Notas de Análise

F. Miraglia

$2^{\underline{o}}$ Semestre, 2001

Capítulo 1

Conjuntos

1.1 Notação para conjuntos.

$*$ Muito embora o livro do Rudin utilize J para designar os naturais, iremos usar o símbolo standard : ω.

Se A, A_i, $i \in i$, são subconjuntos de um conjunto U,

$*$ (União) $\bigcup_{i \in I} A_i \;=\; \{x \in U : x \in A_i$, para algum $i \in I\}$;

$*$ (Interseção) $\bigcap_{i \in I} A_i \;=\; \{x \in U : x \in A_i$, para todo $i \in I\}$;

$*$ (Complemento) $A^c \;=\; \{x \in U : x \notin A\} \;=\; U - A$.

$*$ (Produto Cartesiano) Se $n \geq 1$ é um inteiro

$$A^n = \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle : a_j \in A\}$$

é a n-ésima **potência cartesiana** de A.

$*$ (Partes) 2^A é o conjunto dos subconjuntos de A. Assim,

$$S \in 2^A \quad \text{sse} \quad S \subseteq A. \qquad \square$$

1.2 Funções. Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função, $C \subseteq A$ e $D \subseteq B$.

$*$ Indicamos por $f_{|C}$, denominada **restrição de f a C**, a função de C em B definida para $x \in C$ por $f_{|C}(x) = fx$.

$*$ $f_*C \;=\; \{fx \in B : x \in C\}$ é a **imagem de C por f**.

$*$ $f_*A \;=_{def}\; Im\, f$ é a **imagem de f**.

$*$ $f^*D \;=\; \{a \in A : fa \in D\}$ é a **imagem inversa de D por f**.

$*$ Indicamos por B^A o conjunto das funções de A em B. $\square$

Exercício 1.3 *Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função.*

a) A operação de imagem inversa por f comuta com todas as operações conjuntísticas, isto é, para D, D_i, $i \in I$, subconjuntos de B

(1) $f^*(\bigcup_{i \in I} D_i) \;=\; \bigcup_{i \in I} f^*D_i$;

(2) $f^*\big(\bigcap_{i\in I} D_i\big) \;=\; \bigcap_{i\in I} f^* D_i$;

(3) $f^* D^c \;=\; (f^* D)^c$.

b) Para C_i, $i \in I$, *subconjuntos de* A, $\;f_*\big(\bigcup_{i\in I} C_i\big) \;=\; \bigcup_{i\in I} f_* C_i$.

O que mais se pode dizer sobre a operação de imagem ?

d) As operações de imagem e imagem inversa por f *dão origem a funções*

$$f_* : 2^A \longrightarrow 2^B \quad e \quad f^* : 2^B \longrightarrow 2^A.$$

Mostre que ambas são crescentes, *isto é,*

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq A \quad e \quad D_1 \subseteq D_2 \subseteq B \quad \Rightarrow \quad f_* D_1 \subseteq f_* C_2 \quad e \quad f^* D_1 \subseteq f^* D_2.$$

d) Para todo $C \subseteq A$ *e* $D \subseteq B$, $\;f_* C \subseteq D$ *sse* $C \subseteq f^* D$.

1.4 Produtos. Se A_i, $i \in I$, é uma família de conjuntos, seu **produto cartesiano** é

$$\prod_{i\in I} A_i \;=\; \{I \xrightarrow{f} \bigcup_{i\in I} A_i : \text{Para todo } i \in I,\ f(i) \in A_i\}.$$

Se $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, escrevemos os elementos do produto $\prod A_i$ como n-uplas

$$\prod_{i=1}^{n} A_i \;=\; \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle : a_i \in A_i\}. \qquad \square$$

Definição 1.5 *Seja* $f : A \longrightarrow B$ *uma função. Dizemos que*

a) f *é* **injetora** *sse*[1] *para todo* $x, y \in A$, $\;x \neq y \;\Rightarrow\; fx \neq fy$.

b) f *é* **sobrejetora** *se para todo* $b \in B$, *existe* $a \in A$ *tal que* $fa = b$.

c) f *é* **bijetora** *se for injetora e bijetora.*

Exercício 1.6 *a) As propriedades de ser injetora, sobrejetora e injetora são preservadas por composição.*

b) Suponha que $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *são funções e seja* $h = g \circ f$. *Então,*

(1) h *sobrejetora* $\Rightarrow$ g *sobrejetora;*

(2) h *injetora* $\Rightarrow$ f *injetora.*

c) Se $A \xrightarrow{f} B$ *é uma função, a seguintes condições são equivalentes :*

(1) f *é bijetora;*

(2) *Existe uma* única $g : B \longrightarrow A$ *tal que* $f \circ g = Id_B$ *e* $g \circ f = Id_A$.

A única g *satisfazendo as condições em* (2) *denomina-se* **inversa de** $\boldsymbol{f}$, *denotada por* f^{-1}. *Claro que* $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exercício 1.7 *a) Seja* A *um conjunto e* $2 = \{0, 1\}$. *Mostre que existe uma bijeção natural entre a família dos subconjuntos de* A *e o conjunto das funções de* A *em* 2. [2]

b) Se A *é um conjunto e* $n \geq 1$ *é um inteiro, mostre que existe uma bijeção natural entre* A^n *e* A^{J_n}. [3]

[1] Abreviação de *se e somente se.*

[2] É este fato que justifica a notação 2^A para as partes de A.

[3] $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

c) Se A, B, C são conjuntos, existe uma bijeção natural entre $A^{B\times C}$ e A^{B^C}. [4]

Se A, B são conjuntos, definimos

$$[\preceq] \qquad \begin{cases} A \preceq B \ \ \textit{sse} \ \ \text{existe uma função injetora de } A \text{ em } B; \\ A \sim B \ \ \textit{sse} \ \ \text{existe uma bijeção de } A \text{ em } B. \end{cases}$$

Exercício 1.8 *As relações $\preceq$ e $\sim$ têm as seguintes propriedades*

a) $A \preceq A$; $A \sim A$.

b) $A \preceq B$ e $B \preceq C \Rightarrow A \preceq C$.

c) $A \sim B$ e $B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

d) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.

e) $A \sim B \Rightarrow A \preceq B$ e $B \preceq A$.

Definição 1.9 *Sejam A, B conjuntos.*

a) Definimos [5]

$$pF(A,B) = \{f : f \text{ é uma função}, \ f : dom\, f \longrightarrow B, \text{ com } dom\, f \subseteq A\},$$

o conjunto das **funções parciais de A em B**.

b) f, $g \in pF(A,B)$ são **compatíveis** *se*

$$f_{|dom\, f \cap dom\, g} = g_{|dom\, f \cap dom\, g}.$$

Note que funções com domínios disjuntos são compatíveis.

Teorema 1.10 (Princípio da Colagem de Compatíveis) *Seja f_i, $i \in I$, uma família de funções parciais de A em B, duas a duas compatíveis. Então existe uma* única $f \in pF(A,B)$ *satisfazendo as seguintes condições :*

$$(1)\ dom\, f = \bigcup_{i\in I} dom\, f_i; \qquad (2)\ \text{Para todo } i \in I, \ f_{|dom\, f_i} = f_i.$$

Prova. Exercício. □

Definição 1.11 *A função f dada pelo Teorema* 1.10 *denomina-se* **colagem** *das f_i's, sendo indicada por $\bigvee_{i\in I} f_i$. No caso em que temos duas funções compatíveis, g, h, indicamos a sua colagem por $g \vee h$.*

Exercício 1.12 *Sejam f, $g \in pF(A,B)$ e suponha que*

$$(1)\ f,\ g \text{ são injetoras}; \qquad (2)\ dom\, f \cap dom\, g = \emptyset = Im\, f \cap Im\, g.$$

Então $f \vee g$ é uma bijeção entre $dom\, f \cup dom\, g$ e $Im\, f \cup Im\, g$.

[4] Este fato, estruturalmente importante, denomina-se *adjunção exponencial.*

[5] $dom\, f$ é o *domínio* da função f.

Iremos agora mostrar que vale a recíproca da propriedade em 1.8.(e) (Teorema 1.15). Para isto provaremos o seguinte resultado, devido a Alfred Tarski, que tem muitas outras aplicações.

Teorema 1.13 (Tarski) *Seja U um conjunto e $f : 2^U \longrightarrow 2^U$ uma função* crescente*, isto é, para todo $A,\ B \subseteq U$*

$$A \subseteq B \;\Rightarrow\; fA \subseteq fB.$$

Então existe $S \in 2^U$ tal que $fS = S$. [6]

Prova. Seja

$$\mathcal{S} = \{A \in 2^U : A \subseteq fA\}.$$

Primeiro observamos o seguinte

Fato 1. $A \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; fA \in \mathcal{S}$.

Prova. Como f é crescente, temos que

$$A \subseteq fA \;\Rightarrow\; fA \subseteq f(fA)$$

e portanto fA satisfaz a condição que define a pertinência a $\mathcal{S}$.

Seja

$$S = \bigcup \mathcal{S} = \{x \in U : x \in A \text{ para algum } A \in \mathcal{S}\}.$$

Vamos mostrar que S é ponto fixo de f. Inicialmente estabelecemos

Fato 2. $S \in \mathcal{S}$.

Prova. Se $A \in \mathcal{S}$, então $A \subseteq S$ (por definição). Como f é crescente, obtemos

$$(*) \qquad fA \subseteq fS.$$

Por outro lado, como $A \in \mathcal{S}$, temos que $A \subseteq fA$. Logo, de (*) vem

$$\text{Para todo } A \in \mathcal{S}, \quad A \subseteq fS.$$

Uma vez que $S = \bigcup \mathcal{S}$, a relação precedente acarreta $S \subseteq fS$, isto é, $S \in \mathcal{S}$.

Para terminar a prova, é só juntar os Fatos 1 e 2. Senão vejamos :

∗ Como $S \in \mathcal{S}$, temos $S \subseteq fS$;

∗ Pelo Fato 1, $fS \in \mathcal{S}$ e assim $fS \subseteq \bigcup \mathcal{S} = S$. Portanto, $S = fS$, como desejado. □

Observação 1.14 A prova do Teorema 1.13 é um ótimo exemplo de algo *elementar e sofisticado*. Merece a atenção de todos ! □

Teorema 1.15 (Cantor-Bernstein) *Se $A,\ B$ são conjuntos, então*

$$A \preceq B \;\text{ e }\; B \preceq A \quad\Rightarrow\quad A \sim B.$$

Prova. Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ funções injetoras. Definimos

[6] S *é ponto fixo* de f.

$$F : 2^A \longrightarrow 2^A, \text{ por } F(C) \;=\; A - g_*(B - f_*C).$$

O leitor poderá verificar que F é crescente. Pelo Teorema 1.13, F tem um ponto fixo, isto é, existe $S \subseteq A$ tal que

$$S \;=\; F(S) \;=\; A - g_*(B - f_*S).$$

Logo,

$$(1) \qquad A - S = g_*(B - f_*S).$$

Como g é injetora, (1) implica que

$$(*) \qquad g_{|B-f_*S} \text{ é uma bijeção entre } B - f_*S \text{ e } A - S.$$

Por outro lado, já que f é injetora, temos que

$$(**) \qquad f_{|S} \text{ é uma bijeção entre } S \text{ e } f_*S.$$

Seja h a inversa de $g_{|B-f_*S}$, que existe pelo Exercício 1.6.(c). Então, h é uma bijeção entre $A - S$ e $B - f_*S$. Pelo Exercício 1.12, concluímos que $f_{|S} \vee h$ é uma bijeção entre

$$\begin{cases} dom\, f_{|S} \cup dom\, h \;=\; S \cup (A - S) \;=\; A \\ \qquad\qquad \text{e} \\ Im\, f_{|S} \cup Im\, h \;=\; f_*S \cup (B - f_*\,S) \;=\; B, \end{cases}$$

completando a prova. □

Teorema 1.16 (Cantor) *Se A é um conjunto, não existe função sobrejetora de A em 2^A. Em particular, não existe função bijetora de A em 2^A.*

Prova. Suponha que existisse $f : A \longrightarrow 2^A$ sobrejetora. Considere

$$S = \{a \in A : a \notin fa\}.$$

Como $S \subseteq A$ e f é sobrejetora, deve existir $s \in A$ tal que $fs = S$. Já que $s \in A$ e $S \subseteq A$, só há duas possibilidades : $s \in S$ ou $s \notin S$. No primeiro caso, teríamos

$$s \notin fs = S,$$

uma contradição. Por outro lado, se $s \notin S = fs$ a definição de S acarreta $s \in S$. Assim, qualquer das possibilidades implica um absurdo, cuja origem é a hipótese da existência de uma sobrejeção de A em 2^A, o que completa a prova. □

Observação 1.17 Está claro que $A \preceq 2^A$ ($a \mapsto \{a\}$ é injetora). Portanto o Teorema 1.16 garante que 2^A é sempre "estritamente maior" que A. □

Corolário 1.18 *O conjunto 2^ω não é enumerável.* [7]

Teorema 1.19 *Seja A_i, $i \in I$, uma família de conjuntos. Então*

$$I \preceq \omega \;\; e \;\; \forall\, i \in I,\, A_i \preceq \omega \quad \Rightarrow \quad \textstyle\bigcup_{i\in I} A_i \;\preceq\; \omega.$$

[7] Seja como partes de ω, seja como as sequências de 0's e 1's; veja 1.7.(a).

Prova. Veja Teorema 2.14 e seu Corolário em [Rudin]. □

Lema 1.20 *Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função e suponha que*

(1) *$Im\, f$ é enumerável;* (2) *Para todo $y \in Im\, f$, $f^*(\{y\})$ é enumerável.*

Então, A é enumerável.

Prova. Como

$$A = \bigcup_{b \in Im\, f} f^*(\{b\}),$$

A é união enumerável de conjuntos enumeráveis, e a conclusão segue do Teorema 1.19. □

Definição 1.21 *Seja A_i, $i \in I$, uma família de conjuntos não vazios e $\beta \in \prod_{i \in I} A_i$. Definimos*

$$\bigoplus_{i \in I}^{\beta} A_i = \{s \in \prod_{i \in I} : \{i \in I : s(i) \neq \beta(i)\} \text{ é finito } \},$$

denominada a **soma dos A_i com ponto base β**. *Para $s \in \bigoplus_{i \in I}^{\beta} A_i$, definimos*

$$\sigma(s) = \{i \in I : s(i) \neq \beta(i)\}$$

denominado o **suporte de s relativamente ao ponto base β**.

Se todos os conjuntos A_i são iguais a A, a soma de I parcelas iguais a A com ponto base $\beta \in A^I$ é indicada por $\bigoplus_I^{\beta} A$.

Exemplo 1.22 Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots \}$. Tomando a sequência constante $\widehat{0} = \langle\, 0, 0, \dots, 0, \dots \rangle \in \mathbb{Z}^{\omega}$ como ponto base,

$$\bigoplus_{\omega}^{\hat{0}} \mathbb{Z} = \{s \in \mathbb{Z}^{\omega} : \{n \in \omega : s(n) \neq 0\} \text{ é finito}\},$$

em geral indicado por $\bigoplus_{\omega} \mathbb{Z}$. Assim, os elementos de $\bigoplus_{\omega}^{\hat{0}} \mathbb{Z}$, são as as chamadas **sequências quasi-nulas** de inteiros, aquelas que só são distintas de zero num conjunto finito de coordenadas. A definição em 1.21 é apenas uma generalização deste exemplo importante (veja o Exercício 1.23, logo abaixo). □

Exercício 1.23 *Seja R um anel comutativo*[8] *com identidade 1 e*

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{\omega} R$$

a soma de ω parcelas de R, com ponto base a sequência constantemente 0.

a) Para $a \in R$, s, $t \in \mathcal{P}$, definimos soma, multiplicação e multiplicação por a, da forma seguinte :

$$\begin{cases} [s + t](n) = s(n) + t(n); \\ [st](n) = \sum_{k+m=n} s(k)t(m); \\ [a \cdot s](n) = as(n). \end{cases}$$

É fácil ver que $\mathcal{P}$ é fechado em relação a estas operações, com as quais é um anel comutativo, com neutro multiplicativo (ou 1) dado por $\langle\, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots \rangle$ e neutro aditivo (ou 0) igual à sequência constantemente 0.

[8] Se você não sabe o que é isto, suponha que R é $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

b) Seja $R \xrightarrow{h} \mathcal{P}$ *dada por* $h(a) = \langle\, a, 0, 0, \ldots, 0, \ldots \rangle$. *Para* $a,\ b \in R$ *e* $s \in \mathcal{P}$ *temos*

(1) $a \cdot s = h(a)s$. (2) $h(a\ +\ b) = h(a)\ +\ h(b)$. (3) $h(ab) = h(a)h(b)$.

(4) h *é um isomorfismo de* R *no conjunto das sequências de* $\mathcal{P}$ *que são nulas depois da primeira casa.*

c) Seja $x = \langle\, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots \rangle$. *Para todo* $n \geq 1$ *e* $a \in R$

(1) $x^n \ = \ \langle\, 0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots \rangle$. (2) $a \cdot x^n \ = \ \langle\, 0, 0, \ldots, \underbrace{a}_{n}, 0, \ldots \rangle$.

d) Seja $R \xrightarrow{f} A$ *um homomorfismo de anéis. Para cada* $\alpha \in A$, *existe um* único *homomorfismo de anéis,* $g : \mathcal{P} \longrightarrow A$, *tal que* $g(x) = \alpha$ *e o triangulo abaixo é comutativo :*[9]

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathcal{P} \arrow[dl, "g"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

e) $\mathcal{P}$ *é isomorfo ao anel dos polinômios em uma variável com coeficientes em* R, *isto é,* $\mathcal{P} \ \approx \ R[X]$ [10]. □

Proposição 1.24 *Seja* A_n, $n \in \omega$, *uma sequência de conjuntos e seja* $\beta \in \prod_{n\in\omega} A_n$ *um ponto base. Se cada* A_n *é enumerável, o mesmo é verdade para* $\bigoplus_{n\in\omega}^{\beta} A_n$.

Prova. Seja $A = \bigoplus_{n\in\omega}^{\beta} A_n$; lembre-se que $\sigma(s)$ é o suporte de $s \in A$ (1.21). Já que $\sigma(s)$ é finito, a função $\gamma : A \longrightarrow \omega$ dada por

$$\gamma(s) \ = \ \max \sigma(n) \ = \ \max\, \{n \in \omega : s(n) \neq \beta(n)\}$$

está bem definida. Está claro que a imagem de γ é enumerável, pois é subconjunto de ω [11]. Se $k \in Im\,\gamma$, observe que

$$\gamma^*(\{k\}) \ = \ \{s \in A : \text{Para todo } m \geq k+1,\ s(m) = \beta(m)\}.$$

De fato, se $\gamma(s) = k$, então k é o maior natural n tal que $s(n) \neq \beta(n)$. Assim, a partir de $k+1$, os valores de s devem coincidir com os do ponto base β.

Definimos $f_k : \gamma^*(\{k\}) \longrightarrow \prod_{j=0}^{k} A_j$, da forma seguinte :

$$f_k(s) \ = \ s_{|\{0,1,\ldots,k\}}.$$

Fato. *A função* f_k *é injetora.*

Prova. Se $s,\ t \in \gamma^*(\{k\})$, então s e t coincidem depois da coordenada $k+1$, pois ambas são iguais a β. Assim, se $s \neq t$, elas devem diferir em algum ponto n entre 0 e k. Como f_k "esquece" apenas as coordenadas depois de k, temos

[9] x como em (c) e h como em (b).

[10] Na realidade, $\mathcal{P}$ **é o anel de polinômios** $R[X]$.

[11] Se cada A_n tem pelo menos dois pontos, γ é sobrejetora. Mas isto não tem importância para a prova.

$$f_k(s)(n) \;=\; s(n) \;\neq\; t(n) \;=\; f_k(t)(n),$$

e portanto $f_k(s) \neq f_k(t)$, estabelecendo a injetividade de f_k.

Como cada A_j é enumerável, sabemos que $\prod_{j=0}^{k} A_j$ é enumerável. Já que f_k é injetora, concluímos que $\gamma^*(\{k\})$ também é enumerável. A conclusão desejada é agora consequência imediata do Lema 1.20. [12] $\square$

O Exercício 1.23, a Proposição 1.24 e o fato que $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são enumeráveis fornecem

Corolário 1.25 *Os anéis de polinômios $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$ são enumeráveis.*

Exercício 1.26 *Um número real (ou complexo) é* **algébrico** *se for raiz de um polinômio com coeficientes racionais (ou inteiros, é equivalente). Mostre que o conjunto dos números algébricos (reais ou complexos) é enumerável.* [13]

[12] Quem fizer o Exercício 1.23 descobre de onde veio a idéia desta prova.

[13] Sugestão : defina uma função que tem valores em um conjunto enumerável e utilize o Lema 1.20.

Capítulo 2

Espaços Normados e Métricos

2.1 Funções Convexas e Aplicações

Indicamos por $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais. Utilizaremos as notações correntes para intervalos, isto é, se $a < b$ em $\mathbb{R}$

$$(a, b) \;=\; \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}; \qquad [a, b] \;=\; \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\};$$
$$[a, b) \;=\; \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}; \qquad (a, b] \;=\; \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}.$$

Nesta notação estão incluídos os casos em que $a = -\infty$ e $b = \infty$. A expressão **intervalo** significa um subconjunto de $\mathbb{R}$ de uma das formas acima. O intervalo $[0, \infty)$ também é indicado por $\mathbb{R}_+$.

Lembre-se (1.1) que se $n \ge 1$ é um inteiro, A^n é a n-ésima potência caretesiana de A. Assim,

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n &= \; \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle : a_j \in \mathbb{R},\, 1 \le j \le n\} \\ & e \\ \mathbb{R}^n_+ &= \; \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathbb{R}^n : a_j \ge 0,\, 1 \le j \le \text{ n}\}. \end{cases}$$

Em geral escrevemos $x \in \mathbb{R}^n$, com $x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, isto é, x_j é a j-ésima componente de x, $1 \le j \le n$.

Definição 2.1 *Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$. Uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é* **convexa** *se para todo $\lambda \in [0, 1]$ e $s < t$ em I,*

$$f(\lambda s \;+\; (1 - \lambda)t) \;\le\; \lambda f(s) \;+\; (1 - \lambda) f(t).$$

A idéia geométrica associada à uma função convexa é que a reta que liga dois pontos em seu gráfico está por cima dos pontos correspondentes na curva.

Proposição 2.2 *Para uma função $(a, b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, as seguintes condições são equivalentes :*

(1) *f é convexa;*

(2) *Para todo $u < s < v$ em (a, b),* $\dfrac{f(s) - f(u)}{s - u} \;\le\; \dfrac{f(v) - f(s)}{v - s}$.

(3) *Para todo* $u < s \leq t < v$ *em* (a, b), $\dfrac{f(s) - f(u)}{s - u} \leq \dfrac{f(v) - f(t)}{v - t}$.

Se f *é diferenciável, as condições acima são equivalentes a*

(4) f' *é crescente em* (a, b) [1].

Prova. Primeiro, verificaremos que (1) $\Leftrightarrow$ (2).

<u>(1) $\Rightarrow$ (2) :</u> Observe que

(I) $$s = \frac{v - s}{v - u}\, u + \frac{s - u}{v - u}\, v \quad \text{e} \quad \frac{v - s}{v - u} + \frac{s - u}{v - u} = 1.$$

Portanto, a convexidade de f fornece

(II) $$f(s) \leq \frac{v - s}{v - u}\, f(u) + \frac{s - u}{v - u}\, f(v).$$

Podemos agora reescrever (II) da forma seguinte :

(III) $$f(s) = \frac{v - s}{v - u}\, f(s) + \frac{s - u}{v - u}\, f(s) \leq \frac{v - s}{v - u}\, f(u) + \frac{s - u}{v - u}\, f(v).$$

Agora, manipulações elementares em (III) mostram a validade de (2).

<u>(2) $\Rightarrow$ (1) :</u> Fixemos $\lambda \in (0,\, 1)$ [2], bem como $s < t$ em $(a,\, b)$. Seja

$$x = \lambda s + (1 - \lambda)t.$$

Como $s < x < t$, (2) fornece,

(IV) $$\frac{f(x) - f(s)}{x - s} \leq \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Logo,

$$(x - s)(f(x) - f(s)) \leq (t - x)(f(t) - f(x)),$$

donde obtemos

$$[(x - s) + (t - x)]f(x) = (t - s)f(x) \leq (x - s)f(s) + (t - x)f(t).$$

isto é,

$$f(x) \leq \frac{x - s}{t - s}\, f(x) + \frac{t - x}{t - s}\, f(t).$$

Deixamos ao leitor a verificação de que temos

$$\lambda = \frac{x - s}{t - s} \quad \text{e} \quad (1 - \lambda) = \frac{t - x}{t - s},$$

como necessário para provar (1).

<u>(3) $\Leftrightarrow$ (2) :</u> Está claro que (3) $\Rightarrow$ (2). Para a recíproca, podemos supor que $s < t$. Neste caso, aplicamos (2) às triplas $u < s < t$ e $s < t < v$ para obter

$$\frac{f(s) - f(u)}{s - u} \leq \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{v) - f(t)}{v - t},$$

completando a prova da equivalência das condições (1), (2) e (3).

Suponha agora que f é diferenciável e convexa. Sejam $s < t$ em $(a,\, b)$. Como

[1] f' é a derivada de f.

[2] Caso contrário, nada a demonstrar.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

se $0 < h < \frac{t-s}{2}$, então (3) implica que

$$\frac{f(s+h) - f(s)}{h} \quad \leq \quad \frac{f(t) - f(t-h)}{h},$$

e portanto

$$f'(s) \quad = \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(s+h) - f(s)}{h} \quad \leq \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad = \quad f'(t),$$

mostrando que f' é crescente em $(a,\, b)$. Reciprocamente, se $u < s < v$ em $(a,\, b)$, o Teorema do Valor Médio fornece $\xi \in (u,\, s)$ e $\zeta \in (s,\, v)$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(s) - f(u)}{s-u} \quad \text{e} \quad f'(\zeta) = \frac{f(v) - f(s)}{v-s}.$$

Uma vez que $\xi < \zeta$ e f' é crescente, obtemos a condição (2), concluindo que f é convexa. $\square$

Corolário 2.3 *Se $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $f'' \geq 0$ em (a,b), então f é convexa em (a,b).*

Prova. Se $f'' \geq 0$ então f' é crescente em $(a,\, b)$ e portanto (4) em 2.2 garante que f é convexa. $\square$

Proposição 2.4 *Toda função convexa em um intervalo aberto é contínua.*

Prova. Suponha que f é convexa em $(a,\, b)$ e $x \in (a,\, b)$. Fixemos $y \in (a,\, b)$ tal que $x < y$. Se t é tal que

$$x < t < y,$$

então, como na prova da equivalência entre (1) e (2) na Proposição 2.2

$$\text{(I)} \qquad f(t) \leq \frac{y-t}{y-x}\, f(x) \quad + \quad \frac{t-x}{y-x}\, f(y).$$

Seja agora $s \in (a,\, b)$ tal que $s < x$. Então, a tripla $s < x < t$ nos fornece

$$f(x) \quad \leq \quad \frac{t-x}{t-s}\, f(s) \quad + \quad \frac{x-s}{t-s}\, f(t).$$

de onde obtemos

$$\text{(II)} \qquad f(t) \quad \geq \quad \frac{t-s}{x-s}\, f(x) \quad - \quad \frac{t-x}{x-s}\, f(s).$$

Portanto (I) e (II) fornecem

$$\text{(III)} \qquad \frac{t-s}{x-s}\, f(x) \quad - \quad \frac{t-x}{x-s}\, f(s) \quad \leq \quad f(t) \quad \leq \quad \frac{y-t}{y-x}\, f(x) \quad + \quad \frac{t-x}{y-x}\, f(y).$$

Agora observe que quando $t \longrightarrow x$ tanto lado esquerdo da desigualdade em (III), quanto o seu lado direito, convergem para $f(x)$; assim $\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$, como necessário. $\square$

Observação 2.5 O enunciado de 2.4 é falso se o intervalo não for aberto. Por exemplo, a função $f : [0,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,\, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

é convexa e descontínua. $\square$

Corolário 2.6 *a) A função exponencial e^x é convexa em $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.*
b) Se $a,\ b \in \mathbb{R}^+$, a função $(a+bt)^p$ é convexa em $(0,\ \infty)$.

Prova. Como $(e^x)' = e^x$, que é crescente, a conclusão segue de 2.2.(4) (ou 2.3). O mesmo método se aplica a (b); se $f(t) = (a+bt)^p$, então

$$f'(t) = pb(a+bt)^{p-1},$$

que é crescente pois $b \geq 0$ e $p \geq 1$. $\square$

Teorema 2.7 (Jensen) *Seja f uma função convexa em (a,b) e $n \geq 1$ um inteiro. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e $a_1, \ldots, a_n$ são reais tais que*

$$(i)\ a_j \in (a,b) \quad e \quad \lambda_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n; \qquad\qquad (ii)\ \textstyle\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1,$$

então

$$f\left(\textstyle\sum_{j=1}^n \lambda_j a_j\right) \ \leq\ \textstyle\sum_{j=1}^n \lambda_j f(a_j).$$

Prova. É f'acil ver que $\sum_{j=1}^n \lambda_j a_j \in (a,\ b)$. Assim, o lado esquerdo da desigualdade no enunciado faz sentido.

Para $n = 1$ o resultado é óbvio. Para $n = 2$, vem diretamente da convexidade de f. Prosseguimos por indução em $n \geq 2$. Suponha o resultado verdadeiro para n e considere $(n+1)$-uplas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n,\ \lambda_{n+1}$ e $a_1, \ldots, a_n,\ a_{n+1}$, nas condições do enunciado. Seja

$$\alpha = \textstyle\sum_{j=1}^n \lambda_j.$$

Então, $\alpha + \lambda_{n+1} = 1$ e temos

$$\text{(I)} \qquad \textstyle\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_j \ =\ \alpha\, \dfrac{\sum_{j=1}^n \lambda_j a_j}{\alpha} \ +\ \lambda_{n+1} a_{n+1} \ =\ \alpha \sum_{j=1}^n \dfrac{\lambda_j}{\alpha}\, a_j \ +\ \lambda_{n+1} a_{n+1}.$$

Como f é convexa, (I) acarreta

$$\text{(II)} \qquad f\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_j\right) \ \leq\ \alpha\ f\left(\textstyle\sum_{j=1}^n \dfrac{\lambda_j}{\alpha}\, a_j\right) \ +\ \lambda_{n+1} f(a_{n+1}).$$

Agora observe que

$$\textstyle\sum_{j=1}^n \dfrac{\lambda_j}{\alpha} \ =\ 1,$$

e assim a hipótese de indução nos garante que

$$\alpha\ f\left(\textstyle\sum_{j=1}^n \dfrac{\lambda_j}{\alpha}\, a_j\right) \ \leq\ \alpha \sum_{j=1}^n \dfrac{\lambda_j}{\alpha}\ f(a_j) \ =\ \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j,$$

que substituída em (II) completa a verificação do passo de indução e a prova. $\square$

Corolário 2.8 *Seja $n \geq 1$ um inteiro.*

a) Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e $a_1, \ldots, a_n$ são elementos de $(0,\ \infty)$ e $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, então

$$\textstyle\prod_{j=1}^n a_j^{\lambda_j} \ \leq\ \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j.$$

b) Se $a_1, \ldots, a_n$ são elementos de $\mathbb{R}^+$, então

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \;\leq\; \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j.$$ [3]

c) (Young) *Se a, $b \in \mathbb{R}^+$ e p, $q \in [1, \infty)$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Prova. a) Como a imagem da função exponencial é exatamente $(0, \infty)$, para cada j entre 1 e n existe $x_j \in \mathbb{R}$ tal que

$$e^{x_j} \;=\; a_j.$$

Como e^x é convexa (2.6.(a)), a desigualdade de Jensen em 2.7 fornece

$$\prod_{j=1}^n a_j^{\lambda_j} \;=\; \prod_{j=1}^n e^{\lambda_j x_j} \;=\; e^{\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j} \;\leq\; \sum_{j=1}^n \lambda_j e^{x_j} \;=\; \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j,$$

como desejado. O ítem (b) é conseqüência imediata de (a), tomando-se $\lambda_j = \frac{1}{n}$, $1 \leq j \leq n$. Para (c) (a desigualdade de Young), utilizamos o mesmo método. Podemos supor que a, b são ambos distintos de 0, senão a desigualdade é trivial. Assim, existem x, $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$e^x = a^p \quad \text{e} \quad e^y = b^q.$$

Portanto,

$$ab \;=\; e^{x/p} e^{y/q} \;=\; e^{x/p + y/q} \;\leq\; \frac{e^x}{p} + \frac{e^y}{q} \;=\; \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

completando a prova. □

Definição 2.9 *Para $p \in [1, \infty]$ e $a = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathbb{R}^n$, definimos*

$$\|a\|_p \;=\; \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{1/p},$$

denominada a **norma p de a**. *Também definimos*

$$\|a\|_\infty \;=\; \max_{1 \leq j \leq n} |a_j|,$$

denominada a **norma infinito ou do sup de a**.

Exercício 2.10 *Para $p \in [1, \infty]$, $a \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$*

a) $\|a\|_p \geq 0$ *e* $\|a\|_p = 0 \;\Leftrightarrow a = 0\ (= \langle 0, 0, \ldots, 0 \rangle)$.

b) $\|\lambda\, a\|_p \;=\; |\lambda|\ \|a\|_p$.

Teorema 2.11 (Hölder) *Se p, $q \in [1, \infty)$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então para todo a, $b \in \mathbb{R}^n_+$*

$$a \cdot b \;=_{def}\; \sum_{j=1}^n a_j b_j \;\leq\; \|a\|_p\ \|b\|_q.$$

Prova. Para j entre 1 e n, definimos

[3] A média geométrica é sempre menor que a aritmética.

$$x_j = \frac{a_j}{\|a\|_p} \quad \text{e} \quad y_j = \frac{b_j}{\|b\|_q}.$$

Pela desigualdade de Young (2.8.(c)), temos

$$x_j y_j \;\le\; \frac{x_j^p}{p} + \frac{y_j^q}{q}.$$

Somando ambos os lados em relação a j, obtemos

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{j=1}^n x_j y_j \;&\le\; \frac{1}{p} \textstyle\sum_{j=1}^n x_j^p \;+\; \frac{1}{q} \textstyle\sum_{j=1}^n y_j^q \\
\text{(I)} \qquad &=\; \frac{1}{p} \frac{\sum_{j=1}^n a_j^p}{\|a\|_p{}^p} \;+\; \frac{1}{q} \frac{\sum_{j=1}^n b_j^q}{\|b\|_q{}^q} \\
&=\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \;=\; 1.
\end{aligned}$$

Agora note que

$$\textstyle\sum_{j=1}^n x_j y_j \;=\; \frac{\sum_{j=1}^n a_j b_j}{\|a\|_p \|b\|_q} \;=\; \frac{a \cdot b}{\|a\|_p \|b\|_q},$$

e a desigualdade (I) acarreta $a \cdot b \;\le\; \|a\|_p \, \|b\|_q$, como desejado. □

Teorema 2.12 (Minkowski) *Para* $p \in [1, \infty]$ *e* $a,\, b \in \mathbb{R}^n$,

$$\|a \;+\; b\|_p \;\le\; \|a\|_p + \|b\|_p.$$

Prova. Os caso de $p = 1,\, \infty$ são deixados para o leitor. Para $p \in (1,\, \infty)$, faremos duas provas : a primeira utiliza o Teorema 2.11; a segunda, outra técnica. Além disso como

$$\textstyle\sum_{j=1}^n |a_j \;+\; b_j|^p \;\le\; \sum_{j=1}^n (|a_j| \;+\; |b_j|)^p,$$

podemos supor que $a,\, b \in \mathbb{R}^n_+$.

Prova I. Para cada j entre 1 e n, temos

$$(a_j \;+\; b_j)^p \;=\; a_j(a_j \;+\; b_j)^{p-1} + b_j(a_j \;+\; b_j)^{p-1}.$$

Portanto,

$$\text{(I)} \qquad \textstyle\sum_{j=1}^n (a_j \;+\; b_j)^p \;=\; \sum_{j=1}^n a_j(a_j \;+\; b_j)^{p-1} \;+\; \sum_{j=1}^n b_j(a_j \;+\; b_j)^{p-1}.$$

Seja $x = \langle\, (a_1 \;+\; b_1)^{p-1}, \ldots, (a_n \;+\; b_n)^{p-1} \,\rangle$; aplicando a desigualdade de Hölder (2.11) a cada termo do lado direito de (I), obtemos

$$\text{(II)} \qquad \textstyle\sum_{j=1}^n (a_j \;+\; b_j)^p \;\le\; \|a\|_p \, \|x\|_q + \|b\|_p \, \|x\|_q \;=\; \|x\|_q \, (\|a\|_p + \|b\|_p).$$

Agora observe que

$$\text{(III)} \qquad \|x\|_q \;=\; \Big(\textstyle\sum_{j=1}^n (a_j \;+\; b_j)^{(p-1)q}\Big)^{1/q}.$$

Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos $(p-1)q = p$ e $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$. Portanto, (III) implica

$$\text{(IV)} \qquad \|x\|_q \;=\; \Big(\textstyle\sum_{j=1}^n (a_j \;+\; b_j)^p\Big)^{1-1/p} \;=\; \frac{\sum_{j=1}^n (a_j \;+\; b_j)^p}{\|a \;+\; b\|_p},$$

isto é, $\sum_{j=1}^n (a_j \;+\; b_j)^p \;=\; \|x\|_q \, \|a \;+\; b\|_p$. Voltando com esta relação em (II), obtemos $\|a \;+\; b\|_p \le \|a\|_p + \|b\|_p$, como necessário.

Prova II. Seja $\lambda = \dfrac{\|a\|_p}{\|a\|_p + \|b\|_p}$; claro que $(1 - \lambda) = \dfrac{\|b\|_p}{\|a\|_p + \|b\|_p}$. Sejam também

$$x = \frac{a}{\|a\|_p} \quad \text{e} \quad y = \frac{b}{\|b\|_p}.$$

Observe que pelo Exercício 2.10.(b), temos

$$\|x\|_p \ = \ \|y\|_p \ = \ 1. \tag{1}$$

Então, uma nova aplicação de 2.10.(b) nos fornece

$$\begin{aligned} \|a \ + \ b\|_p{}^p \ &= \ \textstyle\sum_{j=1}^n (a_j \ + \ b_j)^p \ = \ \sum_{j=1}^n (\|a\|_p x_j \ + \ \|b\|_p y_j)^p \\ &= \ (\|a\|_p \ + \ \|b\|_p)^p \textstyle\sum_{j=1}^n \left(\dfrac{\|a\|_p \ x_j}{\|a\|_p + \|b\|_p} \ + \ \dfrac{\|b\|_p \ y_j}{\|a\|_p + \|b\|_p} \right)^p \qquad (2) \\ &= \ (\|a\|_p \ + \ \|b\|_p)^p \textstyle\sum_{j=1}^n (\lambda x_j \ + \ (1-\lambda) y_j)^p. \end{aligned}$$

Uma vez que a função t^p é convexa (2.6.(b)), temos, lembrando (1),

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^n (\lambda x_j \ + \ (1-\lambda) y_j)^p \ &\leq \ \textstyle\sum_{j=1}^n \lambda x_j^p + (1 - \lambda) y_j^p \ = \ \lambda \, \|x\|_p{}^p + (1 - \lambda) \|y\|_p{}^p \\ &= \ \lambda + (1 - \lambda) \ = \ 1. \end{aligned}$$

Seque imediatamente desta desigualdade e de (2) que

$$\|a \ + \ b\|_p{}^p \ \leq \ (\|a\|_p \ + \ \|b\|_p)^p$$

que implica a desigualdade desejada. $\square$

2.2 Espaços Normados

Definição 2.13 *Seja V um espaço vetorial real. Uma* **norma** *em V é uma função*

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

que satisfaz para todo u, $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

[nor 1] : $\|u\| = 0$ sse $u = 0$;

[nor 2] : $\|\lambda u\| \ = \ |\lambda| \|u\|$;

[nor 3] : $\|u \ + \ v\| \ \leq \ \|u\| \ + \ \|v\|$.

Lema 2.14 *Seja $\langle V, \|\cdot\| \rangle$ um espaço normado. Definimos*

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad por \quad d(u, v) = \|u \ - \ v\|.$$

Então, a função d satisfaz as seguintes propriedades, para u, v, $w \in V$:

a) $d(u, v) = 0$ sse $u = v$.

b) $d(u, v) = d(v, u)$.

c) $d(u, w) \ \leq \ d(u, v) \ + \ d(v, w)$.

d) d respeita homotetias, isto é, $d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u, v)$.

e) d é invariante por translação, isto é, $d((u + v), (u + w)) = d(v, w)$.

Prova. Faremos (b) e (c), deixando os outros para o leitor.

b) A propriedade [*nor* 2] em 2.13 fornece

$$d(u,v) = \|u - v\| = \|-1(v - u)\| = |-1|\|v - u\| = \|v - u\| = d(v,u).$$

c) Como $u - w = (u - v) + (v - w)$, temos, utilizando [*nor* 3] em 2.13 e (b)

$$\begin{aligned} d(u,w) &= \|u - w\| = \|(u-v) + (v-w)\| \\ &\leq \|u - v\| + \|v - w\| = d(u,v) + d(v,w). \end{aligned}$$

□

Definição 2.15 *Se* $\langle V, \|\cdot\| \rangle$ *é um espaço normado e* r *é um real* > 0, *definimos*

$$* \; B_r = \{v \in V : \|v\| < r\}; \qquad * \; \overline{B}_r = \{v \in V : \|v\| \leq r\}.$$

No caso em que $r = 1$, *escrevemos* B *e* $\overline{B}$ *no lugar de* B_1 *e* $\overline{B}_1$.

Definição 2.16 *Se* V *é um espaço vetorial real e* $A \subseteq V$, A *é* **convexo** *se para* u, $v \in A$ *e* $\lambda \in [0,1]$

$$\lambda u + (1-\lambda)v \in A.$$

Exercício 2.17 *Sejam* $\langle V, \|\cdot\| \rangle$ *um espaço normado e* r, s *reais* > 0.

a) B_r *e* $\overline{B}_r$ *são convexos.*

b) Para $A \subseteq V$, *defina* $rA = \{ru : u \in A\}$. *Então*

$$rB_s = B_{rs} \quad e \quad r\overline{B}_s = \overline{B}_{rs}.$$

Exemplo 2.18 Pelo Teorema 2.12 e o Exercício 2.10, para $p \in [1, \infty]$ as funções

$$a \in \mathbb{R}^n \longmapsto \begin{cases} \|a\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{1/p} & \text{se } p \in [1, \infty) \\ \|a\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |a_j| & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

são normas em $\mathbb{R}^n$.

□

Exemplo 2.19 Seja

$$\ell_\infty(\omega) = \{s \in \mathbb{R}^\omega : \sup_{j \in \omega} |s(j)| < \infty\}$$

o conjunto de todas as sequências limitadas de reais. Note que se s, $t \in \ell_\infty(\omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, podemos definir

$$\begin{cases} [s+t](n) = s(n) + t(n) \\ [st](n) = s(n)t(n) \\ [\lambda s](n) = \lambda s(n), \end{cases}$$

estabelecendo as operações de soma, multiplicação e multiplicação por escalar em $\ell_\infty(\omega)$. É fácil ver que

$$s,\, t \in \ell_\infty(\omega) \quad \Rightarrow \quad s + t,\; st \text{ e } \lambda s \in \ell_\infty(\omega),$$

bem como que estas operações são comutativas, associativas e que a multiplicação distribui pela soma. Além disso, estas operações têm elementos neutros :

$*$ A sequência constante igual a zero, $\widehat{0}$, é o neutro aditivo de $\ell_\infty(\omega)$;

$*$ A sequência constante igual a 1, $\widehat{1}$, é o neutro multiplicativo de $\ell_\infty(\omega)$.

$*$ Em geral, se λ é um real, indicaremos a sequência constante de valor λ por $\widehat{\lambda}$. Note que $\lambda s = \widehat{\lambda} s$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $s \in \ell_\infty(\omega)$.

$*$ A função $\lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \widehat{\lambda} \in \ell_\infty(\omega)$ é injetora, e de fato, um isomorphismo entre $\mathbb{R}$ e o conjunto das sequências constantes de $\ell_\infty(\omega)$. Assim, $\ell_\infty(\omega)$ é uma **álgebra real**, não só um espaço vetorial real.

Deixamos para o leitor a verificação de que a função

$$s \in \ell_\infty(\omega) \quad \longmapsto \quad \|s\|_\infty \quad = \quad \sup_{n\in\omega} |s(n)|$$

é uma **norma** em $\ell_\infty(\omega)$, denominada **norma do sup**. Temos assim um novo exemplo de espaço normado, desta vez de *dimensão infinita* [4]. □

Exercício 2.20 *Construir uma coleção não enumerável, $\{s_i : i \in I\} \subseteq \ell_\infty(\omega)$, satisfazendo as seguintes condições :*

$$(1)\ \textit{Para todo } i \in I, \ \ \|s_i\|_\infty = 1; \qquad (2)\ \textit{Para } i \neq j \textit{ em } I, \ \ \|s_i - s_j\|_\infty = 1.$$ [5]

2.3 Espaços Métricos

Definição 2.21 *Um* **espaço métrico** *é um par $\langle M, d\rangle$, onde M é um conjunto e $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função* [6]*, satisfazendo, para todo $x,\ y,\ z \in M$*

$[d\ 1]$: $d(x,y) = 0 \ \ sse \ \ x = y$;

$[d\ 2]$: $d(x,y) = d(y,x)$;

$[d\ 3]$ (desigualdade triangular) $d(x,z) \ \leq \ d(x,y) \ + \ d(y,z)$.

Se $x \in M$ e r é um real > 0, definimos

$$\begin{cases} N_r(x) & = & \{y \in M : d(x,y) < r\} \\ \overline{N}_r(x) & = & \{y \in M : d(x,y) \leq r\} \end{cases}$$

denominadas **bola aberta e fechada de raio *r* e centro em *x***, *respectivemente.*

Lema 2.22 *Seja $\langle M, d\rangle$ um espaço métrico, $x,\ y \in M$ e $r,\ s$ reais > 0.*

a) $r \leq s \ \Rightarrow \ N_r(x) \subseteq N_s(x)$.

b) $r \ + \ s \ \leq \ d(x,y) \ \ \Rightarrow \ \ N_r(x) \cap N_s(y) = \emptyset$.

b) Se $x \neq y$, então existe $r > 0$ tal que $N_r(x) \cap N_r(y) = \emptyset$.

Prova. O ítem (a) é óbvio a partir da definição. Para (b), suponha por absurdo que existisse $z \in N_r(x) \cap N_s(y)$. Então, da desigualdade triangular vem

[4] E não enumerável !

[5] O Corolário 1.18 pode ser útil; sequências de 0's e 1's também.

[6] Chamada de *distância ou métrica* em M.

$$d(x,y) \;\leq\; d(x,z) + d(z,y) \;<\; r + s,$$

contra a hipótese em (b). O ítem (c) segue de (b) com $r \leq \dfrac{d(x,y)}{2}$. □

Observação 2.23 A recíproca de 2.22.(b) é, em geral, falsa. O exemplo 2.27 abaixo pode ajudar o leitor a verificar este fato. Para *espaços normados*, a recíproca de 2.22.(b) é verdadeira; veja Exercício 2.26.

A propriedade 2.22.(c) mostra que todo espaço métrico é **Hausdorff**, isto é, pontos distintos têm vizinhanças disjuntas. □

Exemplo 2.24 Pelo Lema 2.14, todo espaço normado dá origem à um espaço métrico, cuja distância é dada por

$$d(u,v) \;=\; \|u \;-\; v\|.$$

Assim, todos os exemplos concretos que temos de espaços normados fornecem exemplos de espaços métricos. No que segue, veremos alguns exemplos que não provem de normas. □

Exercício 2.25 *Se $\langle\, V, \|\cdot\|\,\rangle$ é um espaço normado, $u \in V$ e $r > 0$, então*

$$N_r(u) \;=\; u \;+\; rB,$$

onde para $A \subseteq V$, $u \;+\; A \;=\; \{u \;+\; v : v \in A\}$. Lembre que $B = \{x \in V : \|v\| < 1\}$ (2.15).

Este exercício mostra que a métrica de um espaço normado é inteiramente determinada por B, as translações e as homotetias de razão positiva. Um espaço normado é portanto homogêneo *: um pedaço se parece muito com qualquer outro.*

Exercício 2.26 *Se $\langle\, V, \|\cdot\|\,\rangle$ é um espaço normado, $x \in V$ e $r,\, s > 0$, então*

$$r \leq s \quad \Leftrightarrow \quad N_r(x) \subseteq N_s(x).$$

Exemplo 2.27 Seja M um conjunto não vazio. Definimos

$$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{por} \quad d(x,y) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

$\langle\, M, d\,\rangle$ é um espaço métrico, denominado **discreto**. É fácil ver que, mesmo no caso em que M é um espaço vetorial, esta métrica não provem de nenhuma norma em M. □

Exemplo 2.28 Seja $M = 2^\omega$ o conjunto de todas as sequências de 0's e 1's. Como é usual em Teoria dos Conjuntos, identificamos 2 com o conjunto $\{0,\, 1\}$ e a notação exponencial é consistente com a nossa notação para conjuntos de funções. Iremos mesmo estender esta convenção adotando aqui a notação standard, isto é,

$$n = \{0,\, 1,\, \ldots\,,\, (n-1)\},$$

para todo $n \in \omega$. Note que $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, etc.

Para $s,\, t \in 2^\omega$, definimos

$$\gamma(s,\,t) = \begin{cases} \min\,\{n\,:\,s(n) \neq t(n)\} & \text{se } s \neq t \\ \infty & \text{se } s = t. \end{cases}$$

Note que $\gamma(s,\,t) < \infty$ sse $s \neq t$. A partir da função γ, definimos

$$d(s,\,t) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{1\,+\,\gamma(s,t)} & \text{se } s \neq t \\ 0 & \text{se } s = t. \end{cases}$$

A razão para incluirmos 1 no denominador da definição de d é que como $0 \in \omega$, é perfeitamente possível que duas sequências seja distintas justo na primeira casa. Neste caso $\gamma = 0$ e como todos sabem, é bom evitar a fração $\dfrac{1}{0}$.

Fato 2.29 *d é uma métrica em 2^ω, tal que $d(s,t) \leq 1$.*

Prova. Está claro que $d(s,\,t) \leq 1$ e que d verifica $[d\ 1]$ e $[d\ 2]$ em 2.21. Resta provar a desigualdade triangular. Para isto podemos supor que $s,\,t,\,z \in 2^\omega$ são duas a duas distintas. Vamos mostrar que

$$(*) \qquad \gamma(s,\,z) \;\geq\; \min\,\{\gamma(s,\,t),\,\gamma(t,\,z)\}.$$

De fato, seja $k = \gamma(s,\,t)$ e $m = \gamma(t,\,z)$; então, os valores de s e t coincidem antes de k, com um comentário análogo valendo para m, t e z. Portanto,

$$s_{|k-1} \;=\; t_{|k-1} \quad \text{e} \quad t_{|m-1} \;=\; z_{|m-1}.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $k \leq m$; então a relação acima nos fornece

$$s_{|k-1} \;=\; t_{|k-1} \;=\; z_{|k-1},$$

e assim o primeiro inteiro onde s e z podem diferir deve ser maior do que k, estabelecendo a desigualdade (*). Segue imediatamente de (*) que

$$\begin{aligned} d(s,\,z) \;&=\; \frac{1}{1\,+\,\gamma(s,z)} \;\leq\; \frac{1}{1\,+\,\min\{\gamma(s,t),\,\gamma(t,z)\}} \;=\; \max\left\{\frac{1}{1\,+\,\gamma(s,t)},\,\frac{1}{1\,+\,\gamma(t,z)}\right\} \\ &\leq\; \frac{1}{1\,+\,\gamma(s,t)} + \frac{1}{1\,+\,\gamma(t,z)} \;=\; d(s,\,t) + d(t,\,z), \end{aligned}$$

como desejado. Observe que acabamos de provar algo <u>mais forte</u> que a desigualdade triangular [7]:

$$d(s,\,z) \;\leq\; \max\,\{d(s,\,t),\,d(t,\,w)\}.$$

Espaços métricos, como $\langle\, 2^\omega, d\,\rangle$, que satisfazem esta lei, denominam-se **ultramétricos**. Para um real $r > 0$, seja

$$n = \min\,\{k \in \omega : \frac{1}{1+k} \leq r\}.$$

Então, se $s \in 2^\omega$, temos [8]

$$N_r(s) \;=\; N_{1/1+n}(s) \;=\; \{t \in 2^\omega : s_{|n} = t_{|n}\}.$$

Assim, as bolas abertas de 2^ω de centro em s consistem das sequências que coincidem com s em segmentos iniciais finitos fixados de ω. $\square$

[7] Métricas são sempre ≥ 0 !

[8] Convença-se disto como exercício.

Lema 2.30 *Seja $\langle M, d \rangle$ um espaço métrico.*

a) Suponha que $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaz as seguintes propriedades, para $x,\ y \in \mathbb{R}_+$:

(i) $\phi(x) = 0$ sse $x = 0$;

(ii) ϕ é crescente;

(iii) ϕ é **sub-aditiva**, *isto é, $\phi(x + y) \le \phi(x) + \phi(y)$.*

Se definimos, para $u,\ v \in M$

$$d_\phi(u, v) = \phi(d(u, v)),$$

então d_ϕ é uma métrica em M.

b) Se $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função contínua, diferenciável em $(0, \infty)$ e com derivada decrescente, então ϕ é sub-aditiva.

Prova. a) Está claro que d_ϕ verifica $[d\ 1]$ e $[d\ 2]$ em 2.21. Para a desigualdade triangular, o fato que ϕ é crescente e sub-aditiva acarreta

$$\begin{aligned} d_\phi(u,\, w) &= \phi(d(u,\, w)) \le \phi(d(u,\, v) + d(v,\, w)) \\ &\le \phi(d(u,\, v)) + \phi(d(v,\, w)) = d_\phi(u,\, v) + d_\phi(v,\, w), \end{aligned}$$

como desejado.

b) Fixemos $u \ge 0$ e consideremos as funções

$$f(x) = \phi(x + u) \quad \text{e} \quad g(x) = \phi(u) + \phi(x).$$

Note que $f(0) = g(0) = \phi(u)$. Por outro lado

$$f'(x) = \phi'(x + u) \quad \text{e} \quad g'(x) = \phi'(x).$$

Já que ϕ' é descrescente, temos $f'(x) \le g'(x)$ e portanto $f(x) \le g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}_+$, mostrando que ϕ é sub-aditiva. □

Corolário 2.31 *Se $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ verifica as seguintes condições :*

(i) $\phi(x) = 0$ sse $x = 0$;

(ii) ϕ é contínua em $\mathbb{R}_+$ e diferenciável em $(0,\ \infty)$;

(iii) ϕ' é não negativa e descrescente em $(0,\ \infty)$,

então, para todo espaço métrico $\langle M, d \rangle$, d_ϕ é uma métrica em M.

Prova. Segue imediatamente de 2.30.(b) que ϕ é sub-aditiva. Além disso, como $\phi' \ge 0$, ϕ é crescente. A conclusão desejada é agora consequência imediata de 2.30.(a). □

Exemplo 2.32 2.31 garante um suprimento de funções $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ que produzem novas métricas a partir de uma dada. Aqui vão alguns exemplos; em todos os casos está claro que ϕ verifica (i) em 2.31 (ou (i) em 2.30.(a)) :

* $\phi(u) = \dfrac{u}{1 + u}$; note que $\phi'(u) = \dfrac{1}{(1 + u)^2}$, descrescente e positiva;

* $\phi(u) = \ln(1 + u)$; temos $\phi'(u) = \dfrac{1}{1 + u}$;

$*\ \phi(u) \ = \ \mathrm{arctg}(u)$; neste caso $\phi'(u) = \dfrac{1}{1 \ + \ u^2}$.

A semelhança entre as condições para ϕ e o *dual* da condição de convexidade em 2.2.(4) não é coincidência. Na realidade, estamos tratando com funções *concavas*, crescentes e que satisfazem (i) em 2.31. □

O conjunto de técnicas e exemplos desenvolvidos até agora devem ter convencido o leitor que há uma grande variedade de espaços métricos. Introduziremos ainda mais um modo de construir métricas. Para isto precisaremos lembrar que a série geométrica

$$\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$$

é convergente, com soma 2. Consequentemente,

$$\textstyle\sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{2^n} \ = \ 1.$$

Para quem necessita refrescar a memória deixamos o

Exercício 2.33 *Sejam a, r reais estritamente positivos, com $r \neq 1$. Para $n \geq 0$, definimos*

$$S_n = a \ + \ ar \ + \ \ldots + ar^n \ = \ \textstyle\sum_{i=0}^{n} ar^n.$$

a) Mostre que $S_n \ = \ \dfrac{a \ - \ ar^{n+1}}{1 \ - \ r}$.

b) Se $r \in (0,1)$, então $r^n \to 0$ quando $n \to \infty$. Conclua que para $r \in (0,1)$,

$$\textstyle\sum_{n \geq 0} ar^n \ = \ \lim_{n \to \infty} S_n \ = \ \dfrac{a}{1 \ - \ r}.$$

Exemplo 2.34 Seja $M \ = \ [0,1]^{\omega}$ o conjunto das sequências de numeros reais no intervalo $[0,\, 1]$. Para $s,\, t \in M$, definimos

$$d(s,\, t) \ = \ \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{|s(n) \ - \ t(n)|}{2^n}.$$

A verificação que d é uma métrica em M fica como exercício para o leitor. □

Generalizando (consideravelmente) o Exemplo 2.34, temos :

Exemplo 2.35 Seja $\langle\, M_n, d_n \,\rangle$, $n \geq 0$, uma sequência de espaços métricos e $M \ = \ \prod_{n \geq 0} M_n$. Os elementos de M são funções (1.4)

$$f : \omega \longrightarrow \textstyle\bigcup_{n \geq 0} M_n, \text{ tal que } f(n) \in M_n.$$

Seja $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ uma função limitada, que satisfaz as condições (i) – (iii) em 2.30.(a). Para $f,\, g \in M$, definimos

$$d^{\phi}(f,\, g) \ = \ \textstyle\sum_{n \geq 0} \dfrac{\phi(d_n(f(n),\, g(n)))}{2^n}.$$

Então, d^{ϕ} é uma métrica em M. De fato,

$*$ Se $d^{\phi}(f,\, g) \ = \ 0$, então para todo $n \geq 0$, $\phi(d_n(f(n),\ g(n))) = 0$. Como ϕ satisfaz (i) em 2.30.(a), concluímos que $d_n(f(n),\ g(n)) = 0$. Agora, o fato que d_n é uma métrica acarreta que $f(n) = g(n)$. Como n é arbitrário em ω, obtemos $f = g$, verificando $[d\ 1]$ em 2.21.

$*$ Como cada d_n é simétrica, está claro que o mesmo é verdade para d^{ϕ} e $[d\ 2]$ também está verificada.

$*$ Para a desigualdade triangular, sejam $f,\ g,\ h \in M$. Para cada $n \in \omega$, $\langle\, M_n, d_{n\phi} \,\rangle$ é um espaço métrico (2.30.(a)), e portanto a desigualdade triangular em $\langle\, M_n, d_{n\phi} \,\rangle$ fornece

$$\phi(d_n(f(n),\, h(n))) \ \ \leq \ \ \phi(d_n(f(n),\, g(n))) + \phi(d_n(g(n),\, h(n))).$$

Consequentemente, para cada $n \in \omega$,

$$\frac{\phi(d_n(f(n), h(n)))}{2^n} \ \ \leq \ \ \frac{\phi(d_n(f(n), g(n)))}{2^n} \ \ + \ \ \frac{\phi(d_n(g(n), h(n)))}{2^n},$$

e portanto as somas de cada membro para $n \geq 0$ preservarão esta desigualdade; logo

$$d^{\phi}(f,\, h) \ \ \leq \ \ d^{\phi}(f,\, g) + d^{\phi}(g,\, h),$$

completando a prova de que $\langle\, M,\, d^{\phi} \,\rangle$ é um espaço métrico. Como exemplos concretos, podemos utilizar as funções $\phi(u) = \dfrac{u}{1\ +\ u}$ e $\phi(u) = \mathrm{arctg}(u)$, discutidas em 2.32. Assim,

$$d(f,\, g) \ \ = \ \ \begin{cases} \sum_{n\geq 0} \dfrac{d_n(f(n), g(n))}{2^n(1\ +\ d_n(f(n), g(n)))} \\[2ex] \sum_{n\geq 0} \dfrac{\mathrm{arctg}(d_n(f(n), g(n)))}{2^n} \end{cases}$$

fornecem métricas em $M = \prod_{n\geq 0} M_n$. Finalmente, não há nada de especial na série geométrica de razão 1/2. Poder-se-ia utilizar <u>qualquer</u> série convergente de termos positivos como coeficientes na construção de métricas em M. $\square$

Exercício 2.36 *Seja $\langle\, M, p \,\rangle$ um par constituído de um conjunto M e uma função*

$$p : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

tal que para $x,\ y,\ z \in M$ temos

$$(1)\quad p(x,y) = p(y,x) \qquad\qquad e \qquad\qquad (2)\quad p(x,z) \ \ \leq \ \ p(x,y)\ +\ p(y,z).$$

Então existe um espaço métrico $\langle\, M_p, d_p \,\rangle$ e uma função sobrejetora, $\pi_p : M \longrightarrow M_p$, com as seguintes propriedades :

a) Para $x,\ y \in M$, $\ d_p(\pi_p(x),\ \pi_p(y)) \ = \ p(x,y)$.

b) Se $\langle\, E, \delta \,\rangle$ é um espaço métrico e $f : M \longrightarrow E$ é uma função tal que

$$\textit{Para todo } x,\ y \in M, \ \ \delta(f(x),\ f(y)) \ \ \leq \ \ p(x,y),$$

então existe uma única *função $g : M_p \longrightarrow E$ tal que o seguinte triangulo é comutativo* [9] *:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\pi_p"] \arrow[dr, "f"'] & & M_p \arrow[dl, "g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

[9]Isto é, $g \circ \pi_p = f$.