal que} \\ \text{para todo } n \geq n_0, \quad x_n \in U. \end{array}$$

b) Sejam d *e* d' *métricas em um conjunto* M. *Se* $\tau(d) \subseteq \tau(d')$, *então*

(1) $\langle M, d' \rangle$ *é compacto* $\Rightarrow$ $\langle M, d \rangle$ *é compacto;*

(2) $\langle M, d' \rangle$ *é conexo* $\Rightarrow$ $\langle M, d \rangle$ *é conexo;*

(3) *Se* $x_n \xrightarrow{d'} x \quad \Rightarrow \quad x_n \xrightarrow{d} x$.

c) Compacidade, conexidade e convergência de sequências são propriedades topológicas dos espaços métricos.

Lema 2.68 *Sejam* d, d' *métricas em um conjunto* M. *São equivalentes :*

(1) $\tau(d) \subseteq \tau(d')$;

(2) *Para todo* $p \in M$ *e* $r > 0$, *existe* $r' > 0$ *tal que* $N_{r'}^{d'}(p) \subseteq N_r^d(p)$.

(3) *Para todo* $p \in M$ *e* $r > 0$, *existe* $r' > 0$ *tal que para todo* $y \in M$,

$$d'(p, y) < r' \quad \Rightarrow \quad d(p, y) < r.$$

[19] $\overline{A}$ é o fecho de A; $\overline{N}_r(p)$ é a *bola fechada de raio* r, como em 2.21.

Prova. Claro que (3) e (2) são equivalentes, na realidade sinônimos. Provaremos (2) $\Rightarrow$ (1), deixando a recíproca como exercício. Para $U \in \tau(d)$, podemos escreve-lo na forma

$$U \;=\; \bigcup_{p\in U} N^{d}_{r_p}(p),$$

pois um subconjunto de M é aberto relativamente à métrica de d sse for união de bolas abertas. Observe que os raios, r_p, dependem – evidentemente – do ponto p. Para $p \in U$, (2) fornece $r'_p > 0$, tal que $N^{d'}_{r'_p}(p) \subseteq N^{d}_{r_p}(p)$. Mas então,

$$U \;=\; \bigcup_{p\in U} N^{d'}_{r'_p}(p),$$

o que mostra que $U \in \tau(d')$. $\square$

Proposição 2.69 *a) Seja* $\langle\, M, d\,\rangle$ *um espaço métrico e* $\mathbb{R}_+ \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}_+$ *uma função verificando as condições* $(i) - (iii)$ *em* 2.30*. Se* ϕ *é contínua no ponto* 0*, então* $\tau(d_\phi) \subseteq \tau(d)$*.*

b) Sejam d*,* d' *métricas em* M *e suponha que exista uma constante* $M > 0$ *tal que para todo* $x,\, y \in M$*,*

$$d(x,y) \;\leq\; Md'(x,y).$$

Então, $\tau(d) \subseteq \tau(d')$*.*

Prova. a) Como ϕ é contínua no ponto 0, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$u < \delta \quad\Rightarrow\quad \phi(u) < \varepsilon.$$

Assim, dado $p \in M$ e $\varepsilon > 0$, para todo $y \in M$,

$$d(p,y) < \delta \quad\Rightarrow\quad d_\phi(p,\, y) \;=\; \phi(d(p,\, y)) \;<\; \varepsilon,$$

e o Lema 2.68 garante que $\tau(d_\phi) \subseteq \tau(d)$.

b) Para $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon/M$; se $x,\, y \in M$, então

$$d'(x,y) < \varepsilon/M \quad\Rightarrow\quad d(x,y) \;<\; M\,(\varepsilon/M) \;=\; \varepsilon,$$

e uma nova aplicação de 2.68 acarreta $\tau(d) \subseteq \tau(d')$. $\square$

Corolário 2.70 *Com as hipóteses em* 2.69*.(a), suponha que* ϕ *é inversível, com inversa contínua no ponto* 0*. Então,* $\tau(d) = \tau(d_\phi)$*.*

Prova. Seja ψ a função inversa de ϕ, isto é, $\psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, satisfazendo

$$\psi \circ \phi \;=\; \phi \circ \psi \;=\; Id_{\mathbb{R}_+}.$$

Dado $\delta > 0$, pela continuidade de ψ em 0, existe $\varepsilon > 0$ tal que $v < \varepsilon \;\Rightarrow\; \psi(v) < \varepsilon$. Assim, se $x,\, y \in M$, temos

$$d_\phi(x,\, y) \;=\; \phi(d(x,y)) < \varepsilon \quad\Rightarrow\quad d(x,y) \;=\; \psi(\phi(d(x,y))) < \delta,$$

e a conclusão segue (mais uma vez) de 2.68. $\square$

Aqui estão alguns exemplo interessantes de métricas diferentes com a mesma topologia :

Corolário 2.71 *Se* ϕ *é qualquer uma das funções do Exemplo* 2.32 *e* $\langle\, M, d\,\rangle$ *é um espaço métrico, então* $\tau(d) = \tau(d_\phi)$*.*

Prova. Todas satisfazem as hipotéses em 2.69.(a) e têm inversas contínuas no ponto 0. $\square$

Outros exemplos vem do

Corolário 2.72 *Para $p \in [1, \infty]$, seja $\| * \|_p$ a norma p em $\mathbb{R}^n$ (2.9, 2.18).*

a) Para todo $a = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathbb{R}^n$, $\|a\|_\infty \leq \|a\|_p \leq n^{1/p}\, \|a\|_\infty$.

b) Se d_p é a métrica associada à $\| * \|_p$, então para todo p, $q \in [1, \infty]$, $\tau(d_p) = \tau(d_q)$.

Prova. a) A primeira desigualdade está clara, uma vez que $\max_{1 \leq j \leq n} |a_j| = |a_k|$, para algum $k \leq n$. Para segunda, temos

$$\|a\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |a_j|^p\right)^{1/p} \leq (n\, \|a\|_\infty{}^p)^{1/p} = n^{1/p}\, \|a\|_\infty.$$

b) As desigualdades em (a) e o fato que $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$ nos fornecem

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \quad d_\infty(x, y) \leq d_p(x, y) \leq n^{1/p}\, d_\infty(x, y).$$

Agora, 2.69.(b) implica que $\tau(d_p) = \tau(d_\infty)$, para todo $p \in [1, \infty]$. $\square$

Um outro exemplo interessante aparece no

Exercício 2.73 *Consideramos $2 = \{0, 1\}$ como um espaço métrico com a métrica discreta, i.e., $d(0, 1) = 1$. Para s, $t \in 2^\omega$, definimos* [20]

$$d'(s, t) = \sum_{n \geq 1} \frac{|s(n) - t(n)|}{2^n}$$

Já sabemos (2.35) que d' é uma métrica em 2^ω, distinta da métrica d introduzida no Exemplo 2.28. Mostre que $\tau(d) = \tau(d')$.

Definição 2.74 *Uma função $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é* **Lipschitz de constante K no ponto x** *$(K \geq 0)$, se existir $\delta > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}_+$*

$$|y - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad K\, |fx - fy|.$$

Em particular, ϕ é Lipschitz de constante K no ponto 0, se existir $\delta > 0$ tal que se $|x| < \delta$, então $\phi(x) \leq Kx$.

Exercício 2.75 *Seja $\langle M, d \rangle$ um espaço métrico e $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ uma função satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) de 2.30.*

a) Se ϕ for de Lipschitz no ponto 0, então $\tau(d_\phi) \subseteq \tau(d)$.

b) Se ϕ é contínua em $\mathbb{R}_+$ e tem derivada limitada em $(0, \infty)$, então $\tau(d_\phi) \subseteq \tau(d)$.

2.8 Sequências de Cauchy e Completude

Definição 2.76 *Seja $\langle M, d \rangle$ um espaço métrico. Uma sequência em M, x_n, $n \geq 1$, é* **de Cauchy** *se verificar a seguinte condição :*

[Cauchy] $\quad \forall\, \boldsymbol{\varepsilon} > 0$, *existe n_0 tal que* $\forall\, n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) \leq \boldsymbol{\varepsilon}$.

[20] Lembre-se que $s \in 2^\omega$ é uma sequência de 0's e 1's.

Lema 2.77 *Seja* $\langle\, M, d\,\rangle$ *um espaço métrico.*

a) Toda sequência convergente é de Cauchy.

b) Toda sequência de Cauchy é limitada.

c) Se x_n *é uma sequência de Cauchy em* M *e* $\{x_n : n \geq 1\}$ *é finito, então* x_n *é eventualmente constante, i.e., existe* $n \geq 1$*, tal que* $x_n = x_m$*, para todo* $m \geq n$*.*

d) Se x_n*,* $n \geq 1$*, é uma sequência de Cauchy, as sequintes condições são equivalentes :*

(1) x_n *é convergente;*

(2) x_n *tem subsequência convergente;*

(3) *Se* $\{x_n : n \geq 1\}$ *for infinito, então possui um ponto de acumulação.*

Prova. O ítems (a) e (b) são deixados como exercício. Para (c), se $\{x_n : n \geq 1\}$ é finito, então o mínimo da distância entre pontos distintos deste conjunto é estritamente positivo, digamos $\boldsymbol{\varepsilon}$. Como x_n é de Cauchy, existe n_0 tal que para todo $m \geq n_0$, $d(x_m, x_{n_0}) < \boldsymbol{\varepsilon}$. Mas isto só é possível se $x_m = x_{n_0}$, $m \geq n_0$.

(d) (1) $\Rightarrow$ (2) vem de 2.41.(c). Para (2) $\Rightarrow$ (1), se x_n é de Cauchy e $x_{n_k} \longrightarrow x$, então dado $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$, existem n_0 e k_0 tal que

$$\forall\, n, m \geq n_0, \;\; d(x_m, x_n) < \boldsymbol{\varepsilon}/2 \quad \text{e} \quad \forall\, k \geq k_0, \;\; d(x_{n_k}, x) < \boldsymbol{\varepsilon}/2.$$

Assim, se m e $n_k \geq \max\,\{n_0, n_{k_0}\}$, a desiqualdade triangular fornece

$$d(x_m, x) \;\leq\; d(x_m, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \;<\; \boldsymbol{\varepsilon}/2 + \boldsymbol{\varepsilon}/2 \;=\; \boldsymbol{\varepsilon},$$

mostrando que $x_n \longrightarrow x$. Com a equivalência de entre (1) e (2), (3) $\Rightarrow$ (1) segue imediatamente de 2.41.(b). □

Definição 2.78 *Um espaço métrico* M *é* **completo** *se toda sequência de Cauchy em* M *é convergente.*

Lema 2.79 *Todo subespaço fechado de um espaço métrico completo é um espaço métrico completo.*

Prova. Seja F um fechado em um espaço métrico completo M. Se x_n é e Cauchy em F, então é de Cauchy em M, pois a métrica em F é restrição da de M. Logo, $x_n \longrightarrow x$, para algum $x \in M$. Por 2.41.(a), $x \in \overline{F} = F$. □

Definição 2.80 *Seja* $\langle\, M, d\,\rangle$ *um espaço métrico e* $A \subseteq M$*. Definimos*

$$d(A) \;=\; \sup_{x,y \in A} d(x, y),$$

denominado o **diâmetro de $\boldsymbol{A}$**. *Note que* $d(A)$ *pode ser* ∞*.*

Lema 2.81 *Se* $\langle\, M, d\,\rangle$ *é um espaço métrico e* A*,* $B \subseteq M$*, então*

a) $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad d(A) \leq d(B)$*.*

b) $d(A) = d(\overline{A})$*.*

c) Para $p \in M$ *e* $r > 0$*,* $\;d(N_r(p)) \;=\; d(\overline{N}_r(p)) \;\leq\; 2r$*.*

Prova. O ítem (a) é óbvio, enquanto que a prova de (b) aparece no Teorema 3.10 em [Rudin]. Para (c), é suficiente mostrar (por (b)) que $d(N_r(p)) \leq 2r$. Para x, $y \in N_r(p)$, a desigualdade triangular acarreta

$$d(x,y) \;\leq\; d(x,p) + d(p,y) \;<\; 2r,$$

e assim $d(N_r(p)) \;=\; \sup_{x,y\in N_r(p)} d(x,y) \;\leq\; 2r$. [21] □

Teorema 2.82 *Para um espaço métrico $\langle\, M, d\,\rangle$ as seguintes condições são equivalentes :*

(1) *M é completo;*

(2) *Seja A_n uma sequência decrescente de conjuntos não vazios em M. Então,*

$$\inf_{n\geq 1} d(A_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{n\geq 1} \overline{A_n} \;\neq\; \emptyset.$$

Prova. (1) $\Rightarrow$ (2) : Para $n \geq 1$, seja $x_n \in A_n$; então, x_n é de Cauchy. De fato, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher A_n tal que $d(A_n) < \varepsilon$. Como $x_m \in A_n$ se $m \geq n$, temos $d(x_m, x_k) < \varepsilon$, para todo m, $k \geq n$. Uma vez que M é completo, x_n é convergente, $x_n \longrightarrow x$. Segue imediatamente de 2.41.(a) que $x \in \overline{A_n}$, para todo $n \geq 1$, i.e., $x \in \bigcap_{n\geq 1} \overline{A_n}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Se x_n, $n \geq 1$, é de Cauchy em M, considere os conjuntos $A_n = \{x_m : m \geq n\}$. Então, A_n é descrescente e $\inf_{n\geq 1} d(A_n) = 0$. Se x é um ponto em $\bigcap_{n\geq 1} \overline{A_n}$, é fácil ver que $x_n \longrightarrow x$, mostrando que M é completo. □

Observação 2.83 É falso que em um espaço métrico completo uma sequência decrescente de fechados $\neq \emptyset$ tem interseção distinta do $\emptyset$. Como exemplo, tome a coleção

$$F_n \;=\; [n, \infty) \;\subseteq\; \mathbb{R}.$$

Para obter um exemplo com diâmetro finito, considere a mesma sequência, mas no espaço métrico $\langle\, \mathbb{R}, \dfrac{|\ast|}{1+|\ast|}\,\rangle$. Claro, deixamos ao leitor a verificação de que este espaço é completo. Em relação a esta questão, veja o próximo Exercício e a seção 2.7. □

Exercício 2.84 *Seja $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ uma função contínua, satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) do Lema* 2.30. *Determine condições adicionais sobre ϕ garantindo que se $\langle\, M, d\,\rangle$ é completo, o mesmo é verdade para $\langle\, M, d_\varphi\,\rangle$.*

Proposição 2.85 *O produto de uma sequência de espaços métricos completos é completo.*

Prova. Se σ_n, $n \geq 1$, é uma sequência de Cauchy em $M = \prod_{n\geq 1} M_n$, o mesmo método utilizado na prova de 2.42 irá mostrar que para todo $k \geq 1$, $\sigma_n(k)$ é de Cauchy em M_k. Como M_k é completo, existe $x_k \in M_k$ tal que $\sigma_n(k) \longrightarrow x_k$. Assim, σ_n converge coordenada a coordenada para $x = \langle\, x_k\,\rangle$. Por 2.42, concluímos que $\sigma_n \longrightarrow x$, como necessário. □

Exercício 2.86 *Se $\langle\, M, d\,\rangle$ é um espaço métrico, $A \subseteq M$ e $p \in M$, definimos*

$$d(p, A) \;=\; \inf_{a\in A} d(p,a),$$

denominada a **distância de p a A**.

[21] Há exemplos fáceis nos quais o diâmetro de $N_1(p)$ é 0.

a) $d(p, A) = 0$ *sse* $\forall\ n \geq 1,\ B_{1/n}(p) \cap A \neq \emptyset$.

b) $p \in A \ \Rightarrow\ d(p, A) = 0$. *Dê um exemplo mostrando que a recíproca é falsa.*

c) Se A *é fechado em* M, *então* $d(p, A) = 0$ *sse* $p \in A$.

d) Para $q \in M$, *será que* $d(p, q) \leq d(p, A) + d(q, A)$ *?*

Teorema 2.87 *Para um espaço métrico* M, *as seguintes condições são equivalentes :*

(1) M *é compacto* (2) M *é totalmente limitado e completo.*

Prova. (1) $\Rightarrow$ (2) : Segue imediatamente da definição de compacidade que M é totalmente limitado [22]. Se x_n é uma sequência de Cauchy em M, o Teorema 2.54 garante que possui uma subsequência convergente e assim, por 2.77.(c), x_n é convergente.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Pelo Fato 2.56, M é separável. Assim, por 2.52, é suficiente mostrar que se F_n, $n \geq 1$, é uma sequência decrescente de fechados não vazios, então $\bigcap_{n\geq 1} F_n \neq \emptyset$.

Fato 1. *Seja* A_n *uma sequência decrescente de conjuntos não vazios. Se* A_{n_k}, $k \geq 1$, *é uma subsequência dos* A_n, *então* $\bigcap_{k\geq 1} A_{n_k} = \bigcap_{n\geq 1} A_n$.

Prova. Sejam $T = \bigcap_{n\geq 1} A_n$ e $K = \bigcap_{k\geq 1} A_{n_k}$; claro que $T \subseteq K$. Por outro lado, se $x \in K$, e $n \geq 1$, podemos escolher $k \geq 1$ tal que $n_k \geq n$. Como a sequência A_n é decrescente, temos $x \in A_{n_k} \subseteq A_n$, e portanto $x \in T$. $\triangle$

Fato 2. *Seja* U *um conjunto e* $A_1, \ldots, A_n$ *uma família de subconjuntos de* U, *tal que*

$$U = \bigcup_{1\leq j\leq n} A_j.$$

Seja B_m, $m \geq 1$, *uma sequência de subconjuntos não vazios de* U. *Então, existe* $j \in [1, n]$ *tal que* $\{m \geq 1 : B_m \cap A_j \neq \emptyset\}$ *é infinito.*

Prova. Para $1 \leq j \leq n$, considere

$$\alpha_j = \{m \geq 1 : B_m \cap A_j \neq \emptyset\}.$$

Como $U = \bigcup_{1\leq j\leq n} A_j$, temos $\omega = \bigcup_{1\leq j\leq n} \alpha_j$. De fato, já que $B_m \neq \emptyset$, a lei distributiva da interseção pela união finita fornece

$$B_m = B_m \cap U = B_m \cap \bigcup_{1\leq j\leq n} A_j = \bigcup_{1\leq j\leq n} B_m \cap A_j,$$

e portanto pelo menos um dos fatores da união acima deve ser $\neq \emptyset$. Para terminar a prova do Fato 2, observe que ω não pode ser união finita de conjuntos finitos. Assim, pelo menos um dos α_j deve ser infinito. $\triangle$

Fixada a sequência decrescente de fechados não vazios F_n em M, iremos contruir, por indução em $m \geq 1$, uma família $\mathcal{G}_m = \{G_{mk} : k \geq 1\}$, verificando as seguintes propriedades, para todo $m \geq 1$:

(i) G_{mk}, $k \geq 1$, é uma sequência decrescente de fechados não vazios, com diâmetro $\leq 2/m$;

(ii) $F_m = \bigcap_{k\geq 1} G_{mk} \subseteq F = \bigcap_{n\geq 1} F_n$.

(iii) Para todo $k \geq 1$, $G_{(m+1)k} \subseteq G_{mk}$.

[22] Toda cobertura por bolas de raio ε tem sub-cobertura finita.

$$
(\mathcal{G})\qquad
\begin{array}{lcccccccc}
\mathcal{G}_1 & : & G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1m} & \dots & F_1 \\
\mathcal{G}_2 & : & G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2m} & \dots & F_2 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathcal{G}_m & : & G_{m1} & G_{m2} & \dots & G_{mm} & \dots & F_m \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Para $m = 1$, podemos escrever M como reunião *finita* de bolas de raio 1. Pelo Fato 2, existe uma desta bolas, digamos N_1, e uma subsequência F_{n_k}, $k \geq 1$, tal que $F_{n_k} \cap N_1 \neq \emptyset$, para todo $k \geq 1$. Definimos

$$G_{1k} \ = \ \overline{N_1} \cap F_{n_k}, \quad k \geq 1.$$

Note que G_{1k} é uma sequência descrescente de fechados em M, cujo diâmetro é menor ou igual a 2, pois $d(\overline{N_1}) \leq 2$ (2.81.(c)). Note também que o Fato 1 nos dá

$$F_1 \ = \ \bigcap_{k\geq 1} G_{1k} \ \subseteq \ \bigcap_{k\geq\ 1} F_{n_k} \ = \ F.$$

Suponha construída a linha de ordem m da matriz $(\mathcal{G})$. Como M é totalmente limitado, pode ser recoberto por um número finito de bolas de raio $1/(m + 1)$. Pelo Fato 2, existe ao menos uma destas bolas, digamos N_{m+1}, tal que

$$\alpha = \{n \geq 1 : G_{mn} \cap N_{m+1} \neq \emptyset\} \text{ é infinito.}$$

Para cada $k \geq 1$, seja $n_k = \min\{n \in \alpha : k \leq n\}$. Como α é infinito, n_k está determinado, para todo $k \geq 1$. Agora definimos

$$G_{(m+1)k} \ = \ G_{mn_k} \cap \ \overline{N_{m+1}}.$$

Como antes, $G_{(m+1)k}$, $k \geq 1$, é uma sequência decrescente de fechados, com diâmetro menor ou igual a $2/(m + 1)$. Uma nova applicação do Fato 1 mostra que

$$F_{m+1} \ = \ \bigcap_{k\geq 1} G_{(m+1)k} \ = \ \overline{N_{m+1}} \cap \bigcap_{k\geq 1} G_{mn_k} \ = \ \overline{N_{m+1}} \cap F_m \ \subseteq \ F_m \ \subseteq \ F.$$

Finalmente, para verificar a condição (iii), basta notar que como $k \leq n_k$ e $\mathcal{G}_m$ é decrescente, temos

$$G_{(m+1)k} \ = \ \overline{N_{m+1}} \cap G_{mn_k} \ \subseteq \ \overline{N_{m+1}} \cap G_{mk} \ \subseteq \ G_{mk},$$

encerrando a construção da matriz $(\mathcal{G})$. Para terminar a prova, considere a sequência de fechados G_{mm}, $m \geq 1$, isto é, a diagonal da matriz $(\mathcal{G})$. É imediato da construção que esta sequência é decrescente e que $\inf_{m\geq 0} d(G_{mm}) = 0$. A completude de M, juntamente com o Teorema 2.82, garantem que $\bigcap_{m\geq 1} G_{mm} \neq \emptyset$. Por outro lado, uma vez que

$$\text{Para todo } m \geq 1, \quad G_{mm} \ \subseteq \ G_{1m},$$

temos que $\bigcap_{m\geq 1} G_{mm} \ \subseteq \ F_1 \ \subseteq \ F$, mostrando que $F \neq \emptyset$, como desejado. [23] □

Definição 2.88 *Um espaço métrico M é* **localmente compacto** *se para todo $p \in M$ existe $r_p > 0$ tal que $\overline{N}_{r_p}(p)$ é compacto em M.* [24]

Lema 2.89 *Se M é um espaço métrico, são equivalentes :*

[23] Na realidade, $\bigcap_{m\geq 1} G_{mm} \ = \ \bigcap_{m\geq 1} F_m$.

[24] $\overline{N}_{r_p}(p)$ é a *bola fechada* de raio r_p e centro em p, como em 2.21.

(1) *M é localmente compacto;*

(2) *Para todo aberto U em M e todo ponto $p \in U$, existe um aberto V tal que*

$$p \in V, \quad \overline{V} \subseteq U \quad e \quad \overline{V} \text{ é compacto em } M.$$

Prova. (1) $\Rightarrow$ (2) : Se p é um ponto de um aberto U, existe $0 < s < r_p$, tal que $N_s(p) \subseteq U$. Então, $\overline{N}_{s/2}(p) \subseteq N_s(p) \subseteq U$, com $\overline{N}_{s/2}(p) \subseteq \overline{N}_{r_p}(p)$. Pelo Exercício 2.66, $\overline{N}_{s/2}(p)$ é o fecho de $N_s(p)$; como fechados em compactos são compactos (2.50.(b), concluímos que $\overline{N}_{s/2}(p)$ é compacto em M. Logo, $N_{s/2}(p)$ é um aberto que verifica as condições em (2).

(2) $\Rightarrow$ (1) : Dado $p \in M$, consideremos o aberto $N_1(p)$; então existe um aberto V contendo p e contido em $N_1(p)$, tal que $\overline{V}$ é compacto. Como V é aberto, podemos escolher $r > 0$ tal que $N_r(p) \subseteq V$. Mas então, o Exercício 2.66 nos fornece

$$\overline{N}_r(p) \;=\; \overline{N_r(p)} \;\subseteq\; \overline{V},$$

e o Lema 2.50.(b) implica que $\overline{N}_r(p)$ é compacto em M. [25] □

Proposição 2.90 *Seja M um espaço métrico tal que para algum $\varepsilon > 0$, $\overline{N}_\varepsilon(p)$ é compacto, para todo $p \in M$. Então, M é completo.*

Prova. Seja x_n de Cauchy em M. Então existe $n_0 \geq 1$, tal que para todo $m \geq n_0$, $d(x_{n_0}, x_m) < \varepsilon$. Isto significa que $\{x_m : m \geq n_0\} \subseteq \overline{N}_\varepsilon(x_{n_0})$. A compacidade então garante que x_n tem subsequência convergente (2.54) e portanto a sequência x_n é, ela mesma, convergente (2.77.(c)). □

Observação 2.91 Sem a uniformidade presente no enunciado de 2.90, a conclusão é (muito) falsa. Um exemplo simples é o intervalo aberto $(a, b) \neq \mathbb{R}$. □

Corolário 2.92 *Para todo $n \geq 1$, $\langle\, \mathbb{R}^n, \| * \|_p \,\rangle$ é um espaço métrico completo.*

Prova. Por 2.72, todas as topologias oriundas de $\| * \|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, são as mesmas. Em particular, o fecho das bolas de raio 1 de qualquer centro e em qualquer das normas p, são fechados contidos no fecho da bola de raio 1 de $\| * \|_\infty$ (com o mesmo centro) [26] que são compactos em $\mathbb{R}^n$. A conclusão segue imediatamente de 2.90. [27] □

Observação 2.93 Há muitos espaços métricos que embora completos não são localmente compactos. Um exemplo é $\ell_\infty(\omega)$. Na realidade, **qualquer** espaço normado completo de dimensão infinita é um exemplo deste tipo. Veja também o Exercício 2.94, logo abaixo. □

Exercício 2.94 *Sejam* $\left\{ \begin{array}{lcl} c_0 & = & \{s \in \mathbb{R}^\omega : s_n \longrightarrow 0\} \\ C & = & \{t \in \mathbb{R}^\omega : t_n \textit{ é convergente}\}, \end{array} \right.$

[25] A único propósito deste Lema é indicar a boa definição topológica de localmente compacto : a condição (2). O que funciona em métricos nem sempre pode ser imediatemente transcrito para casos mais gerais.

[26] Isto é, os cubos fechados e limitados

[27] Atenção : **não** estamos usando o argumento, embora válido (devido a 2.72.(a)), que ser completo em uma norma implica ser completo em outra.

os espaços vetoriais das sequências de reais que convergem para 0 *e que são convergentes, respectivamente. Claro que*

$$c_0 \subseteq C \subseteq \ell_\infty(\omega),$$

pois toda sequência convergente é limitada. Faremos de c_0 *e* C *espaços normados pela restrição da norma* $\| * \|_\infty$ *de* $\ell_\infty(\omega)$.

a) c_0 *e* C *são fechados em* $\ell_\infty(\omega)$.

b) $\ell_\infty(\omega)$ *é completo.*

d) c_0 *e* C *são espaços métricos separáveis e completos* [28].

e) c_0 *e* C *não são localmente compactos.*

Teorema 2.95 *Seja* M *um espaço métrico. Se* M *é localmente compacto ou completo então é* **de Baire**, *isto é, verifica a seguinte propriedade :*

[*Baire*] *Se* U_n, $n \geq 1$, *é uma sequência de abertos densos em* M, *então* $\bigcap_{n\geq 1} U_n$ *é denso em* M.

Prova. Faremos a prova para o caso localmente compacto. O caso completo é análogo, substituindo-se a compacidade por fechados encaixantes cujo diâmetro tende a zero.

O Lema 2.89 será usado constantemente e sem aviso prévio.

Seja A um aberto não vazio em M. Como U_1 é aberto e denso, $A \cap U_1$ é uma aberto não vazio. Pela compacidade local, existe um aberto V_1 não vazio, tal que $\overline{V_1}$ é compacto e está contido em $A \cap U_1$. Agora repetimos o argumento, com V_1, no lugar de A. Já que U_2 é aberto denso, $U_2 \cap V_1$ é um aberto $\neq \emptyset$. Portanto, existe um aberto não vazio, V_2, tal que $\overline{V_2}$ é compacto e está contido em $V_1 \cap U_2$. Prosseguindo deste modo por indução, constroi-se uma sequência *descrescente* de abertos, V_n, $n \geq 1$, tal que $\overline{V_n}$ é compacto e está contido em $A \cap \bigcap_{1\leq j\leq n} U_j$. Como $\overline{V_n}$, $n \geq 1$, é uma sequência decrescente de compactos não vazios, 2.53 acarreta $\emptyset \neq \bigcap_{n\geq 1} \overline{V_n} \subseteq A \cap \bigcap_{n\geq 1} U_n$. Acabamos de mostrar que $\bigcap_{n\geq 1} U_n$ tem interseção não vazia com todo aberto não vazio; logo esta interseção é densa em M, como desejado. □

Corolário 2.96 *Todo espaço métrico compacto é de Baire.*

[28]Na métrica induzida por $\| * \|_\infty$.