3.8 Cardinais e Ordinais

Esta seção exige mais conhecimento de Teoria dos Conjuntos que o restante das notas. As informações essenciais fazem, em geral, parte de um curso de Teoria dos Conjuntos : conjuntos bem ordenados, cardinais, e a possibilidade de fazer indução (chamada *transfinita*) sobre conjuntos bem ordenados.

A seguir, registraremos alguns pontos fundamentais, que podem servir como guia dos pré-requisitos necessários. O autor tem consciência que o resumo apresentado de forma alguma substitui a familiriadade que se pode ser obtida pela leitura e trabalho mais concentrado com estes conceitos. Consequentemente, esta seção tem a finalidade de servir como referência para as seções futuras.

Definição 3.103 *Se $\langle A, \leq \rangle$ é um conjunto parcialmente ordenado e $x \in A$, definimos*

$$x^{<} \;=\; \{y \in A : y < x\}.$$

$x^{<}$ denomina-se **segmento inicial de $\boldsymbol{A}$**.

Definição 3.104 *Um conjunto parcialmente ordenado e não vazio, $\langle A, \leq \rangle$, é* **bem ordenado** *se todo subconjunto não vazio de A tem* **mínimo**. *Assim, se $\emptyset \neq S \subseteq A$, existe $x \in S$ tal que $x \leq s$, para todo $s \in S$.*

Indicamos o mínimo de $S \subseteq A$ por $\min S$. *O mínimo de A será denotado por* 0_A. *O máximo de A, se existir será indicado por* max A.

É frequente referirmo-nos à ordem parcial $\leq$ como uma **boa ordem** *em A.*

Exemplo 3.105 1. O conjunto dos naturais, $\omega = \{0,\, 1,\, \dots,\, n,\, \dots\}$, com sua ordem natural é bem ordenado.

2. Se A e B são bem ordenados, definimos

$$A + B \;=\; \{\langle 0, a \rangle : a \in A\} \;\cup\; \{\langle 1, b \rangle : b \in B\},$$

acompanhado da ordem parcial definida por

$$\langle i, x \rangle \leq \langle j, y \rangle \quad \text{sse} \quad i < j \quad \text{ou} \quad (i = j \quad \text{e} \quad a \leq b).$$

Então, $A + B$ é bem ordenado e denomina-se a **soma de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$**.

3. Sejam A, B conjuntos parcialmente ordenados (3.31). Em $A \times B$ há várias ordens parciais interessantes. Dois exemplos são os seguintes :

3.106 A ordem produto : Definida por

$$\langle a_1, b_1 \rangle \leq \langle a_2, b_2 \rangle \quad \text{sse} \quad a_1 \leq a_2 \quad \text{e} \quad b_1 \leq b_2.$$

3.107 A Ordem Lexicográfica : Definida por

$$\langle a_1, b_1 \rangle \leq \langle a_2, b_1 \rangle \quad \text{sse} \quad a_1 < a_2 \quad \text{ou} \quad (a_1 = a_2 \quad \text{e} \quad b_1 \leq b_2).$$

Portanto, a ordem lexicográfica é a ordem da "lista telefônica" ou "alfabética". Note que a ordem em $A + B$ é a lexicográfica.

Se A, B são bem ordenados, $A \times B$ *com a ordem lexicográfica é bem ordenado* e denomina-se o **produto de A e B**. $\square$

Proposição 3.108 *Se $\langle A, \leq \rangle$ um conjunto bem ordenado.*

a) $\leq$ é uma ordem linear.

b) Todo elemento de $a \in A$, distinto de $\max A$ *tem* **sucessor**, *definido como*

$$a^+ = \min \{y \in A : y > a\}.$$

c) Os pontos de A são de dois tipos : os sucessores de algum elemento e aqueles que não são sucessores de algum elemento. Os pontos do segundo tipo denominam-se **limites** *em A.*

d) Todo subconjunto limitado e não vazio em A tem supremo.

e) Se $a \in A$, então

(1) *a é sucessor sse* $\sup a^< < a$; (2) *a é limite sse* $\sup a^< = a$.

f) (Princípio de Indução) *Para $S \in A$, as seguintes condições são equivalentes :*

(1) $S = A$ (2) $\forall\, x \in A\ (x^< \subseteq S \Rightarrow x \in S)$.

Prova. a) Se a, $b \in A$, o conjunto $\{a, b\}$ deve possuir um mínimo. Logo, $a \leq b$ ou $b \leq a$ e toda boa ordem é linear.

b) a^+ merece o nome de sucessor, pois $a < a^+$ e não há elementos de A entre a e a^+, pela própria definição de a^+ e o fato que a ordem é linear.

c) Isto é consequência das leis da Lógica.

d) Se S é limitado superiormente, então

$$L = \{x \in A : \forall\, s \in S,\, x \geq s\}$$

é não vazio. Assim, L possui mínimo em A, que é precisamente o supremo de S.[38]

e) (1) Se a é sucessor em A, então existe $b \in A$ tal que $b^+ = a$. Observe que

$$\sup a^< = \sup \{x \in A : x \leq b\},$$

para concluir que $\sup a^< = b < a$. Reciprocamente, se $\sup a^< = b < a$, vamos mostrar que $a = b^+$. Como $\sup a^< = b$, não existe $x \in A$, tal que

$$b < x < a.$$

Logo, se $x > b$, devemos ter $x \geq a$ e portanto $a = \min \{y \in A : y > b\} = b^+$. O ítem (2) é consequência de (1) e da dicotomia em (c).

f) Está claro que (1) $\Rightarrow$ (2). Para a recíproca, suponha que $A - S \neq \emptyset$ e seja $a = \min S$ (que existe pois A é bem ordenado). Então, $a^< \subseteq S$, mas $a \notin S$, uma contradição. $\square$

Observação 3.109 $\langle A, \leq \rangle$ é bem ordenado, note que

$$\emptyset = 0_A^<.$$

Assim, a condição (2) em 3.108.(f) pode ser desdobrada em

[38]Indicamos o supremo de S por $\sup S$.

(2a) $0_A \in S$; (2b) $\forall\, x \neq 0_A\ (x^< \subseteq S \ \Rightarrow\ x \in S)$.

O que não é possível em geral, devido a presença de pontos limites, é fazer indução apenas sobre *sucessores*, como é o caso da indução finita. É que ω possui uma particularidade : todos os seus pontos, exceto 0, são sucessores. $\square$

Exercício 3.110 *Determine os pontos limites e sucessores de* $\omega + \omega$ *e de* $\omega \times \omega$ *com a ordem lexicográfica* (3.107).

3.111 Cardinais. Se A, B são conjuntos escrevemos

$$\begin{cases} A \sim B & \text{sse}\ \ \exists\, f : A \longrightarrow B, \text{ bijetora;} \\ A < B & \text{sse}\ \ \exists\, f : A \longrightarrow B \text{ injetora, mas não é verdade que } A \sim B. \\ A \leq B & \text{sse}\ \ A < B \ \text{ ou } \ A \sim B. \end{cases}$$

Um **cardinal** (ou ordinal inicial) é um conjunto bem ordenado κ, tal que para $\alpha \in \kappa$

$\{\beta \in \kappa : \beta \leq \alpha\}$ tem cardinalidade estritamente menor que κ.

Se incluirmos o Axioma da Escolha (ou o Lema de Zorn) entre os axiomas da Teoria dos conjuntos, então

[card 1] : Se X é um conjunto então existe um *único* cardinal, indicado por $card\ X$, e uma função bijetora de X em $card\ X$. Em particular, todo conjunto X pode ser bem ordenado, de forma que para todo $x \in X$,

$$card\ (\{y \in X : y \leq x\}) \ < \ card\ X.$$

[card 2] : Se κ, λ são cardinais então vale uma das seguintes alternativas

$$\kappa < \lambda \ \text{ ou } \ \kappa = \lambda \ \text{ ou } \ \lambda < \kappa.$$

[card 3] : A *classe* dos cardinais, **Card** [39], é bem ordenada pela ordem em [card 2]. Em particular, todo cardinal λ tem um sucessor, indicado por λ^+.

[card 4] : Todo *conjunto* de cardinais tem *supremo* e **mínimo**. Assim, se $\{\lambda_i : i \in I\}$ é um conjunto de cardinais,

$$\min_{i \in I} \lambda_i \ \text{ e } \ \sup_{i \in I} \lambda_i$$

são cardinais.

[card 5] : A tabela abaixo sintetisa as operações fundamentais com cardinais :

Operação	Símbolo	Cardinal de
Soma	$\lambda + \kappa$	$(\{0\} \times \lambda) \ \cup \ (\{1\} \times \kappa)$
Produto	$\lambda\kappa$	$\lambda \times \kappa$
Exponenciação	λ^κ	conjunto das funções de κ em λ
Partes	2^λ	subconjuntos de λ
Partes finitas	2^λ_{fin}	conjunto dos subconjuntos finitos de λ

Em particular, se $n \geq 1$ é um natural, κ^n é o cardinal do produto de n cópias de κ.

[39] Não é um conjunto !

[card 6] : Indicamos por ω ou $\aleph_0$ o cardinal do conjunto dos naturais. Um cardinal κ é **infinito** se $\omega \leq \kappa$.

[card 7] : Se κ é um cardinal, $\kappa^<$ é o conjunto dos cardinais estritamente menores que κ,

$$\kappa^< \;=\; \{\lambda \in \mathbf{Card} : \lambda < \kappa\}.$$

Há dois tipos de notação para os cardinais infinitos : uma tem por base a letra ω e a outra a letra "aleph" (a primeira letra do alfabeto hebraico). Em particular, ω e $\aleph_0$ são nomes para o cardinal dos naturais. Assim,

$$\begin{cases} \omega,\, \omega_1,\, \omega_2,\, \ldots,\, \omega_\omega,\, \ldots \\ \qquad\qquad \text{e} \\ \aleph_0,\, \aleph_1,\, \aleph_2,\, \ldots,\, \aleph_{\aleph_0},\, \ldots \end{cases}$$

são duas descrições da sequência crescente dos cardinais infinitos. □

O resultado das operações elementares com cardinais infinitos estão resumidas no

Teorema 3.112 *Sejam λ, κ, β cardinais infinitos e $n \geq 1$ um natural.*

a) $\lambda + \kappa \;=\; \lambda\kappa \;=\; \max\{\lambda, \kappa\}$.

b) $\aleph_0\kappa \;=\; \kappa^n \;=\; \kappa$.

c) $2^\lambda_{fin} \;=\; \lambda$.

d) (Cantor) $\kappa \;<\; 2^\kappa$.

e) Se $\{S_n : n \geq 1\}$ é uma sequência de conjuntos tal que $S_n \subseteq S_{n+1}$ então

$$\sup_{n\geq 1} card(S_n) \;=\; card\left(\bigcup_{n\geq 1} S_n\right).$$

f) $(\lambda^\beta)^\kappa \;=\; \lambda^{\kappa\beta}$.

g) $\lambda^{\kappa+\beta} \;=\; \lambda^\beta\lambda^\kappa \;=\; \lambda^{\max\{\beta,\kappa\}}$.

3.9 A Densidade de Espaços Normados

Definição 3.113 *Seja X um espaço topológico.*

a) $S \subseteq X$ é **denso em X** *se $\overline{S} = X$. De forma equivalente, S é denso em X se para todo aberto não vazio U em X, $S \cap U \neq \emptyset$.*

b) A **densidade de X** *é definida por*

$$d(X) \;=\; \min\{\lambda \in \mathbf{Card} : S \text{ denso em } X \text{ e } card(S) = \lambda\}.$$

Note que $d(X)$ é um cardinal e que existe um subconjunto S, $card(S) = d(X)$, denso em X. Por outro lado, se $T \subseteq X$ e $card(T) < d(X)$, então T não é denso em X.

Um espaço é **separável** *se $d(X) \leq \aleph_0$* [40].

[40] Análogo ao caso métrico em 2.43.(b).

c) Um conjunto de abertos em X, $\mathcal{B}$, *é* **base** *para* X *se todo aberto de* X *pode ser escrito como união de elementos de* $\mathcal{B}$. [41]

d) O **peso de X** [42] *é definido por*

$$w(X) \;=\; \min\,\{\lambda \in \textbf{Card} : X \textit{ tem uma base de abertos de cardinal } \lambda\}.$$

Como acima, X *tem uma base de cardinal* $w(X)$*, mas nenhum conjunto de abertos de cardinal estritamente menor que* $w(X)$ *pode ser base de* X.

Vamos nos ocupar só de espaços em que $w(X)$ e $d(X)$ são ambos infinitos. A razão é o seguinte

Exercício 3.114 *Se* X *é um espaço Hausdorff com peso ou densidade finita* $n \geq 1$*, então* X *é finito, discreto e tem* n *pontos.*

Nos próximos resultados generalizaremos argumentos que já foram utilizados no caso de espaços métricos (2.47). Lembramos a

Definição 3.115 *Seja* X *um espaço topológico Hausdorff.*

a) Um aberto U *de* X *é* **regular** *se* $U \;=\; \text{int}\,\overline{U}$. [43]

b) X *é* **regular** *se satisfizer a seguinte condição :*

[*regular*] *Se* $p \in X$ *e* F *é um fechado em* X*, tal que* $p \notin F$*, então existem abertos disjuntos* U, V *tais que* $p \in U$ *e* $F \subseteq V$.

c) X *é* **completamente regular** *se satisfizer à condição :*

[CR] *Se* $p \in X$ *e* F *é um fechado em* X*, tal que* $p \notin F$*, então existe uma função contínua,* $f : X \longrightarrow [0,1]$*, tal que* $f_{|F} \equiv 0$ *e* $f(p) = 1$.

d) X *é* **normal** *se satisfizer à condição :*

[*normal*] *Se* F *e* F' *são fechados disjuntos em* X*, então existe uma função contínua,* $f : X \longrightarrow [0,1]$*, tal que* $f_{|F} \equiv 0$ *e* $f_{|F'} \equiv 1$.

Exercício 3.116 *a) Normal* $\Rightarrow$ *regular* *e* *completamente regular* $\Rightarrow$ *regular.*

b) Espaços localmente compactos são completamente regulares. Espaço métricos e espaços compactos são normais. [44]

Observação 3.117 É também verdade que todo espaço normal é completamente regular. Isto vem do

Teorema 3.118 (Urysohn) *Se* X *é um espaço normal e* F, G *são fechados disjuntos em* X*, então existe* $f : X \longrightarrow [0,1]$*, contínua, tal que* $f_{|F} \equiv 1$ *e* $f_{|G} \equiv 0$.

[41] Este conceito é análogo ao definido em 2.43.(a) para espaços métricos.
[42] "Weight" em inglês.
[43] int$(*)$ é a operação de interior; $\overline{*}$ é a operação de fecho.
[44] Lembre-se do Lema de Urysohn, 3.47.

Claro que este resultado está ligado ao Lema de Urysohn (o mesmo, aliás) em 3.47. $\square$

Por analogia com 2.38, temos

Definição 3.119 *Sejam X um espaço topológico, τ o conjunto dos abertos de X e $S \subseteq X$. Indicamos por*

$$\tau_{|S} \;=\; \{U \cap S : U \in \tau\}.$$

Então, $\tau_{|S}$ é uma topologia sobre S, com a qual S é um **subespaço de X**.

Teorema 3.120 *Seja X um espaço topológico Hausdorff infinito.*

a) $d(X) \leq card(X) \leq 2^{w(X)}$.

b) $d(X) \;\leq\; w(X)$.

c) Se S é um subespaço de X,

(1) $w(S) \;\leq\; w(X)$. [45]

(2) *S denso em X* $\Rightarrow$ $d(S) \;=\; d(X)$.

d) Se X é regular (3.115.(b)), $w(X) \leq 2^{d(X)}$.

e) Se X é métrico, então

(1) $d(X) \;=\; w(X)$ *e* $card(X) \leq 2^{d(X)}$.

(2) *Se S é um subespaço de X,* $d(S) \;\leq\; d(X)$.

Prova. a) Claro que $d(X) \leq card(X)$, já que todo subconjunto de X tem cardinal menor ou igual a X. Para a segunda desigualdade, seja $\mathcal{B}$ uma base de X de cardinal $w(X)$. Definimos

$$\nu_* : X \longrightarrow 2^{\mathcal{B}} \text{ dada por } \nu_x \;=\; \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}.$$

Como X é Hausdorff, ν_* é injetora. De fato, se $x \neq y$, existem abertos disjuntos U_x, U_y tal que $U_x \in \nu_x$ e $U_y \in \nu_y$. Como $\mathcal{B}$ é base de X, existem $U \subseteq U_x$ e $V \subseteq U_y$, tais que $x \in U$ e $y \in V$. Mas então

$$U \in \nu_x - \nu_y \quad \text{e} \quad V \in \nu_y - \nu_x,$$

comprovando a injetividade de ν_*.

b) Se $\mathcal{B}$ é uma base para X, com $card(\mathcal{B}) = w(X)$, construímos um conjunto denso de cardinal $w(X)$ simplesmente tomando um ponto em cada elemento de $\mathcal{B}$.

c) Se $\mathcal{B}$ é base para X, é fácil verificar que $\mathcal{B}_{|S} \;=\; \{U \cap S : U \in \mathcal{B}\}$ é base para a topologia $\tau_{|S}$ em S. Claro que $card(\mathcal{B}_{|S}) \leq card(\mathcal{B})$ e portanto $w(S) \leq w(X)$, provando (1). O ítem (2) vem diretamente da definição.

d) Seja $\mathcal{B}$ uma base de X de cardinalidade $w(X)$. Consideremos

$$r\mathcal{B} \;=\; \{\text{int}\,\overline{U} : U \in \mathcal{B}\}$$

Fato 3.121 *$r\mathcal{B}$ é uma base para X, com $card(r\mathcal{B}) = w(X)$.*

[45] Há exemplos em que $d(S) > d(X)$. Para o caso métrico, veja o ítem (e) logo abaixo.

Prova. Seja V um aberto de X, p um ponto de V e $F = V^c$. Então, F é fechado e $p \notin F$. Como X é regular, existem abertos disjuntos, U, W, tais que $p \in U$ e $F \subseteq W$. Observe que $U \subseteq W^c \subseteq V$, pois $V^c = F \subseteq W$. Logo, como W^c é fechado, temos $\overline{U} \subseteq W^c \subseteq V$ e o fecho de U está contido em V. Como $\mathcal{B}$ é base para X, existe $U' \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U' \subseteq U$. Mas então,

$$x \in U' \subseteq \text{int}\, \overline{U'} \subseteq \overline{U} \subseteq V,$$

com $\text{int}\, \overline{U'} \in r\mathcal{B}$. Acabamos de mostrar que se V é aberto em X, V pode ser escrito como união de elementos de $r\mathcal{B}$ e portanto $r\mathcal{B}$ é base para X. Em relação à afirmação de cardinalidade, note que a função

$$U \in \mathcal{B} \longmapsto \text{int}\, \overline{U} \in r\mathcal{B}$$

é sobrejetora [46] e portanto $card(r\mathcal{B}) \leq card(\mathcal{B}) = w(X)$. Como $w(X)$ é o peso de X e $r\mathcal{B}$ é base para X, devemos ter $card(r\mathcal{B}) = w(X)$, encerrando a prova do Fato.

Seja S um subconjunto denso em X, $card(S) = d(X)$. Consideremos a função

$$\alpha : r\mathcal{B} \longrightarrow 2^S, \text{ dada por } \alpha(U) = U \cap S.$$

Então, α é injetora; de fato, se $U \cap S = V \cap S$, como S é denso em todo aberto de X, obtemos

$$\overline{U} = \overline{U \cap S} = \overline{V \cap S} = \overline{V},$$

e portanto $U = \text{int}\, \overline{U} = \text{int}\, \overline{V} = V$, como desejado.

d) Como todo espaço métrico é normal (3.116) e tendo em vista os ítens precedentes, é suficiente mostrar que $d(X) = w(X)$. Seja S um subconjunto denso de cardinal $d(X)$. Seja

$$\mathcal{B} = \{B_{1/n}(s) : s \in S \text{ e } n \geq 1\},$$

a coleção de todas as bolas abertas de centro nos pontos de S e raio $1/n$, $n \geq 1$. Exatamente como na prova de (1) $\Rightarrow$ (2) no Teorema 2.47, verificamos que $\mathcal{B}$ é uma base para X. Por 3.112.(b), temos $card(\mathcal{B}) = \aleph_0\, d(X) = d(X)$. □

Observação 3.122 Existem espaços compactos Hausdorff X tal que

$$d(X) = \aleph_0, \quad w(X) = 2^{\aleph_0} \quad \text{e} \quad card(X) = 2^{2^{\aleph_0}}.$$

Assim, as desigualdades em 3.120 não podem ser melhoradas em geral. □

Proposição 3.123 *Seja M um espaço métrico e λ um cardinal infinito. Suponha que*

(*) *$\forall\, \varepsilon > 0$, toda cobertura de M por bolas abertas de raio ε tem uma sub-cobertura de cardinalidade $\leq \lambda$.*

Então, $d(M) \leq \lambda$.

Prova. Para $n \geq 1$, considere

$$\mathcal{C}_n = \{B_{1/n}(p) : p \in M\}.$$

Então existem $\{x_{n\alpha} \in X : \alpha \in \lambda\}$ tal que

[46] Mas não é injetora, a menos que os elementos de $\mathcal{B}$ já fossem regulares. Por exemplo, em $\mathbb{R}$ há muitos abertos distintos U, que contém os racionais; para todos estes $\text{int}\, \overline{U} = \mathbb{R}$.

$$\mathcal{D}_n \;=\; \{B_{1/n}(x_{n\alpha}) : \alpha \in \lambda\}$$

é uma sub-cobertura de cardinalidade λ de $\mathcal{C}_n$. Seja

$$S \;=\; \{x_{n\alpha} : n \geq 1 \text{ e } \alpha \in \lambda\}.$$

Por (c) em 3.112, $card(S) \leq \aleph_0\, \lambda = \lambda$. Exatamente como na prova de (3) $\Rightarrow$ (1) no Teorema 2.47, constatamos que S é denso em X e portanto, $d(X) \leq \lambda$. □

Definição 3.124 *Seja M um espaço métrico. Um subconjunto $S \subseteq X$ é* **uniformemente discreto** *se existir $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ tal que $\forall\, x \neq y$ em S, $\;d(x, y) > \boldsymbol{\varepsilon}$.*

Corolário 3.125 *Seja M um espaço métrico e λ um cardinal infinito.*

a) Se M tem um subconjunto uniformemente discreto de cardinal λ, então $d(M) \geq \lambda$.

b) Se $d(M) > \lambda$, então M tem um subconjunto uniformente discreto de cardinalidade λ^+.

c) Todo espaço métrico não separável tem um subconjunto uniformemente discreto não enumerável.

Prova. a) Se S é um conjunto uniformemente discreto de paramêtro $\boldsymbol{\varepsilon}$, as bolas abertas de raio $\boldsymbol{\varepsilon}$ e centro nos pontos de S são duas a duas disjuntas. Como qualquer conjunto denso em M deve conter pelo menos um ponto em cada uma destas bolas, segue que $d(M) \geq \lambda$.

b) Lembrando a propriedade [card 1] em 3.111, isto é, que para todo $\alpha \in \lambda^+$

$$card(\alpha^<) \;\leq\; \lambda$$

construiremos, por indução em λ^+, uma família uniformemente discreta

$$S \;=\; \{x_\alpha : \alpha \in \lambda^+\}.$$

Como $d(X) > \lambda$, a Proposição 3.123 garante que existe $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ tal que a cobertura

$$\mathcal{C} \;=\; \{B_\varepsilon(p) : p \in X\}$$

não tem subcobertura de cardinalidade λ. Seja x_0 um elemento qualquer de X e suponha que para $\beta \in \lambda^+$ foram construídos

$$\{x_\alpha : \alpha \in \beta^<\},$$

tal que a distância entre pontos distintos é maior do que $\boldsymbol{\varepsilon}$. Como

$$\{B_\varepsilon(x_\alpha) : \alpha \in \beta^<\}$$

tem cardinalidade $\leq \lambda$, não pode ser uma cobertura de X. Assim, existe $x_\beta \in X$, tal que

$$x_\beta \;\notin\; \textstyle\bigcup_{\alpha<\beta} B_\varepsilon(x_\alpha).$$

Logo, x_β dista mais do que $\boldsymbol{\varepsilon}$ de *todos* os x_α, $\alpha \in \beta^<$. Pelo Princípio da Indução, a família S está construída :

$$card(S) = \lambda^+ \quad \text{e} \quad \text{pontos distintos em } S \text{ distam mais do que } \boldsymbol{\varepsilon},$$

como desejado. O ítem (c) é consequência imediata de (b). □

Vamos agora voltar nossa atenção para uma sub- família dos espaços métricos : a dos espaços normados.

Proposição 3.126 *Sejam X um espaço normado, $B = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ e $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.*

a) $d(X) = d(B) = d(S)$.

b) Para $T \subseteq X$, seja $[T]$ o subespaço gerado por T e $\overline{[T]}$ o subespaço fechado gerado por T. Se $\lambda = card(T)$, então

$$d([T]) = d(\overline{[T]}) \leq \max\{\aleph_0, \lambda\}.$$

Em particular, se λ é infinito, $d(\overline{[T]}) = \lambda$.

Prova. a) Está claro que se M é um espaço métrico e $S \subseteq M$, com a topologia de subespaço em S, segue de 2.38.(a) que

$$w(S) \leq w(M).$$

Por 3.120.(d), temos $d(S) = w(S) \leq w(M) = d(M)$. Assim, no caso normado, é suficiente mostrar que

$$d(X) \leq d(S) \quad \text{e} \quad d(X) \leq d(B).$$

Seja T um subconjunto denso em S (a casca da bola unitária), com $card(T) = d(S)$. Seja

$$D = \{rt : r \in \mathbb{Q} \text{ e } t \in T\}.$$

Pelo ítem (b) do Teorema 3.112.(b), $card(D) = \aleph_0\, d(S) = d(S)$. Mostraremos que D é denso em X. Sejam $0 \neq x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Escolhemos um racional r tal que $|r - \|x\|| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\frac{x}{\|x\|} \in S$, existe $t \in S$ tal que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - t \right\| < \frac{\varepsilon}{2\|x\|}.$$

Portanto, $\|x - \|x\|t\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim,

$$\|x - rt\| \leq \|\, x - \|x\|t \,\| + \|\, \|x\|t - rt \,\| < \frac{\varepsilon}{2} + (|r - \|x\|\,|)\, \|t\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

e $rt \in B_\varepsilon(x)$, estabelecendo a densidade de D. Portanto, $d(S) = d(X)$, como desejado.

O argumento para B é parecido, na realidade mais simples pois

$$X = \bigcup\nolimits_{n \geq 1} nB,$$

isto é, X é união dos homotéticos positivos de B. Consequentemente, se T é denso em B, basta tomar

$$E = \bigcup\nolimits_{n \geq 1} nT = \bigcup\nolimits_{n \geq 1} \{nt : t \in T\}$$

para obter um conjunto denso em X, de cardinal $\aleph_0\, d(B) = d(B)$.

b) Note que

$$[T] = \{\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_j\, t_j : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\, t_1, \ldots, t_n \in T,\, n \geq 1\}.$$

Como densidade é transitiva, isto é,

$$A \text{ denso em } B \quad \text{e} \quad B \text{ denso em } C \quad \Rightarrow \quad A \text{ denso em } C,$$

e $[T]$ é denso em $\overline{[T]}$ (por definição), é suficiente mostrar que $d([T]) = \max\{\aleph_0, \lambda\}$. Considere

$$B \;=\; \{\textstyle\sum_{j=1}^{n} r_j t_j \,:\, r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Q} \text{ e } t_1, \dots, t_n \in T,\, n \geq 1\}.$$

Por 3.112.(b), $card(B) = \aleph_0 \; card(T) = \max\,\{\aleph_0,\, \lambda\}$. Para mostrar que B é denso em $[T]$, seja

$$x \;=\; \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_j t_j,$$

onde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $t_1, \dots, t_n \in T$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $M = max_{1 \leq j \leq n}\; \|t_j\|$. Agora escolhemos racionais $r_1, \dots, r_n$ tais que

(I) $$|r_j - a_j| \;<\; \frac{\varepsilon}{nM}.$$

Então, se $y = \sum_{j=1}^{n} r_j t_j$, temos $y \in B$ e a desigualdade triangular e (I) fornecem

$$\|x - y\| \;\leq\; \textstyle\sum_{j=1}^{n} \|a_j t_j - r_j t_j\| \;\leq\; \sum_{j=1}^{n} |r_j - a_j|\; \|t_j\| \;<\; n\, M\, \dfrac{\varepsilon}{nM} \;=\; \varepsilon,$$

completando a prova. $\square$

Teorema 3.127 *Se X é um espaço normado, então* $d(X') \;\geq\; d(X)$.

Prova. Seja T um subconjunto denso em $S \;=\; \{x \in X : \|x\| = 1\}$, com

$$card(T) \;=\; d(X) \;=_{def}\; \lambda.$$

Isto é possível por 3.126.(a). Como um espaço normado nunca é finito (a menos que seja $\{0\}$), λ é infinito (3.114). Por indução em λ construiremos uma família

$$\mathcal{F} \;=\; \{\, \langle\, f_\alpha, x_\alpha \,\rangle \in X' \times T : \alpha \in \lambda\}$$

satisfazendo as seguintes condições :

(1) Para todo $\alpha \in \lambda$, $\|f_\alpha\| \;=\; 1$;

(2) Para $\beta \in \lambda$, seja $V_\alpha \;=\; \overline{[\{x_\alpha : \alpha \in \beta^{<}\}]}$. Então, ${f_\beta}_{|V_\alpha} \;\equiv\; 0$ e $f_\beta(x_\beta) = 1$.

Uma vez contruída $\mathcal{F}$, teremos que se $\alpha < \beta$ em λ,

$$|f_\beta(x_\alpha) \,-\, f_\alpha(x_\alpha)| \;=\; |0 - 1| \;=\; 1$$

e como $x_\alpha \in T \subseteq S$, segue de 3.8, 3.12 e 3.13 que $\|f_\alpha \,-\, f_\beta\| \geq 1$. Assim, $\mathcal{F}$ é uma família uniformemente discreta em X', de cardinal λ e 3.125.(a) implica que $d(X') \geq \lambda$.

Novamente lembramos que o cardinal λ é bem ordenado de forma que para todo $\beta \in \lambda$,

$$card(\beta^{<}) \;<\; \lambda.$$

Assim, *nenhum subconjunto de T de cardinalidade $< \lambda$ pode ser denso em S.*

Para $0 \in \lambda$, seja $x_0 \in T$; por 3.35, existe $f_0 \in X'$ tal que $f_0(x_0) = 1$ e $\|f_0\| = 1$. Suponhamos que para $\beta \in \lambda$, temos uma família

$$\{\langle\, f_\alpha, x_\alpha \,\rangle \in X' \times T : \alpha \in \beta^{<}\},$$

satisfazendo as condições (1) e (2) acima. Por 3.126.(b), temos que

$$d(V_\beta) = card(\{x_\alpha : \alpha \in \beta^{<}\}) \;<\; \lambda.$$

Logo, $V_\beta \cap S$ não pode ser denso em S e portanto não pode conter T. Assim, existe $x_\beta \in T$ tal que $x_\beta \notin V_\beta$. Pelo Corolário 3.35.(c), existe $f_\beta \in X'$, tal que $\|f_\beta\| = 1$ e $f_\beta(x_\beta) = 1$.

Pelo Princípio da Indução, está contruída a família $\mathcal{F}$, com as propriedades desejadas. Como já observado, isto acarreta que $d(X') \geq \lambda = d(X)$, completando a prova. $\square$

Lema 3.128 *a) Se* $1 \le p < \infty$, *então* $d(\ell_p(\omega)) = \aleph_0$.
b) $d(\ell_\infty(\omega)) \;=\; 2^{\aleph_0}$.

Prova. a) Seja

$$V \;=\; \{\langle a_n \rangle \in \mathbb{R}^\omega : \text{existe } k \ge 1 \text{ tal que } \forall\, m \ge k,\, a_m = 0\}$$

o espaço das sequências quasi-nulas. Claro que V é subespaço de $\ell_p(\omega)$, $1 \le p \le \infty$. Se $p \ne \infty$, V é denso em $\ell_p(\omega)$. De fato, se $x = \langle x_n \rangle \in \ell_p(\omega)$ e $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$, existe $k \ge 1$ tal que

$$\textstyle\sum_{m>k} |x_m|^p \;<\; \boldsymbol{\varepsilon}^p,$$

pois $\sum_{n\ge 1} |x_n|^p$ é convergente. Logo, se $y = \langle x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots, 0, \dots\rangle$, então $y \in V$ e

$$\|x - y\|_p \;\le\; \left(\textstyle\sum_{m>k} |x_m|^p\right)^{1/p} \;<\; (\boldsymbol{\varepsilon}^p)^{1/p} \;=\; \boldsymbol{\varepsilon},$$

mostrando que V é denso em $\ell_p(\omega)$. Como V é o subespaço gerado pelos vetores e_n, que tem 1 na n-ésima coordenada e 0 em todas as outras, segue de 3.126.(b) que $d(\ell_p(\omega)) = \aleph_0$.

b) Para cada $\emptyset \ne A \subseteq \aleph_0$, seja s_A a função característica de A, isto é,

$$s_A(n) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{se } n \in A \\ 0 & \text{se } n \notin A. \end{cases}$$

Então, $s_A \in \ell_\infty(\omega)$, com $\|s_A\|_\infty = 1$ e $\|s_A - s_B\|_\infty = 1$, para $A \ne B$. Portanto,

$$S = \{s_A : A \in 2^{\aleph_0} - \{\emptyset\}\}$$

é uma família uniformente discreta, de cardinalidade $2^{\aleph_0}$ em $\ell_\infty(\omega)$. Por 3.125.(a), temos $d(\ell_\infty(\omega)) \ge 2^{\aleph_0}$. Por outro lado, os ítens (a) e (f) em 3.112 acarretam

$$card(\ell_\infty(\omega)) \;=\; card(\mathbb{R}^{\aleph_0}) \;=\; (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} \;=\; 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} \;=\; 2^{\aleph_0},$$

e assim, $d(\ell_\infty(\omega)) = 2^{\aleph_0}$ (por 3.120.(a)). □

Observação 3.129 O Lema 3.128 juntamente com o Exercício 3.29 mostram que para um espaço normado X

$*$ É possível que $d(X) = d(X')$; é o caso de $\ell_p(\omega)$, se $p \ne 1, \infty$, onde temos

$$d(\ell_p(\omega)) \;=\; d(\ell_q(\omega)) \;=\; d(\ell_p(\omega)'),$$

pois neste caso $\ell_p(\omega)' = \ell_q(\omega)$, onde q é o conjugado de p, e portanto $q \in (1, \infty)$;

$*$ É possível que $d(X') > d(X)$; é o caso de $\ell_1(\omega)$, onde temos

$$d(\ell_1(\omega)) \;=\; \aleph_0 \;\text{ e }\; d(\ell_1(\omega)') \;=\; d(\ell_\infty(\omega)) \;=\; 2^{\aleph_0}.$$ □

Corolário 3.130 *O dual de* $\ell_\infty(\omega)$ *não é separável. Asim,* $\ell_\infty(\omega)'$ *não é isomorfo a* $\ell_1(\omega)$.

Nas próximas seções iremos determinar a densidade dos espaços clássicos : $L^p(\mu)$ e $\mathbb{C}(K)$, onde K é um compacto Hausdorff. Em particular, obteremos generalizações importantes do Lema 3.128. O caso de $\mathbb{C}(K)$ nos levará a um resultado fundamental : o Teorema de Stone-Weiertrass.

3.10 A Densidade de $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$

As técnicas que iremos apresentar aqui fornecem uma amostra das que são necesárias para uma análise profunda dos espaços de medida, como por exemplo o teorema de classificação de Maraham. A articulação de Teoria dos Conjuntos, Topologia e Teoria da Medida é fundamental, sendo importante que isto fique claro de imediato para quem está sendo apresentado à disciplina.

Se A, B são subconjuntos de um conjunto X, lembramos que

$$A \triangle B \;=\; (A - B) \cup (B - A)$$

é a **diferença simétrica** de A e B.

Lema 3.131 *Seja X um conjunto e A, B, C subconjuntos de X.*

a) A operação $\triangle$ é comutativa, associativa e tem $\emptyset$ como elemento neutro.

b) $A \cup B \;=\; A \triangle B \quad sse \quad A \cap B = \emptyset$.

c) $A \cap B \cap (A \triangle B) = \emptyset$.

d) $A \cup B \;=\; A \triangle B \triangle (A \cap B) \;=\; (A \triangle B) \cup (A \cap B)$.

e) $A \cap (B \triangle C) \;=\; (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

Prova. Exercício.

Lembramos aqui a notação introduzida em 3.90 e no Lema 3.91 : Se $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ é um espaço de medida e $A \in \Sigma$,

$$\begin{cases} L^p(A, \mu) \;=\; \{f \in L^p(\mu) : f\chi_A = f\}; \\ \Sigma_A \;=\; \{B \cap A : B \in \Sigma\} \;=\; \{C \in \Sigma : C \subseteq A\}. \end{cases}$$

Definição 3.132 *Seja $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ um espaço de medida.*

a) Definimos

$$\Sigma_{fin} \;=\; \{A \in \Sigma : \mu(A) < \infty\} \quad e \quad \Sigma_0 \;=\; \{A \in \Sigma : \mu(A) = 0\}.$$

b) $A \in \Sigma - \Sigma_0$ é um **átomo em Σ** *se*

$$\forall\, B \in \Sigma_A,\;\; \mu(B) \;=\; 0 \quad ou \quad \mu(A - B) = 0.$$

Exercício 3.133 *Se $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ é um espaço de medida tal que $\Sigma_{fin} = \Sigma_0$, então para todo $1 \leq p < \infty$, $L^p(\mu) = \{0\}$, ou seja a única função em $L^p(\mu)$ é a função nula μ-qs.*

Proposição 3.134 *Sejam $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ um espaço de medida e $P \in \Sigma - \Sigma_0$.*

a) Considere as condições

(1) P é um átomo; *(2) Para todo $B \in \Sigma_P$, $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(P)$.*

Então, (1) $\Rightarrow$ (2). Se $\mu(P) < \infty$, estas condições são equivalentes.

b) Definimos $\mathcal{F}_P \;=\; \{B \in \Sigma_P : \mu(P - B) = 0\}$. Então, $\mathcal{F}_P$ tem as seguintes propriedades, onde B, $C \in \Sigma_P$:

[fil 1] : $P \in \mathcal{F}_P$;

[fil 2] : $B \in \mathcal{F}_P$ e $B \subseteq C \quad \Rightarrow \quad C \in \mathcal{F}_P$;

[fil 3] : $B, C \in \mathcal{F}_P \quad \Rightarrow \quad B \cap C \in \mathcal{F}_P$.

c) P é um átomo sse $\mathcal{F}_P$ verifica a seguinte propriedade :

$$[ufil] \qquad \forall\ B \in \Sigma_P, \quad B \in \mathcal{F}_P \quad ou \quad (P - B) \in \mathcal{F}_P.$$

d) Se P é um átomo de medida finita e $Q \in \Sigma$ satisfaz $\mu(P \triangle Q) = 0$, então Q é um átomo e $\mu(Q) = \mu(P)$.

e) Se P, Q são átomos de medida finita em Σ e $\mu(P \triangle Q) \neq 0$, então

$$\mu(P \cap Q) \ = \ 0 \quad e \quad \mu(P \triangle Q) \ = \ \mu(P) \ + \ \mu(Q).$$

f) Se $A \in \Sigma$ é tal que

$$\forall\ B \in \Sigma_A, \quad \mu(B) = 0 \quad ou \quad \mu(B) = \infty$$

então para todo $p \in [1, \infty)$, $L^p(A, \mu) = \{0\}$, isto é, a única função p- integrável sobre A é a função nula μ-qs. Em particular, isto vale para átomos de medida infinita em Σ.

Prova. a) Se P é um átomo e $B \subseteq P$, então

$$(1) \qquad \mu(B) = 0 \quad \text{ou} \quad \mu(P - B) = 0$$

e portanto

$$(2) \qquad \mu(B) = 0 \quad \text{ou} \quad \mu(B) \ = \ \mu(P) - \mu(P - B) \ = \ \mu(P).$$

Se $\mu(P)$ é finita, as alternativas (1) e (2) são equivalentes. [47]

b) Claro que $[fil\ 1]$ está satisfeita; $[fil\ 2]$ é consequência do fato que $P - C \subseteq P - B$. Para $[fil\ 3]$, note que

$$P - (B \cap C) \ = \ (P - B) \cup (P - C).$$

c) Se P é um átomo, segue imediatamente da definição que $\mathcal{F}_P$ tem a propriedade $[ufil]$. Reciprocamente, se $\mathcal{F}_P$ verifica $[ufil]$ e $B \in \Sigma_P$, então

$$\begin{cases} \text{Se } B \in \mathcal{F}_P, \text{ temos } \mu(P - B) = 0; \\ \text{Se } P - B \in \mathcal{F}_P, \text{ então } \mu(P - (P - B)) \ = \ \mu(B) \ = \ 0, \end{cases}$$

e P é um átomo.

d) Utilizaremos constantemente o ítem (a). Como $\mu(P \triangle Q) = 0$, temos

$$\mu(P - Q) \ = \ \mu(Q - P) \ = \ 0.$$

Já que

$$P = (P \cap Q) \cup (P - Q) \quad \text{e} \quad Q = (P \cap Q) \cup (Q - P)$$

e estas uniões são disjuntas, concluímos que

$$\mu(P \cap Q) \ = \ \mu(P) \ = \ \mu(Q).$$

Em particular, $\mu(Q) \neq 0$. Se $A \subseteq Q$, podemos escrever

[47]No caso em que $\mu(P) = \mu(B) = \infty$, podemos muito bem ter $\mu(P - B) = \infty$. Considere, por exemplo, $P = \mathbb{R}$ e $B = (0, \infty)$ com a medida de Lebesque. Veja também 3.135.(4), abaixo.

$$A = (A \cap P \cap Q) \cup (A \cap (Q - P)),$$

e portanto $\mu(A) = \mu(A \cap P \cap Q)$. Já que P é átomo, temos

$$\mu(A \cap P \cap Q) = \mu(P) = \mu(Q) \quad \text{ou} \quad \mu(A \cap P \cap Q) = 0,$$

e assim, $\mu(A) = \mu(Q)$ ou $\mu(A) = 0$, mostrando que Q é um átomo.

e) Como $P \cap Q$ está contido em P e Q, se $\mu(P \cap Q) \neq 0$, então

$$\mu(P \cap Q) = \mu(Q) = \mu(P).$$

Uma vez que $P = (P \cap Q) \cup (P - Q)$, concluímos que $\mu(P - Q) = 0$. Analogamente, $\mu(Q - P) = 0$ e portanto $\mu(P \triangle Q) = 0$, contrariando a hipótese.

f) Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função em $L^p(A, \mu)$. Para $n \geq 1$, considere

$$A_n = \{x \in X : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}.$$

Temos $A_n \subseteq A$; se para algum $n \geq 1$ $\mu(A_n) \neq 0$, então $\mu(A_n) = \infty$ e f não seria p-integrável. Como $\{x \in X : |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} A_n$, f é nula μ-qs em A, como desejado. Para terminar a prova, note que todo átomo de medida infinita verifica a condição enunciada. $\square$

Observação 3.135 **(1)** Se X é um conjunto, uma coleção $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ que satisfaz as condições $[fil\ 1]$, $[fil\ 2]$ e $[fil\ 3]$ em 3.134.(b) denomina-se um **filtro em X**. Assim, $\mathcal{F}_A$ é um filtro em A. Um filtro que verifica a condição $[ufil]$ em 3.134.(e) é conhecido como **ultrafiltro ou filtro maximal**. Estes conceitos são muito importantes em várias áreas da Matemática.

(2) Há dois tipos de filtros em X : **principais** e **não-principais**. Um filtro $\mathcal{F}$ é

$$\begin{cases} \textbf{principal} & \text{se } \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \in \mathcal{F}; \\ \textbf{não-principal} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ultrafiltros principais são fáceis de construir. Para $x \in X$, considere

$$\mathcal{F}_x = \{A \in 2^X : x \in A\}.$$

É imediato que $\mathcal{F}_x$ é um ultrafiltro em X, *o ultrafiltro principal gerado por x.*

Já a existência de ultrafiltros não-principais depende de Axioma da Escolha (ou do Lema de Zorn). Os Exercícios 3.136 e 3.137 abaixo descrevem algumas propriedades fundamentais de filtros, bem como uma indicação da prova da existência de ultrafiltros não-principais.

(3) Como átomos estão associados a ultrafiltros, podemos construir espaços de medida com átomos de qualquer medida, inclusive infinita. Por exemplo, se X é um conjunto, $x \in X$ e $\alpha \in (0, \infty]$, podemos definir uma medida em 2^X por

$$\delta_x(A) = \begin{cases} \alpha & \text{se } A \in \mathcal{F}_x; \\ 0 & \text{se } A \notin \mathcal{F}_x. \end{cases}$$

É fácil ver que δ_x é uma medida σ-aditiva em 2^X e que $\{x\}$ é um átomo de medida α. Na realidade, todos os elementos de $\mathcal{F}_x$ são átomos de medida α, ilustrando o ítem (d) em 3.134.

(4) Seja Y a união de duas cópias disjuntas de X, isto é,

$$Y = \{0\} \times X \cup \{1\} \times X.$$

Na σ-álgebra 2^Y construimos uma medida σ-aditiva, ν, da forma seguinte : se $A \subseteq Y$ sejam

$$A_0 \;=\; \{x \in X : \langle\, 0, x \,\rangle \in A\} \quad \text{e} \quad A_1 \;=\; \{z \in X : \langle\, 1, z \,\rangle \in A\}.$$

Então, A_0 e A_1 são disjuntos, com $A = A_0 \cup A_1$; definimos $\nu(A) \;=\; \delta_x(A_0) + \delta_x(A_1)$. Então, Y não é um átomo em $\langle\, Y, 2^Y, \nu \,\rangle$ [48], mas satisfaz a condição (2) em 3.134.(a), isto é, tem medida infinita e todo subconjunto de Y ou tem medida infinita ou nula.

(5) Se X é um conjunto indicamos por

$$\beta X \;=\; \{\mathcal{F} \subseteq 2^X : \mathcal{F} \text{ é um ultrafiltro em } X\}.$$

Como os ultrafiltros principais estão associados aos pontos de X, escreve-se $(\beta X - X)$ para o conjunto dos ultrafiltros *não-principais* em X.

(6) A existência de ultrafiltros *não-prinicipais* que definam uma medida σ-aditiva em 2^X e que assume apenas dois valores distintos (o problema de Ulam) não tem solução na Teoria dos Conjuntos. Um conjunto X que possui um tal ultrafiltro tem cardinalidade **mensurável**, que é muito grande. Pode-se provar que a existência de cardinais mensuráveis não pode ser demonstrada na Teoria dos Conjuntos; por outro lado é um problema aberto se a sua existência é consistente com a Teoria dos Conjuntos, isto é, se a adição da existência de um tal cardinal aos Axiomas da Teoria dos Conjuntos não provocaria inconsistência (assumindo-se, é claro, que a Teoria dos Conjuntos é consistente). $\square$

Exercício 3.136 *Seja X um conjunto e $\mathcal{F}$ um filtro em X. Dizemos que $\mathcal{F}$ é* **próprio** *se $\mathcal{F} \neq 2^X$.*

a) Mostre que $\mathcal{F}$ é próprio sse $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

b) Se $\mathcal{F}$ é principal sse existe $A \subseteq X$ tal que $\mathcal{F} \;=\; \{U \in 2^X : A \subseteq U\}$.

c) Se $\mathcal{F}_i$, $i \in I$, são filtros em X, então

(1) $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ é um filtro em X;

(2) Se o conjunto $\mathcal{F}_i$ é dirigido*, isto é, $\forall\, i, j \in I$, $\exists\, k \in I$ tal que $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_k$, então $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ é um filtro.*

d) Seja $\mathcal{A} \subseteq 2^X$. Dizemos que $\mathcal{A}$ tem a **pif (propriedade da interseção finita)** *se para todo subconjunto finito $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, $\bigcap_{A \in \mathcal{B}} A \neq \emptyset$.*

Para $\mathcal{A} \subseteq 2^X$, seja

$$[\mathcal{A}] \;=\; \{B \in 2^X : \exists\, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \text{ tal que } \textstyle\bigcap_{j=1}^n A_j \;\subseteq\; B\}.$$

Então,

(1) $[\mathcal{A}]$ é um filtro, que é próprio sse $\mathcal{A}$ tem a pif;

(2) $[\mathcal{A}]$ é o menor filtro que contém $\mathcal{A}$, isto é, se $\mathcal{F}$ é um filtro em X, então

$$\mathcal{A} \;\subseteq\; \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{A}] \;\subseteq\; \mathcal{F}.$$

O filtro $[\mathcal{A}]$ denomina-se o **filtro gerado por $\mathcal{A}$**.

e) Se $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro próprio *em X, as seguintes condições são equivalentes :*

(1) $\mathcal{F}$ é principal;

[48] Os átomos são as cópias de X.

(2) *$\mathcal{F}$ contém algum conjunto finito $\neq \emptyset$;*

(3) *$\mathcal{F} \;=\; \mathcal{F}_x$ para algum $x \in X$ (3.135.(2)).*

f) Em um conjunto finito, todos os ultrafiltros são próprios.

g) Seja Cofin $=$ $\{A \in 2^X$: A^c *é finito*$\}$ *a família dos conjuntos cofinitos em X. Então* Cofin *é um filtro em X, que é próprio sse X é infinito.*

h) Se $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro próprio *em X, as seguintes condições são equivalentes :*

(1) *$\mathcal{F}$ é não-principal;* (2) Cofin $\subseteq$ $\mathcal{F}$.

Exercício 3.137 *Sejam X um conjunto infinito e A, $B \in 2^X - \{\emptyset\}$.*

a) Se $\mathcal{A}$ é uma família de subconjuntos de X com a pif, então existe um ultrafiltro próprio *$\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$.* [49]

b) A coleção dos ultrafiltros não-principais em X é não vazia.

c) (Separação) *Se A não é subconjunto de B, existe um ultrafiltro $\mathcal{F}$ em X tal que $A \in \mathcal{F}$ e $B \notin \mathcal{F}$.* [50]

Pelo ítem (f) da Proposição 3.134, conjuntos mensuráveis que só possuem subconjuntos de medida infinita ou zero – átomos de medida infinita em particular – não têm o menor interesse do ponto de vista da Teoria da Integração. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade que nossos espaços de medida verificam a condição (*) do ítem (2) no enunciado da Proposição 3.94 (página 71), isto é,

(*) Para todo $A \in \Sigma$, $\mu(A) = \infty \;\Rightarrow\; \exists\, E \in \Sigma_A$ tal que $0 < \mu(E) < \infty$.

Está claro que um espaço satisfazendo (*) não possui átomos de medida infinita. Temos

Proposição 3.138 *Para um espaço de medida $\langle\, X, \Sigma, \mu \,\rangle$, são equivalentes :*

(1) *$\langle\, X, \Sigma, \mu \,\rangle$ verifica $(*)$;*

(2) *Para todo $A \in \Sigma$, $\mu(A) \;=\; \sup\,\{\mu(B) : B \in \Sigma_A \cap \Sigma_{fin}\}$.*

Prova. Está claro que (2) $\Rightarrow$ (1). Para recíproca, suponha que existe, por absurdo, que exista $A \in \Sigma$ tal que

(I) $$\mu(A) \;>\; \sup\,\{\mu(B) : B \in \Sigma_A \cap \Sigma_{fin}\}.$$

Então, $\mu(A) = \infty$ e existe $0 < M < \infty$ tal que para todo $B \in \Sigma_A \cap \Sigma_{fin}$, $\mu(B) \leq M$. Mostraremos que A contém um átomo de medida infinita, contrariando (1).

Fato 3.139 *Seja $\varepsilon > 0$ um real e suponha que para todo $B \in \Sigma_A \cap \Sigma_{fin}$ existe um mensurável $C \subseteq A - B$ tal que $\varepsilon \leq \mu(C) < \infty$. Então, A possui subconjuntos mensuráveis de medida arbitrariamente grande.*

[49] Considere a família $\mathcal{V}$ dos filtros próprios que contém $\mathcal{A}$, parcialmente ordenada por inclusão, e mostre que $\mathcal{V}$ verifiquem as hipóteses do Lema de Zorn.

[50] $\{A,\, (X - B)\}$ tem a fip...

Prova. Seja $B_1 \in \Sigma_A \cap \Sigma_{fin}$. Então existe $C_1 \subseteq A - B_1$ tal que $\mu(C_1)$ é finita e maior que $\boldsymbol{\varepsilon}$. Seja $B_2 = B_1 \cup C_1$; esta união é disjunta e tem medida finita. Logo existe $C_2 \subseteq A - B_2$, tal que $\boldsymbol{\varepsilon} \leq \mu(C_2) < \infty$. Definimos $B_3 = B_2 \cup C_2$. Prosseguindo por indução, construímos uma sequência B_n em $\Sigma_A \cap \Sigma_{fin}$, tal que

$$\mu(B_n) \;\geq\; (n-1)\,\boldsymbol{\varepsilon},$$

e portanto $\sup_{n\geq 1} \mu(B_n) = \infty$, encerrando a prova do Fato.

Segue imediatamente de 3.139 e de (I) que para todo $\boldsymbol{\varepsilon} \geq 0$, existe de $P \in \Sigma_A \cap \Sigma_{fin}$, tal que todo subconjunto de medida finita em $A - P$ tem medida menor que $\boldsymbol{\varepsilon}$. Assim, para cada $n \geq 1$, existe $P_n \in \Sigma_A \cap \Sigma_{fin}$, tal que

$$\text{(II)} \qquad C \subseteq A - P_n \;\text{ e }\; \mu(C) < \infty \quad\Rightarrow\quad \mu(C) < \frac{1}{n}.$$

Seja

$$Q_n \;=\; \bigcup_{j=1}^{n} P_j \quad\text{e}\quad Q \;=\; \bigcup_{n\geq 1} Q_n \;=\; \bigcup_{n\geq 1} P_n.$$

Note que

(∗ 1) $\{Q_n : n \geq 1\}$ é uma sequência crescente de conjuntos de medida finita;

(∗ 2) $Q \in \Sigma_A$, pois é união enumerável de mensuráveis;

(∗ 3) A condição (II) vale para cada Q_n, pois $P_n \subseteq Q_n$;

(∗ 4) $\mu(Q) \;=\; \sup_{n\geq 1} \mu(Q_n)$.

Considere $U = A - Q$; por (I) e (∗ 4), temos que $\mu(U) = \infty$ [51]. Por outro lado, se W é um subconjunto de medida finita de U, então

$$W \;\subseteq\; \bigcap_{n\geq 1} Q_n^c,$$

e assim (∗ 3) implica que $\mu(W) < 1/n$, $n \geq 1$. Assim, $\mu(W) = 0$, isto é, U é um mensurável de medida infinita que não possui subconjuntos de medida finita estritamente positiva, o que viola (*) e conclui a prova. □

A discussão precedente sugere a

Definição 3.140 *Um espaço de medida $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ é* **próprio** *se μ assume valores distintos de zero e verifica as condições equivalentes do Lema* 3.138*.*

Lema 3.141 *a) Se X é um espaço localmente compacto e μ é uma medida de Borel regular em X, então $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ é próprio.*

b) Todo espaço de medida σ-finito é próprio.

c) A medida da contagem em qualquer conjunto e a medida de Lebesque no $\mathbb{R}^n$ são espaços de medida próprios.

d) Se $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ é próprio, o mesmo é verdade para o seu completamento (3.52)*.*

Prova. O ítem (c) é consequência de (a); o ítem (b) já foi provado na Observação 3.95; o ítem (d) é deixado para o leitor como exercício.

[51] Senão a $\mu(A) = \sup_{n\geq 1} \mu(Q_n \cup U)$, todos conjuntos de medida finita.

Seja μ uma medida de Borel regular sobre um espaço localmente compacto X (3.50.(b) e (c)). Se $A \in \Sigma$, então

$$\mu(A) \;=\; \sup\,\{\mu(K) : K \subseteq A \quad \text{e} \quad K \text{ é compacto em } X\}.$$

Por $[reg\ 1]$ em 3.50.(b), todo compacto em X está em Σ_{fin} e portanto segue da equivalência em 3.138 que $\langle\, X, \Sigma, \mu\,\rangle$ é próprio. $\square$

Exemplo 3.142 Existem medidas de Borel quasi-regulares em espaços localmente compactos que **não são próprias**. Faremos aqui um esboço da construção, deixando alguns detalhes como exercício para o leitor.

Seja I um conjunto *não enumerável*. Definimos

$$X \;=\; \bigcup_{i \in I} \{i\} \times \mathbb{R},$$

isto é, X é a união de I cópias disjuntas de $\mathbb{R}$. Para facilitar a notação, para cada $i \in I$, seja

$$\mathbb{R}_i \;=\; \{\langle\, i, x\,\rangle \in X : x \in \mathbb{R}\}$$

a $i^{ésima}$ componente de X. Definimos uma topologia en X declarando *aberto* todo subconjunto cuja interseção com cada $\mathbb{R}_i$ é um aberto de $\mathbb{R}$ [52]. Assim, se $A \subseteq X$

$$A \text{ é aberto} \quad \text{sse} \quad \forall\, i \in I,\ \{x \in \mathbb{R} : \langle\, i, x\,\rangle \in A\} \text{ é um aberto em } \mathbb{R}.$$

É fácil verificar que

[top 1] : $\emptyset$, X são abertos;

[top 2] : Se $A_1, \ldots, A_n$ são abertos, então $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ é uma aberto;

[top 3] : Se A_λ, $\lambda \in \Lambda$, é uma família de abertos, então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é um aberto,

que são os axiomas para uma topologia. Note que se $U \subseteq \mathbb{R}$ é aberto, então $\forall\, i \in I$

$$\{i\} \times U \;=\; \{\langle\, i, x\,\rangle : x \in U\}$$

é um aberto em X. Frequentemente identificaremos um subconjunto de $\mathbb{R}_i$ com o subconjunto correspondente de $\mathbb{R}$. Assim, se $A \subseteq X$,

$$\text{Identificamos } A \cap \mathbb{R}_i \quad \text{com} \quad \{x \in \mathbb{R} : \langle\, i, x\,\rangle \in A\}.$$

Para $A \subseteq X$, definimos

$$\alpha(A) \;=\; \{i \in I : A \cap \mathbb{R}_i \neq \emptyset\}.$$

Fato 3.143 *a) X é um espaço Hausdorff.*

b) Para todo $i \in I$,

(1) $\mathbb{R}_i$ é aberto e fechado em X.

(2) A topologia de subespaço em $\mathbb{R}_i$ é a topologia da reta.

c) Para $K \subseteq X$, são equivalentes :

(1) K é compacto;

(2) $\alpha(K)$ é finito e $K \cap \mathbb{R}_i$ é compacto em $\mathbb{R}$, para todo $i \in I$.

d) X é localmente compacto.

[52] Esta topologia denomina-se *topologia da soma disjunta*.

Prova. a) Sejam $\langle i, x \rangle$, $\langle j, y \rangle$ pontos distintos de X. Se $i \neq j$, então $\mathbb{R}_i$ e $\mathbb{R}_j$ são abertos disjuntos contendo $\langle i, x \rangle$ e $\langle j, y \rangle$, respectivamente. Se $i = j$, então $x \neq y$ em $\mathbb{R}$ e portanto existem abertos disjuntos U, V em $\mathbb{R}$ tal que $x \in U$ e $y \in V$. Logo $\{i\} \times U$ e $\{i\} \times V$ são abertos disjuntos em X que separam $\langle i, x \rangle$ e $\langle i, y \rangle$.

b) Fixado $i \in I$, $\mathbb{R}_i$ é aberto pois a sua interseção com cada $\mathbb{R}_j$, $j \in I$, é aberto : ou é ele próprio ou é vazia. Por outro lado, o complementar de $\mathbb{R}_i$ é a união de abertos, precisamente a união dos $\mathbb{R}_j$, $i \neq j$. Assim, $\mathbb{R}_i$ é também fechado. Está claro que a topologia induzida por X em cada componente é a topologia usual de $\mathbb{R}$.

c) (1) $\Rightarrow$ (2) : Suponha que K é um compacto em X. Como X é Hausdorff, K é fechado. Logo, $K \cap \mathbb{R}_i$ é fechado (por (b)) no compacto K e portanto compacto. Isto mostra que para todo $i \in I$, $K \cap \mathbb{R}_i$ é um compacto em $\mathbb{R}$. Suponha por absurdo que $\alpha(K)$ seja infinito. Então, $\{\mathbb{R}_i : i \in \alpha(K)\}$ seria uma coberturta aberta de K, sem subcobertura finita, o que contradiz a compacidade de K.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Seja U_λ, $\lambda \in \Lambda$, uma cobertura aberta de K. Para $i \in \alpha(K)$ (que é finito, por hipótese), seja $K_i = K \cap \mathbb{R}_i$; como K_i é compacto em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_i \cap U_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, é uma cobertura de K_i por abertos (em $\mathbb{R}$), existe uma subcobertura finita

$$\mathbb{R}_i \cap U_{\lambda_1}, \, \ldots \, , \mathbb{R}_i \cap U_{\lambda_{m_i}},$$

de K_i. Como $\alpha(K)$ é finito, se tomamos a coleção

$$\{U_{\lambda_j} : 1 \leq j \leq m_i, \, i \in \alpha(K)\}$$

obtemos um subconjunto finito da cobertura original, que recobre K. Logo, K é compacto em X.

d) Seja U um aberto em X e $\langle i, x \rangle$ um ponto de U. Então, $U \cap \mathbb{R}_i$ é um aberto não vazio, que contém $\langle i, x \rangle$. Logo existe um intervalo aberto $J = (x - \boldsymbol{\varepsilon}, x + \boldsymbol{\varepsilon}) \subseteq U \cap \mathbb{R}_i$. Mas então, se $\delta < \boldsymbol{\varepsilon}$ e $J' = (x - \delta, x + \delta)$ temos que

$$\langle i, x \rangle \in \overline{\{i\} \times J} \;=\; \{i\} \times \overline{J} \;\subseteq\; \{i\} \times J \;\subseteq\; U \cap \mathbb{R}_i \;\subseteq\; U,$$

com $\{i\} \times \overline{J}$ compacto em X, pelo ítem (c).

Precisamos agora definir uma σ-álgebra em X, que contenha os Borelianos. Para isto, já sabemos, é suficiente que a σ-álgebra contenha os abertos. Seja

$$\Sigma \;=\; \{E \subseteq X : \forall \, i \in I, \quad E \cap \mathbb{R}_i \quad \text{é Lebesque mensurável em } \mathbb{R}\}.$$

Fato 3.144 *Σ é uma σ-álgebra que contém os Borelianos de X.*

Prova. É fácil verificar que Σ é uma σ-álgebra. Está claro da definição da topologia em X que Σ contém os abertos de X.

Agora a medida. Seja m a medida de Lebesque em $\mathbb{R}$. Para U *aberto* em X definimos[53]

$$[g] \qquad \begin{aligned} g(U) \;&=\; \sup \left\{\textstyle\sum_{i \in \gamma} m(U \cap R_i) : \gamma \text{ é um subconjunto } \textit{finito} \text{ de } I\right\} \\ &=\; \sup \left\{\textstyle\sum_{i \in \gamma} m(U \cap R_i) : \gamma \text{ é um subconjunto } \textit{finito } \alpha(U)\right\}. \end{aligned}$$

Fato 3.145 *a) A função g é positiva e crescente, isto é, se U, V são abertos em X,*

[53]Lembre que $\alpha(A) = \{i \in I : A \cap \mathbb{R}_i \neq \emptyset\}$.

(1) $g(U) \geq 0$; (2) $U \subseteq V \;\Rightarrow\; g(U) \leq g(V)$; (3) $g(U) = 0$ *sse* $U = \emptyset$.

b) Se U é um aberto em X tal que $\alpha(U)$ é enumerável, então

$$g(U) \;=\; \sum_{i \in \alpha(U)} m(U \cap \mathbb{R}_i).$$

c) Se U é um aberto em X tal que $g(U) < \infty$, então $\alpha(U)$ é enumerável. Logo, $g(U) = \sum_{i \in \alpha(U)} m(U \cap \mathbb{R}_i) < \infty$.

Prova. a) As duas primeiras conclusões estão claras. Para a terceira, lembre que um aberto não vazio em $\mathbb{R}$ tem sempre medida > 0, pois contém um intervalo aberto de raio > 0.

b) Se $\alpha(U) = \{i_k : k \geq 1\}$, está claro da definição da função g (veja [g] acima) que

$$g(U) \;=\; \sup\,\{\textstyle\sum_{k=1}^{n} m(U \cap \mathbb{R}_{i_k})\} \;=\; \sum_{k \geq 1} m(U \cap \mathbb{R}_{i_k}).$$

c) Para cada $n \geq 1$, seja

$$\beta_n \;=\; \{i \in I : m(U \cap \mathbb{R}_i) > \frac{1}{n}\}.$$

Se para algum $n \geq 1$ tivermos β_n infinito, então $g(U) = \infty$. Assim, β_n é finito, $\forall\, n \geq 1$. Como a interseção de U com cada $\mathbb{R}_i$ é um aberto e abertos $\neq \emptyset$ em $\mathbb{R}$ tem medida > 0 (como já observado acima), temos que

$$\alpha(U) \;=\; \{i \in I : U \cap \mathbb{R}_i \neq \emptyset\} \;=\; \{i \in I : \mu(U \cap \mathbb{R}_i) > 0\} \;=\; \bigcup_{n \geq 1} \beta_n,$$

e $\alpha(U)$ é enumerável. É consequência imediata de (b) que $g(U) = \sum_{i \in \alpha(U)} \mu(U \cap \mathbb{R}_i)$.

Para $A \in \Sigma$, definimos

$$\mu(A) \;=\; \inf\,\{g(U) : A \subseteq U \;\text{ e }\; U \text{ é aberto em } X\}.$$

Fato 3.146 *a) Para todo aberto U em X, $\mu(U) = g(U)$. Além disso, a função μ é positiva e crescente, isto é,*

$$\forall\, A, B \in \Sigma,\;\; \mu(A) \geq 0 \quad e \quad A \subseteq B \;\Rightarrow\; \mu(A) \leq \mu(B).$$

b) Se $\alpha(A)$ é enumerável então $\mu(A) = \sum_{i \in \alpha(A)} m(A \cap \mathbb{R}_i)$.

c) Se $\mu(A) < \infty$, então $\alpha(A)$ é enumerável e $\mu(A) = \sum_{i \in \alpha(A)} m(A \cap \mathbb{R}_i)$.

d) μ é uma medida de Borel quasi-regular em X.

Prova. O ítem (a) está claro.

b) Suponha que $\alpha(A) = \{i_k : k \geq 1\}$. Primeiro observe que se para algum $j \geq 1$ tivermos $m(A \cap \mathbb{R}_{i_j}) = \infty$ e U é um aberto que contém A, então $\mu(U) = g(U) = \infty$. De fato, a interseção $U \cap \mathbb{R}_{i_j}$ é um aberto de $\mathbb{R}$ contendo $A \cap \mathbb{R}_{i_j}$ e portanto $m(U \cap \mathbb{R}_{i_j}) = \infty$. Uma vez que g é crescente e que $U \cap \mathbb{R}_{i_k}$ é um aberto de X contido em U, o ítem (a) e 3.145.(a).(2) garantem que $\mu(U) = g(U) = \infty$. Assim,

$$\mu(A) \;=\; \infty \;=\; \sum_{k \geq 1} m(R \cap \mathbb{R}_{i_k}),$$

como necessário. Devemos agora tratar do caso em que $m(A \cap \mathbb{R}_{i_k}) < \infty$, para todo $k \geq 1$. Seja $C = \sum_{k \geq 1} m(A \cap \mathbb{R}_{i_k})$. Dado $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ e um aberto V contendo A, vamos mostrar que existe um aberto U tal que

(I) $$A \subseteq U \subseteq V \quad \text{e} \quad C \;\leq\; \mu(U) \;=\; g(U) \;\leq\; C + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Consequentemente, $C = \inf \{g(U) : U$ é aberto em X e $A \subseteq U\} = \mu(A)$, como desejado. Já que a medida de Lebesque é regular (3.61.(a)), para cada $k \geq 1$ existe um aberto $U_k \subseteq \mathbb{R}_{i_k}$ tal que

$$\text{(II)} \qquad A \cap \mathbb{R}_{i_k} \subseteq U_k \subseteq V \cap \mathbb{R}_{i_k} \quad \text{e} \quad \mu(U_k - (A \cap \mathbb{R}_{i_k})) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Seja $U = \bigcup_{k\geq 1} U_k$. Então, $A \subseteq U \subseteq V$ e como $\alpha(U) = \alpha(A)$, 3.145.(b) implica que

$$\mu(U) = g(U) = \textstyle\sum_{k\geq 1} m(U \cap \mathbb{R}_{i_k}) = \sum_{k\geq 1} m(U_k).$$

Além disso, como $A \cap \mathbb{R}_{i_k} \subseteq U_k$, está claro que

$$C = \textstyle\sum_{k\geq 1} m(A \cap \mathbb{R}_i) \leq \sum_{k\geq 1} m(U_k) = \mu(U).$$

Por outro lado, de (II) e do fato que m é uma medida em $\mathbb{R}$, obtemos

$$\mu(U) = \textstyle\sum_{k\geq 1} m(U_k) \leq \sum_{k\geq 1} m(A \cap \mathbb{R}_{i_k}) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = C + \varepsilon,$$

estabelecendo (I) e encerrando a prova de (b).

c) Se $\mu(A) < \infty$, deve haver um aberto U em X, tal que $A \subseteq U$ e $g(U) < \infty$. Como $\alpha(A) \subseteq \alpha(U)$, 3.145.(c) implica que $\alpha(A)$ é enumerável. O restante da conclusão segue imediatamente de (b).

d) Se μ for uma medida, certamente será de Borel pois Σ contém os Borelianos. Seja A_n, $n \geq 1$, uma sequência disjunta de elementos em Σ e $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Devemos mostrar que

$$\mu(A) = \textstyle\sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

Podemos supor que todos os A_n têm medida finita, a relação acima é óbvia. Como

$$\alpha(A) = \textstyle\bigcup_{n\geq 1} \alpha(A_n),$$

o ítem (b) e 3.112.(a) garantem que $\alpha(A)$ é enumerável. Já que para $i \in \alpha(A)$ temos a união disjunta

$$A \cap \mathbb{R}_i = \textstyle\bigcup_{n\geq 1} A_n \cap \mathbb{R}_i,$$

utilizando os fatos que os valores de μ e m são reais positivos e que m é uma medida, uma nova aplicação de (b) acarreta

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \textstyle\sum_{i\in\alpha(A)} m(A \cap \mathbb{R}_i) = \sum_{i\in\alpha(A)} \sum_{n\geq 1} m(A_n \cap \mathbb{R}_i) \\ &= \textstyle\sum_{n\geq 1} \sum_{i\in\alpha(A)} m(A_n \cap \mathbb{R}_i) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n), \end{aligned}$$

e μ é de Borel e σ-aditiva em Σ. Falta verificar as condições em 3.50.(b). Note que a condição

$$[reg\ 2] \qquad \text{Se } A \in \Sigma, \ \mu(A) = \inf \{\mu(V) : A \subseteq V, V \text{ aberto em } X\},$$

está satisfeita pela própria construção de μ.

$[reg\ 1]$ *: Se K é compacto em X, $\mu(K) < \infty$.* De fato, se K é compacto em X, 3.143.(c) garante que

$$K = \textstyle\bigcup_{i\in\alpha(K)} K \cap \mathbb{R}_i,$$

com $\alpha(K)$ finito e $K \cap \mathbb{R}_i$ é um compacto em $\mathbb{R}$. Note que a união acima é disjunta. Como compactos em $\mathbb{R}$ têm medida de Lebesque finita, o ítem (b) acarreta

$$\mu(K) = \textstyle\sum_{i\in\alpha(K)} \mu(K \cap \mathbb{R}_i) < \infty,$$

como desejado.

[*reg* 3] : *Se* A *é aberto ou* $\mu(A) \;<\; \infty$*, então*

$$\mu(A) \;=\; \sup\,\{\mu(K) : K \textit{ é compacto e } K \subseteq A\}.$$

Primeiro, considere o caso em que $\mu(A) < \infty$ (aberto ou não). Pelo ítem (c) temos $\alpha(A) = \{i_k : k \geq 1\}$ e

$$\mu(A) \;=\; \textstyle\sum_{k\geq\,1} m(A \cap \mathbb{R}_{i_k}).$$

Dado $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$, existe k tal que

(III) $$\textstyle\sum_{m>k} m(A \cap \mathbb{R}_{i_m}) \;<\; \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2}.$$

A regularidade da medida de Lebesgue (3.61.(a)) fornece compactos $K_{i_j} \subseteq A \cap \mathbb{R}_{i_j}$, tais que

(IV) $$m((A \cap \mathbb{R}_{i_j}) - K_{i_j}) \;<\; \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2k}. \qquad (1 \leq j \leq k)$$

Se $K = \bigcup_{1\leq j\leq k} K_{i_j}$, então K é um compacto em X, contido em A; além disso, de (III) e (IV) vem

$$\mu(K - A) \;\leq\; \textstyle\sum_{1\leq j\leq k} m((A \cap \mathbb{R}_{i_j}) - K_{i_j}) \;+\; \sum_{m>k} m(A \cap \mathbb{R}_{i_m}) \;<\; \boldsymbol{\varepsilon},$$

mostrando que $\mu(A) \geq \mu(K) > \mu(A) - \boldsymbol{\varepsilon}$, e verificando [*reg* 3] neste caso. Para concluir a prova do Fato 3.146, deixamos para o leitor a prova de que um aberto de X de medida infinita possui subconjuntos compactos de medida arbitrariamente alta.

Para concluir nossa discussão, precisamos do

Fato 3.147 *Se* U *é um aberto de* X *tal que* $\alpha(U)$ *é não enumerável, então* $\alpha(U) = \infty$*.*

Prova. Como na prova de 3.145.(c) (e com mesma notação) temos

$$\alpha(U) \;=\; \{i \in I : U \cap \mathbb{R}_i \neq \emptyset\} \;=\; \{i \in I : m(U \cap \mathbb{R}_i) > 0\} \;=\; \textstyle\bigcup_{n\geq 1} \beta_n.$$

Como $\alpha(U)$ é não-enumerável, para algum $n \geq 1$, $\beta_n = \{i \in I : m(U \cap \mathbb{R}_i) > \frac{1}{n}\}$ deve ser infinito (de fato, não enumerável). Segue imediatamente da definição da função g (veja [g], página 104) que $g(U) = \mu(U) = \infty$.

Estamos agora em condições de dar um exemplo de um subconjunto de X, na realidade um fechado, de medida infinita em que todo subconjunto de medida finita tem medida nula. Portanto, $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ não é próprio, embora seja quasi-regular. Considere

$$F \;=\; \{\langle i, 0 \rangle : i \in I\}.$$

Do Fato 3.147 vem que todo aberto que contém F tem medida infinita. Assim,

$$\mu(F) \;=\; \inf\,\{\mu(U) : U \text{ é aberto} \;\text{ e }\; F \subseteq U\} \;=\; \infty.$$

Por outro lado, note que F possui exatamente um ponto em cada $\mathbb{R}_i$. Portanto, 3.143.(c) implica que os únicos subconjuntos compactos de F são os *finitos.* Como pontos têm medida nula em X (pois o mesmo é verdade para a medida de Lebesgue), obtemos que todo compacto contido em F tem medida nula. Uma vez que μ é quasi-regular, concluímos que todo subconjunto de medida finita de F tem medida nula.

O leitor poderá verificar que $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ não possui átomos. Em particular, F não é um átomo de X (divida-o em dois subconjuntos não enumeráveis...). Temos portanto mais um exemplo (além daquele em 3.135.(4)) de que as condições em 3.134.(a) não são equivalentes para conjuntos de medida infinita.

O espaço de medida que acabamos de construir poder ser usado para mostrar que a medida associada à um funcional linear positico em $\mathbb{C}_c(X)$ pelo Teorema de Riesz-Markov (3.54) pode não ser *regular*. $\square$

Exercício 3.148 *Com a notação de* 3.142, *a função* $\nu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}_+$, *definida por*

$$\nu(A) \;=\; \sup \left\{\textstyle\sum_{i\in\gamma} m(A \cap \mathbb{R}_i) : \gamma \text{ é um subconjunto finito de } I\right\}$$

é uma medida de Borel regular *em* X. *Se* $r \in \mathbb{R}$ *e* $F_r = \{\langle i, r\rangle : i \in I\}$, *então* $\nu(F_r) = 0$.

Daqui em diante "espaço de medida" significa "espaço de medida próprio".

3.149 Se $\langle X, \Sigma, \mu\rangle$ é um espaço de medida, definimos em Σ a relação binária

$$A\ \theta\ B \quad \text{sse} \quad \mu(A \triangle B) \;=\; 0.$$

Note que

$[\theta\ 1]$: $A,\, B \in \Sigma_0 \;\Rightarrow\; A \triangle B \in \Sigma_0$; [54]

$[\theta\ 2]$: A relação θ é reflexiva e simétrica;

$[\theta\ 3]$: θ é uma relação de equivalência, pois se $A,\, B,\, C \in \Sigma$ são tais que

$$\mu(A \triangle B) \;=\; \mu(B \triangle C) \;=\; 0,$$

então $[\theta\ 1]$ e $A \triangle C \;=\; (A \triangle B) \triangle (B \triangle C)$ (3.131.(a)), acarretam $\mu(A \triangle C) = 0$, isto é, $A\ \theta\ C$.

Indicamos por

$$\Sigma/\Sigma_0 \;=\; \{A/\theta : A \in \Sigma\} \quad \text{e} \quad \Sigma_{fin}/\Sigma_0 \;=\; \{B/\theta : B \in \Sigma_{fin}\}$$

os conjuntos de classes de equivalência dos elementos de Σ e Σ_{fin} por θ. $\square$

Teorema 3.150 *Sejam* $\langle X, \Sigma, \mu\rangle$ *um espaço de medida próprio e* $1 \leq p < \infty$. *Se* Σ_{fin}/Σ_0 *é um conjunto finito, então* $L^p(\mu)$ *é linearmente isométrico a algum* $\mathbb{R}^n$, *com a norma* p.

Prova. Podemos supor, por 3.133, que $card(\Sigma_{fin}/\Sigma_0) \geq 2$.

Fato 3.151 *Se* $A \in \Sigma_{fin} - \Sigma_0$, *então existe um átomo* P *tal que* $P \subseteq A$.

Prova. Suponha que não. Então poderíamos construir uma sequência A_n, $n \geq 1$, tal que

$$A_1 = A, \quad A_{n+1} \subseteq A_n \quad \text{e} \quad 0 < \mu(A_{n+1}) < \mu(A_n),$$

contradizendo a finitude de Σ_{fin}/Σ_0, pois os conjuntos A_n são dois a dois não equivalentes.

Como Σ_{fin}/Σ_0 é finito, só existem um número finito de classes de equivalência de **átomos**. Seja

(*) $\{P_1, \ldots, P_n\}$ um conjunto completo de representantes das classes de átomos,

isto é, se P é átomo em Σ_{fin}, então existe um único $1 \leq j \leq n$ tal que $\mu(P \triangle P_j) \;=\; 0$.

[54] $A \triangle B$ é união disjunta de $A - B \subseteq A$ com $B - A \subseteq B$.

Por 3.134.(e) podemos supor que os P_j são *dois a dois disjuntos.* Seja

(**) $$S = \bigcup_{j=1}^{n} P_j;$$

claro que $S \in \Sigma_{fin}$.

Fato 3.152 *Para* $A \in \Sigma$,

a) $\mu(A) < \infty \Rightarrow A - S \in \Sigma_0$. *b)* $\mu(X - S) = 0$.

Prova. a) Se $\mu(A - S) > 0$, existiria, por 3.151, um átomo $P \subseteq A - S$. Mas, então P não pode ser equivalente a nenhum P_j, contrariando o fato que $\{P_j : 1 \leq j \leq n\}$ é um conjunto *completo* de representantes dos átomos em Σ_{fin} módulo θ.

b) Por (a) sabemos que se $A \subseteq (X - S)$ tem medida finita então $\mu(A) = 0$. Como $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ é próprio, a equivalência em 3.138 acarreta

$$\mu(X - S) = \sup \{\mu(A) : A \in \Sigma_{X-S} \cap \Sigma_{fin}\} = 0.$$

Fato 3.153 *Seja* $p \in [1, \infty)$. *Se* $f \in L^p(\mu)$ *existem reais* $a_1, \ldots, a_n$ *tais que*

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \chi_{P_j}$$

em $L^p(\mu)$.

Prova. É suficiente verificar o enunciado para $f \geq 0$. Mostraremos que f é constante μ-qs em cada P_j. Fixemos j entre 1 e n.

1º Passo : f é limitada em P_j. De fato, considere os conjuntos $B_n = \{x \in P_j : f(x) \geq n\}$. Note que $B_{n+1} \subseteq B_n$; se todos tivessem medida positiva, como P_j é um átomo, obteríamos

$$\forall\, n \geq 1, \quad \mu(B_n) = \mu(P_j).$$

Assim,

$$\mu(\bigcap_{n \geq 1} B_n) = \mu(\{x \in P_j : f(x) = \infty\} = \mu(P_j) > 0,$$

e f não seria p-integrável. Podemos, portanto supor que

$$\forall\, x \in P_j, \quad 0 \leq f(x) \leq M.$$

2º Passo : Por indução em $n \geq 0$, construiremos uma sequência encaixante de intervalos fechados, I_n, tais que

(I) $$I_0 = [0, M], \quad l(I_{n+1}) = \frac{l(I_n)}{2} \quad \text{e} \quad \mu(\{x \in P_j : f(x) \in I_n\}) = \mu(P_j).$$

onde $l(I_n)$ é o comprimento de I_n. Suponha a sequência contruída até n; sejam J^e e J^d as metades esquerda e direita de I_n Temos

$$f^{-1}(I_n) = f^{-1}(J^e) \cup f^{-1}(J^d).$$

Como P_j é um átomo

$$\mu(f^{-1}(J^e) \cap P_j) = \mu(P_j) \quad \text{ou} \quad \mu(f^{-1}(J^d) \cap P_j) = \mu(P_j).$$ [55]

Definimos I_{n+1} como sendo a metade de I_n cuja imagem inversa tem medida igual à de P_j, completando a construção da sequência I_n com as propriedades em (I). Seja a_j o único real tal que $a_j \in \bigcap_{n \geq 0} I_n$. Então

[55] Este "ou" é exclusivo !

$$f^{-1}(a_j) \cap P_j \ = \ \bigcap_{n \geq 0} f^{-1}(I_n) \cap P_j,$$

e esta interseção é descrescente. Portanto, $\mu(f^{-1}(a_j) \cap P_j) \ = \ \mu(P_j)$ e f tem valor constante e igual a a_j μ-qs em P_j. É claro que f é μ-qs igual a função simples $\sum_{j=1}^{n} a_j \, \chi_{P_j}$, completando a prova do Fato 3.153.

Para terminar a prova do Teorema, considere a função

$$f \in L^p(\mu) \ \longmapsto \ \langle\, a_1, \ldots, a_n \,\rangle \in \mathbb{R}^n,$$

onde a_j são os valores constantes de f nos átomos P_j, $1 \leq j \leq n$. Fica como exercício para o leitor verificar que esta aplicação é uma isometria linear entre $L^p(\mu)$ e $\langle\, \mathbb{R}^n, \, \|\cdot\|_p \,\rangle$. $\square$

Observação 3.154 A prova de 3.150 contém métodos que são úteis em muitas outras situações. Um exemplo é um resultado de A. Tarski :

Toda álgebra de Boole finita é gerada por átomos. $\square$

Lema 3.155 *Se $\langle\, X, \Sigma, \mu \,\rangle$ é próprio e $1 \leq p \leq \infty$, então $d(L^p(\mu)) \geq \aleph_0$.*

Prova. Seja $A \in \Sigma_{fin} - \Sigma_0$; a aplicação $a \in \mathbb{R} \longmapsto a\chi_A \in L^p(\mu)$ é injetora, linear e contínua, fornecendo um homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ e o subespaço vetorial V gerado por χ_A em $L^p(\mu)$. Como $w(\mathbb{R}) = \aleph_0$, segue de 3.120.(c) que

$$\aleph_0 \ = \ w(\mathbb{R}) \ = \ w(V) \ \leq \ w(L^p(\mu)).$$

Por 3.120.(e), temos $d(L^p(\mu)) \geq \aleph_0$, como desejado. $\square$

Definição 3.156 *Seja $\langle\, X, \Sigma, \mu \,\rangle$ um espaço de medida.*

a) Um subconjunto $S \subseteq \Sigma$ é **denso** *em Σ se para todo $A \in \Sigma_{fin}$ e $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$, existe $B \in S$ tal que $\mu(A \bigtriangleup B) < \boldsymbol{\varepsilon}$.*

b) A **densidade de $\boldsymbol{\Sigma}$** *é definida como*

$$d(\Sigma) \ = \ \min\, \{\lambda \in \textbf{Card} : \Sigma \text{ tem um subconjunto denso de cardinal } \lambda\}.$$

Exercício 3.157 *Seja $\langle\, X, \Sigma, \mu \,\rangle$ um espaço de medida. Então*

$$d(\Sigma) \text{ é finito} \quad \text{sse} \quad \Sigma_{fin}/\Sigma_0 \text{ é finito.}$$

Lema 3.158 *Seja $\langle\, X, \Sigma, \mu \,\rangle$ um espaço de medida próprio e $\mathcal{B}$ um subconjunto denso em Σ. Então existe $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$ tal que*

(1) $\mathcal{D}$ é denso em Σ; (2) Para $B,\, B' \in \mathcal{D}$, $\ B \neq B' \ \Rightarrow \ \mu(B \bigtriangleup B') > 0$.

Prova. Seja $\mathcal{B}^* = \{B/\theta \cap \mathcal{B} \, : \, B \in \mathcal{B}\}$; note que $\mathcal{B}^*$ é uma família de conjuntos não vazios, dois a dois disjuntos (classes de equivalência distintas são disjuntas). Pelo Axioma da Escolha, existe um conjunto $\mathcal{D}$ constituído por exatamente um elemento de cada conjunto em $\mathcal{B}^*$. Por construção, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$; além disso, se $B,\, B' \in \mathcal{D}$, então

$$B \neq B' \quad \Rightarrow \quad B/\theta \ \neq \ B'/\theta \quad \Rightarrow \quad \mu(B \bigtriangleup B') > 0.$$

Para $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ e $A \in \Sigma_{fin}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(B \bigtriangleup A) < \boldsymbol{\varepsilon}$. Seja C o *único* elemento de $\mathcal{D}$ tal que $\mu(C \bigtriangleup B) = 0$. É fácil ver que $\mu(A \bigtriangleup C) < \boldsymbol{\varepsilon}$, mostrando que $\mathcal{D}$ é denso em Σ. $\square$

Teorema 3.159 *Se $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ é um espaço de medida próprio e $1 \leq p < \infty$, então*
$$d(L^p(\mu)) \;=\; \max\,\{\aleph_0,\, d(\Sigma)\}.$$

Prova. Por 3.157 e 3.150 podemos supor que $d(\Sigma) \geq \aleph_0$ [56]. Seja $\lambda = d(L^p(\mu))$.

Parte 1 : $d(\Sigma) \leq \lambda$. Consideremos
$$V \;=\; \{\chi_A : A \in \Sigma_{fin}\} \;\subseteq\; L^p(\mu).$$
Por 3.120.(e).(2), temos $d(V) \leq \lambda$. Para $A,\, B \in \Sigma_{fin}$ note que
$$|\chi_A - \chi_B| \;=\; \chi_{A \triangle B}$$
e portanto
$$\|\chi_A - \chi_B\|_p \;=\; \left(\int_X |\chi_A - \chi_B|^p \, d\mu\right)^{1/p} \;=\; \left(\int_X \chi_{A \triangle B}\right)^{1/p} \;=\; \mu(A \triangle B)^{1/p}.$$
Segue imediatamente da igualdade precedente que $d(\Sigma) = d(V)$. De fato, seja $\mathcal{B}$ denso em Σ_{fin} e satisfazendo a condição (2) em 3.158. A função
$$B \in \mathcal{B} \;\longmapsto \chi_B \in V \qquad [57]$$
é injetora e sua imagem é densa em V, pois dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $B \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(A \triangle B) < \varepsilon^p$. Reciprocamente, se S é denso em V na norma p, seja
$$\mathcal{B} \;=\; \{B \in \Sigma_{fin} : \chi_B \in S\}.$$
Para $\varepsilon > 0$ e $A \in \Sigma_{fin}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $\|\chi_A - \chi_B\|_p = \varepsilon^{1/p}$; então, $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$ e $\mathcal{B}$ é denso em Σ. Se $\mathcal{D}$ é o conjunto associado a $\mathcal{B}$ através do Lema 3.158, então $\mathcal{D}$ é denso em Σ e a função $\chi_B \in S \;\longmapsto\; B \in \mathcal{D}$ é injetora.

Parte 2 : $\lambda \leq d(\Sigma)$. Seja $\mathcal{S}$ o espaço das funções simples, nulas fora de um conjunto de medida finita. Por 3.44.(c), $\mathcal{S}$ é denso em $L^p(\mu)$ e portanto $d(\mathcal{S}) = \lambda$. Seja $\mathcal{B}$ um conjunto denso em Σ, com $card(\mathcal{B}) = d(\Sigma)$ e
$$W \;=\; \{\textstyle\sum_{j=1}^n r_j\, \chi_{B_j} : r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q},\;\; A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B} \;\text{ e }\; n \geq 1\}$$
o conjunto das combinações lineares a coeficientes racionais das funções características dos elementos de $\mathcal{B}$. Uma vez que $d(\Sigma)$ é infinito, 3.112.(b) garante que $card(W) = d(\Sigma)$. Provaremos que W é denso em $\mathcal{S}$ e assim $d(\mathcal{S}) = \lambda \leq d(\Sigma)$, completando a prova.

Fixado $\varepsilon > 0$, seja $s \;=\; \sum_{j=1}^n a_j\, \chi_{A_j}$, onde $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma_{fin}$ e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Sejam
$$M = \sup_{1 \leq j \leq n} |a_j| \quad \text{ e } \quad N = \textstyle\sum_{j=1}^n \mu(A_j).$$
Para cada j, escolhemos $B_j \in \mathcal{B}$ e $r_j \in \mathbb{Q}$ tais que
$$\mu(A_j - B_j) \;<\; \frac{\varepsilon^p}{(2nM)^p}, \quad |r_j| \leq M \quad \text{ e } \quad |a_j - r_j| \;<\; \frac{\varepsilon}{2nN^{1/p}}.$$
Então, se $t = \sum_{j=1}^n r_j\, \chi_{B_j}$, temos $t \in W$ e
$$\begin{aligned}
\|s - t\|_p \;&=\; \|\textstyle\sum_{j=1}^n a_j\chi_{A_j} - \sum_{j=1}^n r_j\chi_{B_j}\|_p \\
&\leq\; \|\textstyle\sum_{j=1}^n a_j\chi_{A_j} - \sum_{j=1}^n r_j\chi_{A_j}\|_p \;+\; \|\sum_{j=1}^n r_j\chi_{A_j} - \sum_{j=1}^n r_j\chi_{B_j}\|_p \\
&\leq\; \textstyle\sum_{j=1}^n |a_j - r_j|\, \|\chi_{A_j}\|_p \;+\; \sum_{j=1}^n |r_j|\, \|\chi_{A_j} - \chi_{B_j}\|_p
\end{aligned}$$

[56] Isto é, Σ_{fin}/Σ_0 é infinito.

[57] Lembre-se que $L^p(\mu)$ úm conjunto de classes de equivalência de funções.

$$= \ \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{2nN^{1/p}}\ \mu(A_j)^{1/p} \ + \ \sum_{j=1}^n M\ \mu(A_j \triangle B_j)^{1/p}$$

$$\leq \ \frac{\varepsilon}{2nN^{1/p}}\ nN^{1/p} \ + \ M\ n\frac{\varepsilon}{2nM} \ = \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon,$$

como desejado. □

Corolário 3.160 *Seja X um conjunto infinito de cardinal κ e seja μ a medida da contagem em 2^X. Para todo $p \in [1, \infty)$,*

$$d(L^p(\mu)) \ = \ \kappa.$$

Prova. É suficiente verificar que $d(\Sigma) = \kappa$. Note que o conjunto das partes finitas de X é denso em Σ, já que é igual a Σ_{fin}. Como $2^{\kappa}_{fin} = \kappa$ (3.112.(c)), obtemos $d(\Sigma) \leq \kappa$.

Seja S denso em Σ e $p \in X$. Então existe $B \in S$ tal que $\mu(B \triangle \{p\}) < 1/2$. Como todo subconjunto não vazio de X tem medida > 1, concluímos que $B \triangle \{p\} = \emptyset$, isto é, $B = \{p\}$. Assim, $\{p\} \in S$, para todo $p \in X$ e $card(S) \geq \kappa$, completando a prova. □

Corolário 3.161 *a) Seja X um espaço localmente compacto e μ uma medida de Borel regular em X. Se $1 \leq p < \infty$ então*

$$d(L^p(\mu)) \ \leq \ \max\ \{\aleph_0,\ w(X)\}.$$

b) Se m é a medida de Lebesque em $\mathbb{R}^n$, então para todo $1 \leq p < \infty$, $L^p(m)$ é separável.

Prova. Como $\mathbb{R}^n$ é um espaço localmente compacto com base enumerável (i.e., $w(\mathbb{R}) = \aleph_0$), (b) é consequência imediata de (a), 3.155 e 3.141.(c).

Para (a), fazemos as seguintes observações :

(I) Se $w(X)$ é finito, então X é finito e discreto. Portanto, Σ_{fin}/Σ_0 é um conjunto finito e o resultado segue do Teorema 3.150, pois $\mathbb{R}^n$ é separável (com qalquer norma).

(II) Se $w(X) \geq \aleph_0$, seja $\mathcal{B}$ uma base para X, com $card(\mathcal{B}) = w(X)$. Seja

$$\mathcal{B}' \ = \ \{\bigcup_{j=1}^n U_j : U_j \in \mathcal{B},\ n \geq 1\}$$

o conjunto das uniões finitas de elementos de $\mathcal{B}$. Por 3.112.(c),

$$card(\mathcal{B}') \ = \ 2^{w(X)}_{fin} \ = \ w(X),$$

e $\mathcal{B}'$ permanece sendo uma base para X. Em suma, se o peso de X é infinito, existe uma base para X, fechada por uniões finitas, com cardinalidade igual a $w(X)$. Daqui em diante assumimos que $\mathcal{B}$ é fechada por uniões finitas. Se $A \in \Sigma_{fin}$ e $\varepsilon \geq 0$, a regularidade de μ implica na existência de um compacto K e um aberto V, tal que

$$K \subseteq A \subseteq V \ \text{ e } \ \mu(V - K) \ < \ \varepsilon.$$

Para cada $p \in K$, seja $U_p \in \mathcal{B}$ tal que $p \in U_p \subseteq V$. A compacidade de K acarreta a existência de $p_1, \ldots, p_n$ em K tal que

$$K \ \subseteq \ \bigcup_{j=1}^n U_{p_j} \ \subseteq \ V.$$

Considere $U = \bigcup_{j=1}^n U_{p_j}$; temos $U \in \mathcal{B}$ e

$$U \triangle A \ \subseteq \ V - K$$

e portanto $\mu(U \triangle A) < \varepsilon$, mostrando que $\mathcal{B}$ é denso em Σ. Logo, $d(\Sigma) \leq w(X)$ e a conclusão segue do Teorema 3.159. $\square$

Observação 3.162 O leitor poderá verificar que o enunciado e a prova acima são válidos para medidas de Borel *quasi-regulares* em um espaço localmente compacto, muito embora estes espaços possam não ser próprios (3.142). $\square$

Teorema 3.163 *Seja $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ um espaço de medida σ-finito, com*

$$X = \bigcup_{n\geq 1} X_n, \quad X_n \subseteq X_{n+1} \quad e \quad X_n \in \Sigma_{fin}.$$

Então, [58]

a) $\bigcup_{n\geq 1} L^p(X_n, \mu)$ *é denso em* $L^p(\mu)$.

b) $d(L^p(\mu)) = \sup_{n\geq 1} d(L^p(X_n, \mu))$.

Prova. a) Seja $Y = \bigcup_{n\geq 1} L^p(X_n, \mu)$ e $\mathcal{L}$ o espaço das funções limitadas, nulas fora de um conjunto de medida finita. Por 3.44.(b), $\mathcal{L}$ é denso em $L^p(\mu)$. Logo é suficiente mostrar que Y é denso em $\mathcal{L}$.

Fato 3.164 *Se $A \in \Sigma_{fin}$ e $\varepsilon > 0$, existe $n \geq 1$ tal que $\forall\, m \geq n$, $\mu(A - X_m) < \varepsilon$.* [59]

Prova. Temos $A = \bigcup_{n\geq 1} A \cap X_n$ e esta união é crescente. Logo

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap X_n),$$

e portanto, dado ε existe $n \geq 1$ tal que se $m \geq n$ então

$$\text{(I)} \qquad \mu(A) - \mu(A \cap X_m) < \varepsilon.$$

Como $A = (A \cap X_m) \cup (A - X_m)$, esta união é disjunta e $\mu(A)$ é finita, (I) implica que $\forall\, m \geq n$, $\mu(A - X_m) < \varepsilon$, como necessário.

Seja $f = f\chi_A \in \mathcal{L}$, onde $A \in \Sigma_{fin}$. Por 3.164, existe $n \geq 1$ tal que

$$\text{(II)} \qquad \mu(A - X_n) < \frac{\varepsilon^p}{\|f\|_\infty{}^p}.$$

Consideremos $g = f\chi_{X_n}$; então $g \in L^p(X_n, \mu)$ e temos

$$\text{(III)} \qquad |f - g| \leq \|f\|_\infty\, \chi_{A-X_n}.$$

De fato, basta discutir os casos em que $x \in A \cup X_n$. Temos

$*$ Se $x \in A \cap X_n$ então $f(x) = g(x)$ e $|f(x) - g(x)| = 0 = \|f\|_\infty\, \chi_{A-X_n}(x)$;

$*$ Se $x \in X_n - A$, então $f(x) = g(x) = 0$ e $|f(x) - g(x)| = 0 = \|f\|_\infty\, \chi_{A-X_n}$;

$*$ Se $x \in A - X_n$, então $g(x) = 0$ e $|f(x) - g(x)| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty = \|f\|_\infty\, \chi_{A-X_n}(x)$;

Assim, (III) e (II) fornecem

$$\begin{aligned}\|f-g\|_p &= \left(\int_X |f-g|^p\, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X \|f\|_\infty{}^p\, (\chi_{A-X_n})^p\, d\mu\right)^{1/p} \\ &= \|f\|_\infty\, \mu(A - X_n)^{1/p} < \varepsilon,\end{aligned}$$

[58] Notação como em 3.90.
[59] Veja Exemplo 3.165 abaixo.

estabelecendo a densidade de Y em $\mathcal{L}$.

b) Pelo Teorema 3.159 e pelo Lema 3.91, é suficiente mostrar que

$$d(\Sigma) \;=\; \sup_{n\geq 1} d(\Sigma_{X_n}),$$

onde $\Sigma_{X_n} \;=\; \{A \cap X_n : A \in \Sigma\}$. Claro que $d(\Sigma) \geq d(\Sigma_{X_n})$, pois se S é denso em Σ, as interseções dos elementos de S com X_n serão densas em Σ_{X_n} [60]. Além disso, podemos supor que existe $n \geq 1$, tal que $d(\Sigma_{X_n}) \geq \aleph_0$. Caso contrário, de 3.157 e 3.150 obteríamos

$$\forall\, n \geq 1, \quad d(L^p(X_n, \mu)) = \aleph_0,$$

e o ítem (a) implica $d(L^p(\mu)) = \aleph_0$, pois a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável (3.112.(b)), verificando a tese neste caso.

Uma vez que a sequência Σ_{X_n} é crescente, se a densidade for infinita para algum k, será infinita para todo $m \geq k$. Logo, sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\forall\, n \geq 1, \quad d(\Sigma_{X_n}) \;\geq\; \aleph_0.$$

Para cada $n \geq 1$, seja $T_n \subseteq \Sigma_{X_n}$ um subconjunto denso de cardinalidade $d(\Sigma_{X_n})$ e considere

$$S_n \;=\; \bigcup_{j=1}^{n} T_j.$$

Então,

(IV) $\qquad S_n$ é denso em Σ_{X_n}, $\;S_n \subseteq S_{n+1}\;$ e $\;card(S_n) \;=\; d(\Sigma_{X_n})$.

As duas primeiras afirmações em (IV) estão claras; para a terceira, como $d(\Sigma_{X_k})$, $k \geq 1$, é uma sequência crescente de cardinais *infinitos*, o ítem (a) em 3.112 mostra que

$$\begin{aligned} d(\Sigma_{X_n}) \;&\leq\; card(S_n) \;\leq\; \textstyle\sum_{j=1}^{n} card(S_j) \;=\; \sum_{j=1}^{n} d(\Sigma_{X_j}) \;=\; \max_{1\leq j\leq n} d(\Sigma_{X_j}) \\ &=\; d(\Sigma_{X_n}). \end{aligned}$$

Seja $S \;=\; \bigcup_{n\geq 1} S_n$; por 3.112.(e) temos

$$card(S) \;=\; \sup_{n\geq 1} card(S_n) \;=\; \sup_{n\geq 1} d(\Sigma_{X_n}).$$

Para completar a prova, é suficiente provar que S é denso em Σ. Dados $A \in \Sigma_{fin}$ e $\varepsilon > 0$, o Fato 3.164 garante que existe $n \geq 1$ tal que

(V) $$\mu(A - X_n) \;<\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

A densidade de $S_n \in \Sigma_{X_n}$ (veja (IV)) fornece $B \in S_n \subseteq S$, tal que

(VI) $$\mu((A \cap X_n) \,\triangle\, B) \;<\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

Uma vez que $A = (A \cap X_n) \triangle (A \cap X_n^c)$ obtemos

$$\begin{aligned} A \triangle B \;&=\; (A \cap X_n) \triangle (A \cap X_n^c) \triangle B \;=\; ((A \cap X_n) \triangle B) \triangle (A \cap X_n^c) \\ &=\; ((A \cap X_n) \triangle B) \cup (A - X_n) \end{aligned}$$

e portanto (V) e (VI) implicam $\mu(A \triangle B) \;<\; \varepsilon$, e S é denso em Σ. □

Exemplo 3.165 Seja $\langle\, X, \Sigma, \mu \,\rangle$ um espaço de medida σ-finito, com $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$, onde X_n é uma sequência crescente de mensuráveis em Σ_{fin}. Em geral, existe $A \in \Sigma_{fin}$ tal que

[60] Ou utilize 3.159 e 3.120.(e).

A não está contido em X_n, $n \geq 1$. Como um exemplo, considere a medida de Lebesque, m, em $\mathbb{R}$. Embora tenhamos

$$\mathbb{R} \;=\; \bigcup_{n\geq 1} (-n,\, n) \;=\; \bigcup_{n\geq 1} [-n,\, n],$$

existem abertos "muito espalhados" em $\mathbb{R}$, de medida arbitrariamente pequena. Se $r_1, \ldots, r_n$, $\ldots$ é uma enumeração dos racionais e $\beta > 0$, considere

$$O_\beta \;=\; \bigcup_{n\geq 1} (r_n - \tfrac{\beta}{2^n},\; r_n + \tfrac{\beta}{2^n}).$$

Então O_β é um aberto denso, com $m(O_\beta) \leq \boldsymbol{\varepsilon}$. Em particular, O_β não está contido em $[-n,\, n]$, $n \geq 1$. Note que o complemento de O_β é um *fechado, sem interior, de medida infinita.* Este exemplo mostra a necessidade do Fato 3.164 na prova do Teorema 3.163. □

Observação 3.166 Com a notação de 3.163, **seria um engano** pensar que

(I) $$L^p(\mu) \;=\; \bigcup_{n\geq 1} L^p(X_n,\, \mu).$$

O exemplo 3.165 já mostra isto. Mas há argumentos gerais. Por 3.91.(c), $L^p(X_n,\, \mu)$ é um subespaço fechado de $L^p(\mu)$. O Teorema de Baire, na formulação do Lema 3.18, implica

$$\text{(I) vale} \quad \text{sse} \quad \exists\, n \geq 1 \text{ tal que } L^p(\mu) \;=\; L^p(X_n,\, \mu) \quad \text{sse} \quad X \in \Sigma_{fin}.$$

Mais um exemplo da importância do Teorema de Baire. [61] □

Exercício 3.167 *Seja X um espaço de Banach.*

a) Todo subespaço de dimensão finita de X é fechado.

b) Se a dimensão de X não é finita, então é não enumerável, isto é, X não pode ter dimensão igual a $\aleph_0$.

Exercício 3.168 *Seja $\langle\, X, \Sigma, \mu\,\rangle$ um espaço de medida. Com a notação em* 3.132 *e* 3.149, *seja*

$$M(\Sigma) \;=\; \Sigma_{fin}/\Sigma_0.$$

Para $A,\, B \in \Sigma_{fin}$ definimos

(I) $$d(A/\theta,\, B/\theta) \;=\; \mu(A \,\triangle\, B).$$

a) Se $A/\theta = C/\theta$ e $B/\theta = D/\theta$, então $\mu(A \triangle B) \;=\; \mu(C \triangle D)$. Portanto, a definição (I) é independente de representantes.

b) $d(A/\theta,\, B\theta) \;=\; 0$ sse $A/\theta \;=\; B/\theta$.

c) A função $d : M(\Sigma) \times M(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida em (I) é uma métrica em $M(\Sigma)$.

d) $M(\Sigma)$ é um espaço métrico completo sse $\langle\, X, \Sigma, \mu\,\rangle$ é um espaço de medida completo (3.50.(*d*)).

e) $d(\Sigma) \;=\;$ densidade de $M(\Sigma)$ como espaço métrico.

f) Se $f \in L^1(\mu)$, a aplicação dada por

$$A/\theta \in M(\Sigma) \;\longmapsto\; \int_X f\, \chi_A\, d\mu$$

está bem definida (i.e., independe de representantes) e é uniformemente contínua.

[61] Um subespaço *com interior* tem que ser o espaço todo.

3.11 A Densidade de Espaços de Funções Contínuas

Seja K um espaço compacto Hausdorff. Nesta seção desenvolveremos métodos para determinar a densidade do espaço $\mathbb{C}(K)$, com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Isto fornecerá, via o Teorema 3.89, uma caracterização da densidade de $L^\infty(\mu)$, onde $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ é um espaço de medida.

Como parte deste programa provaremos o Teorema de Stone-Weierstrass e construiremos o compactificado de Stone-Cech de um espaço completamente regular, resultados fundamentais da Análise Clássica.

Esta seção é divida em subseções. Na primeira apresentaremos os **polinômios de Bernstein** que fornecem uma forma de aproximar uniformemente funções contínuas em intervalos fechados da reta real. Na segunda, discutiremos as idéias de Marshall Stone que envolvem a utilização da estrutura de reticulado para fornecer critérios para aproximação uniforme em $\mathbb{C}(K)$. A terceira subseção discutiremos uma imersão natural de K numa potência topológica do intervalo $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Como consequência, obteremos uma condição necessária e suficiente para que um espaço compacto seja metrizável, bem como a prova de que a densidade de $\mathbb{C}(K)$ é exatamente o peso de K. Na última ssubseção apresentaremos a construção do compactificado de Stone-Cech de um espaço completamente regular.

3.11.1 Polinômios de Bernstein e o Teorema de Weiertrass

Em tudo que segue os símbolos 1 e 0 indicarão, a um só tempo, os números reais e as funções constantes com este valor. O contexto deve deixar claro qual a interpretação adequada do símbolo em questão.

Lema 3.169 *Seja S um compacto em $\mathbb{R}$ e $f_1, \ldots, f_n$ uma sequência finita em $\mathbb{C}(S)$. Seja*

$$p : S \times S \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } p(x,t) = \textstyle\sum_{j=0}^n f_j(x)\, t^j,$$

i.e., p é um polinômio na variável t, cujos coeficientes são as funções f_j. Para $0 \leq j \leq n$, seja $\{g_{jm} : m \geq 1\}$ uma sequência em $\mathbb{C}(S)$ tal que

$$f_j = \lim_{m\to\infty} g_{jm} \quad em \quad \langle\, \mathbb{C}(S), \|\cdot\|_\infty \rangle.$$

Se $p_m(x,t) = \sum_{j=0}^n g_{jm}(x)\, t^j$, então $p_m \xrightarrow{u} p$ em $S \times S$. Em particular, para todo $t_0 \in S$, a sequência de funções $p_m(x; t_0)$, obtida fixando-se a variável t no valor t_0, converge uniformemente em $\mathbb{C}(S)$ para $p(x, t_0)$.

Prova. Seja $b > 0$ tal que $S \subseteq [-b, b]$ (todo compacto em $\mathbb{R}$ é limitado).

Fato 3.170 *Com a notação acima,*

$$\sup \{|p(x,t)| : \langle\, x, t \,\rangle \in S \times S\} \leq b^n \textstyle\sum_{j=0}^n \|f_j\|_\infty.$$

Prova. Para $\langle\, x, t \,\rangle \in S \times S$,

$$|p(x,t)| \leq \textstyle\sum_{j=0}^n |f_j(x)||t|^j \leq \sum_{j=0}^n |f_j(x)|\, b^n \leq b^n \sum_{j=0}^n \|f_j\|_\infty,$$

como desejado.

Uma vez que $\lim_{m\to\infty} g_{jm} = f_j$, dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \geq 1$ tal que para todo $m \geq m_0$ e todo j entre 1 e n temos

$$\|f_j - g_{jm}\|_\infty \;<\; \frac{\varepsilon}{(n+1)b^n}.$$

Assim, para $x,\, t \in S$, segue de 3.170 que

$$|p(x,t) - p_m(x,t)| \;\leq\; b^n \sum_{j=0}^{n} \|f_j - g_{jm}\|_\infty \;<\; b^n \sum_{j=0}^{n} \frac{\varepsilon}{(n+1)b^n} \;=\; \varepsilon,$$

mostrando que $\|p - p_m\|_\infty < \varepsilon$ em $\mathbb{C}(S \times S)$, como necessário. Está claro que se fixamos a variável t num valor em S, a convergência da sequência assim determinada também será uniforme. □

Corolário 3.171 *Seja $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ um polinômio com coeficientes reais e seja $\{q_{jm} : m \geq 1\}$ uma sequência de racionais tal que $a_j = \lim_{m\to\infty} q_{jm}$, $1 \leq j \leq n$. Se S é um compacto em $\mathbb{R}$ e*

$$p_m(x) \;=\; \sum_{j=0}^{n} q_{jm} x^j \qquad (m \geq 1)$$

então p_m converge uniformemente para p em S.

Prova. Note que a hipótese que as sequências de racionais q_{jm} convergem para os coeficientes de p significa que *as funções constantes de valor q_{jm} convergem uniformenente para a função constante de valor a_j*. A conclusão então segue do Lema 3.169. □

Lema 3.172 *Sejam $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ e $g : [0,1] \longrightarrow [a,b]$ dada por $g(t) = a + (b-a)t$. Definimos*

$G : \mathbb{C}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{C}([0,1])$, por $G(f) = f \circ g$.

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "G(f)"'] & & {[a,b]} \arrow[dl, "f"] \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

Então, G é uma isometria (i.e., $\|G(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$) linear e bijetora tal que

(1) *$G(1) = 1$ e $\forall\, h,\, k \in \mathbb{C}([a,b])$, $G(hk) = G(h)\, G(k)$;*

(2) *Se $f,\, f_n \in \mathbb{C}([a,b])$, $n \geq 1$,*

$$\|f - f_n\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ em } \mathbb{C}([a,b]) \quad \text{sse} \quad \|G(f) - G(f_n)\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ em } \mathbb{C}([0,1]);$$

(3) *f é um polinômio em $\mathbb{C}([a,b])$ sse $G(f)$ é um polinômio em $\mathbb{C}([0,1])$.*

Prova. Exercício. □

O Lema 3.172 garante que para entender o problem de aproximação em $\mathbb{C}([a,b])$ é suficiente (e necessário) entender o que se passa em $\mathbb{C}([0,1])$. Passaremos, portanto, a nos concentrar neste caso.

Lembramos que se $0 \leq k \leq n$ são naturais

$$\binom{n}{k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

é o coeficiente combinatório do binômio de Newton. Temos

[comb] $$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n}\binom{n}{k} \qquad \text{e} \qquad \binom{n-2}{k-2} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}\binom{n}{k}.$$

Definição 3.173 *Seja* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$*. O* $\boldsymbol{n}$**-ésimo polinômio de Bernstein de** $\boldsymbol{f}$ *é*

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Iremos determinar os polinômios de Bernstein das funções 1, x e x^2, primeiro para ter uma idéia do seu comportamento e também porque estes valores serão cruciais no que segue.

Proposição 3.174 *Para* $n \geq 1$*, temos*

a) Para todo $x \in [0,1]$*,* $B_n(1)(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$

b) Para todo $x \in [0,1]$*,* $B_n(x)(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x.$

c) Para todo $x \in [0,1]$*,* $B_n(x^2)(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (1 - \frac{1}{n})x^2 + \frac{x}{n}.$

d) Para todo $x \in [0,1]$*,* $\sum_{k=0}^{n}(x-k/n)^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$

e) $B_n : \mathbb{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{C}([0,1])$ *é uma aplicação linear positiva, de norma* 1*. Além disso,*

(1) *Se* $f \in \mathbb{C}([0,1])$ *é* 1*,* x *ou* x^2 *então* $B_n(f) \xrightarrow{u} f$ *em* $[0,1]$*, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(f) - f\|_\infty = 0.$$

(2) *A função* $x^2 B_n(1) - 2x\, B_n(x) + B_n(x^2) \xrightarrow{u} 0$ *em* $[0,1]$*.*

Prova. a) Se $x \in [0,1]$, temos $x + (1-x) = 1$; logo o binômio de Newton garante que

$$B_n(1)(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1,$$

isto é, B_n aplicado à função de valor constante igual a 1 é a função constante igual a 1.
b) Para $x \in [0,\,1]$, como $k/n = 0$ para $k = 0$,

$$B_n(x)(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Se fizermos $k = j+1$ na relação acima obtemos, lembrando (a) e que

$$\frac{j+1}{n}\binom{n}{j+1} = \binom{n-1}{j},$$

$$B_n(x)(x) = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{j+1}{n}\binom{n}{j+1} x^{j+1} (1-x)^{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} x^{j+1} (1-x)^{n-1-j}$$

$$= x\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} x^{j} (1-x)^{n-1-j} = x.$$

c) $$\begin{aligned} B_n(x^2)(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= A + \frac{x}{n} \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-j} \\ &= A + \frac{x}{n}. \end{aligned}$$

Para determinar o valor de A, procedemos como segue :

$$\begin{aligned} A &= \textstyle\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n-1} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} \textstyle\sum_{k=2}^n \frac{k-1}{n-1} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} x^2 \textstyle\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j (1-x)^{n-2-j} = \frac{n-1}{n} x^2. \end{aligned}$$

Dos cálculos acima obtemos

$$B_n(x^2)(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{x}{n},$$

como necessário.

d) Utilizando os ítens anteriores, temos

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=0}^n (x - k/n)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \left\{ \begin{array}{c} x^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \\ 2x \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \\ \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{array} \right. \\ &= x^2 B_n(1)(x) - 2x B_n(x)(x) + B_n(x^2)(x) \\ &= x^2 - 2x^2 + (1 - 1/n)x^2 + \frac{x}{n} \\ &= \frac{x(1-x)}{n}. \end{aligned}$$

e) Está claro que B_n é linear e que $B_n(f) \geq 0$ sempre que f for positiva. Por 3.82, B_n é contínua com $\|B_n\| = B_n(1) = 1$. Segue imediatamente dos ítens (a), (b) e (c) que $B_n(f)$ converge uniformemente para f em $[0, 1]$ se $f \equiv 1$, x e x^2. Para (2), como $\frac{x(1-x)}{n} \xrightarrow{u} 0$ em qualquer compacto[62], a conclusão desejada segue do ítem (d). $\square$

Teorema 3.175 (Weiertrass-Bernstein) *Se* $f \in \mathbb{C}([0,1])$ *então* $B_n(f) \xrightarrow{u} f$ *em* $[0,1]$.

[62] Para $x \in [0, 1]$, temos mesmo $\frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}$.

Prova. Devido a 3.174.(a), temos para $x \in [0,\, 1]$

$$f(x) \;=\; f(x)\cdot 1 \;=\; \textstyle\sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k}.$$

Assim,

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \textstyle\sum_{k=0}^{n} \left(f(k/n) - f(x)\right) \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \right| \\ &\le \textstyle\sum_{k=0}^{n} |f(k/n) - f(x)| \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Dado $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$, precisamos mostrar que existe $n_0 \ge 1$ tal que

$$\text{Para todo } n \ge n_0, \;\; \|B_n(f) - f\|_\infty \;<\; \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Como f é uniformemente contínua em $[0,\, 1]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{(II)} \qquad \text{Para todo } x,\, y \in [0,\, 1], \;\; |x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2}.$$

Além disso, f é limitada em $[0,\, 1]$ e portanto existe $M > 0$ tal que

$$\text{(III)} \qquad \|f\|_\infty \;=\; \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \;\le\; M.$$

Com estes preliminares, escolhemos n_0 tal que

$$\text{(IV)} \qquad \frac{1}{n_0} \;<\; \min\left\{\frac{4}{M^2\,\delta^4},\, \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^2}{4}\right\}.$$

Agora sejam

$$\alpha \;=\; \{k : 1 \le k \le k \;\text{ e }\; |x - k/n| < \delta\} \quad \text{e} \quad \beta \;=\; \{k : 1 \le k \le n \;\text{ e }\; |x - k/n| \ge \delta\}.$$

Então, (II) fornece

$$\text{(V)} \qquad \begin{aligned} \textstyle\sum_{k\in\alpha} |f(k/n) - f(x)| \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} &\le \textstyle\sum_{k\in\alpha} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2} \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \\ &\le \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2} \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \\ &= \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando 3.174.(d) e o fato que $x(1-x) \le 1/4$ em $[0,\, 1]$, obtemos

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k\in\beta} |f(k/n) - f(x)| \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} &\le \textstyle\sum_{k\in\alpha} 2M \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \\ &= 2M \textstyle\sum_{k\in\beta} \frac{(x-k/n)^2}{(x-k/n)^2} \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \\ &\le 2M \textstyle\sum_{k\in\beta} \frac{(x-k/n)^2}{\delta^2} \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \\ &= \frac{2M}{\delta^2} \textstyle\sum_{k\in\beta} (x-k/n)^2 \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \\ &= \frac{2M}{\delta^2}\, \frac{x(1-x)}{n} \;\le\; \frac{M}{\delta^2}\, \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Assim, se $n \ge n_0$, então por (IV) obtemos

$$\frac{M}{\delta^2}\,\frac{1}{2n} \;\leq\; \frac{1}{\sqrt{n}} \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consequentemente, de (I), (V) e dos cálculos acima vem que para $x \in [0,\,1]$ e $n \geq n_0$

$$|B_n(f) - f(x)| \;\leq\; \sum_{k\in\alpha}\cdots \;+\; \sum_{k\in\beta}\cdots \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon,$$

encerrando a prova. □

Corolário 3.176 *Seja S um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.*

a) Se $f \in \mathbb{C}(S)$, então existe uma sequência de polinômios P_n tal que $P_n \xrightarrow{u} f$ em S.

b) O conjunto dos polinômios com coeficiente racionais é denso em $\mathbb{C}(S)$ na norma $\|\cdot\|_\infty$. Em particular, $\mathbb{C}(S)$ é separável, isto é, $d(\mathbb{C}(S)) \leq \aleph_0$.

Prova. Para (a), aplique 3.172 e 3.175 à um intervalo fechado contendo S; o ítem (b) vem imediatamente de 3.171, 3.172 e 3.175. □

O método desenvolvido por Bernstein pode ser generalizado :

Teorema 3.177 (Korovkin) *Seja T_n, $n \geq 1$, uma sequência de aplicações lineares positivas de $\mathbb{C}([0,1])$ em $\mathbb{C}([0,1])$* [63]*. As seguintes condições são equivalentes :*

(1) *Para toda $f \in \mathbb{C}([0,1])$, $\;T_n(f) \xrightarrow{u} f$;*

(2) $T_n(f) \xrightarrow{u} f$ *para $f \equiv 1$, $f \equiv x$ e $f \equiv x^2$;*

(3) *Seja $\varphi : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dada por $\varphi(t,x) = (t-x)^2$; para $t \in [0,1]$ e $n \geq 1$ definimos $g_n^t \in \mathbb{C}([0,1])$ por*

$$g_n^t(x) \;=_{def}\; T_n(\varphi(t,x)).$$

Então, $T_n(1) \xrightarrow{u} 1$ e $g_n^t \xrightarrow{u} 0$ em $[0,1]$.

Prova. Exercício. Proceda como Korovkin : analise com cuidado a prova do Teorema 3.175. Mesmo assim daremos algumas indicações. Está claro que (1) $\Rightarrow$ (2). Para as outras implicações, sejam

$$f_0 \equiv 1, \quad f_1 \equiv x \quad \text{e} \quad f_2 = x^2.$$

(2) $\Rightarrow$ (3) : Para cada $t \in [0,\,1]$,

$$\varphi(t,\,x) \;=\; (t-x)^2 \;=\; t^2 f_0 \,-\, 2t f_1 \,+\, f_2.$$

Assim, a linearidade de T_n acarreta

$$g_n^t(x) \;=\; T_n(\varphi(t,x)) \;=\; t^2\,[T_n(f_0)](x) \,-\, 2t\,[T_n(f_1)](x) + [T_n(f_2)](x).$$

Agora utilize a hipótese que $[T_n(f_i)] \xrightarrow{u} f_i$, $i = 0,\,1,\,2$; o Lema 3.169 pode ser útil.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Dada $f \in \mathbb{C}([0,1])$, deve-se mostrar que $|T_n(f)(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in [0,\,1]$ e n suficientemente grande. Como na prova de 3.175, considere os seguintes parâmetros :

$*$ $\delta > 0$ tal que $|x - t| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(t)| < \varepsilon$;

[63] E portanto contínuas (3.82).

$*$ $M > 0$ tal que $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \le M$;

$*$ Seja $\eta \;=\; \dfrac{M}{\delta^2}$.

Agora mostre que

Fato 3.178 *Para todo* $x \in [0,1]$, $\;|f(t) - f(x)| \;\le\; \boldsymbol{\varepsilon} \;+\; \eta\varphi(t,x)$.

Para provar 3.178, considere, por analogia com a prova de 3.175, os conjuntos

$$\{x \in [0,\,1] : |x-t| \;<\; \delta\} \quad \text{e} \quad \{x \in [0,\,1] : |x-t| \;\ge\; \delta\}.$$

Conclua do Fato 3.178 que

$$-\boldsymbol{\varepsilon} f_0 - \eta\varphi \;\le\; f - f(t)\,f \;\le\; \boldsymbol{\varepsilon} f_0 + \eta\varphi$$

e lembrando que T_n é positivo termine a demonstração. □

3.11.2 O Teorema de Stone

Nesta subseção utilizaremos a linguagem de reticulados introduzida na seção 3.5. As maravilhosas idéias de Marshall Stone estão expostas no

Teorema 3.179 (M. Stone) *Seja K um espaço compacto Hausdorff e L um sub-reticulado*[64] *de $\mathbb{C}(K)$ verificando*

[sep] *Se a, $b \in \mathbb{R}$ e x, $y \in K$, então existe $f \in L$ tal que $f(x) = a$ e $f(y) = b$.*

Então, L é denso em $\mathbb{C}(K)$ na norma $\|\cdot\|_\infty$.

Prova. Seja $f \in \mathbb{C}(K)$ e $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$. Mostraremos que existe $g \in L$ tal que $\|f-g\|_\infty < \boldsymbol{\varepsilon}$. Dados x, $y \in K$ podemos escolher $g_{xy} \in L$ tal que

$$g_{xy}(x) = f(x) \quad \text{e} \quad g_{xy}(y) = f(y).$$

Como f e todas as g_{xy} são contínuas, para cada $y \in K$, existe um aberto V_y contendo y tal que

$$\text{(I)} \qquad \forall\; z \in V_y,\;\; g_{xy}(z) \;>\; f(z) - \boldsymbol{\varepsilon}.$$

De fato, fixado $y \in K$, uma vez que $g_{xy}(y) = f(y)$, existem abertos U_y e W_y contendo y tais que

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \forall\; u \in U_y, & |f(u) - f(y)| < \dfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2}; \\ \forall\; w \in W_y, & |g_{xy}(v) - f(y)| < \dfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2}. \end{cases}$$

Se $V_y = U_y \cap U_y$, então $y \in V_y$ e para todo $z \in V_y$, as desigualdades em (II) implicam

$$f(z) - \boldsymbol{\varepsilon} \;=\; \left(f(z) - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2}\right) - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2} \;<\; f(y) - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2} \;<\; g_{xy}(z),$$

como desejado. Assim, $\{V_y : y \in K\}$ é uma cobertura aberta de K e a compacidade garante que existem $y_1, \ldots, y_n$ tais que

[64] Veja Definição 3.76.(f).

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_{y_j}.$$

Seja $g_x = \inf_{1 \leq j \leq n} g_{xy_j}$; como L é subreticulado de $\mathbb{C}(K)$, temos que $g_x \in L$. De (I) e da construção da família g_{xy} obtemos

(III) $\forall\, z \in K,\ \ g_x\,(z) > f(z) - \varepsilon \quad$ e $\quad \forall\, x \in K,\ \ g_x(x) = \sup_{1 \leq j \leq n} g_{xy_j}(x) \ = \ f(x).$

Para cada $x \in K$, um argumento análogo ao utilizado acima mostra que existe um aberto U_x contendo x tal que

(IV) $$\forall\, u \in U_x,\ \ g_x(u) \ < \ f(u) + \varepsilon.$$

Novamente a compacidade de K implica que existem $x_1, \ldots, x_m \in K$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} U_{x_k}.$$

Definimos $g = \sup_{1 \leq k \leq m} g_{x_k}$; claro que $g \in L$, pois cada $g_{x_k} \in L$. É consequência imediata de (III) e (IV) que para todo $z \in K$, temos

$$f(z) - \varepsilon \ < \ g(z) \ < \ f(z) + \varepsilon,$$

isto é, $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$, completando a prova. □

Antes de prosseguir vamos discutir a noção de *sub-reticulado* (3.76.(f)) gerado por subconjuntos de $\mathbb{R}^X$. O leitor deve lembrar da seção 3.5 que

$$f \wedge g \ = \ \inf\{f, g\} \ \text{ e } \ f \vee g \ = \ \sup\{f, g\}.$$

Lema 3.180 *Seja X um conjunto.*

a) A família dos sub-reticulados de $\mathbb{R}^X$ é fechada por interseções.

b) Para $A \subseteq \mathbb{R}^X$, definimos, por indução em $n \geq 1$, a sequência

$$A_0 = A,\ \ A_{n+1} \ = \ A_n \ \cup \ \{f \vee g : f,\, g \in A_n\} \ \cup \ \{f \wedge g : f,\, g \in A_n\}.$$

Então, $\rho(A) \ =_{def} \ \bigcup_{n \geq 0} A_n$ é um sub-reticulado de $\mathbb{R}^X$, o <u>menor</u> sub-reticulado [65] *que contém A. Portanto,*

$$\rho(A) \ = \ \bigcap \{L \subseteq \mathbb{R}^X : L \text{ é sub-reticulado de } \mathbb{R}^X \ \text{ e } \ A \subseteq L\},$$

sendo a **sub-reticulado de $\mathbb{R}^X$ gerado por A**.

c) $card(A) \geq \aleph_0 \quad \Rightarrow \quad card(\rho(A)) \ = \ card(A).$

Prova. a) Se L_i, $i \in I$, é uma família de sub-reticulados de $\mathbb{R}^X$ e $L = \bigcap_{i \in I} L_i$, é imediato verificar que $f, g \in X \quad \Rightarrow \quad f \vee g,\ f \wedge g \in L,$ e L é um sub-reticulado de $\mathbb{R}^X$.

b) Está claro que $A_n \subseteq A_{n+1}$ e que $A \subseteq \rho(A)$. Se $f,\, g \in \rho(A)$, existem $n,\, m \geq 0$ tal que $f \in A_n$ e $g \in A_m$. Como a sequência A_n é crescente, podemos supor que $n \leq m$ e portanto $f,\, g \in A_m$. Mas então $f \wedge g,\ f \vee g \in A_{m+1} \subseteq \rho(A)$, mostrando que este conjunto é um sub-reticulado de $\mathbb{R}^X$. Por indução em $n \geq 0$, é fácil ver que qualquer sub-reticulado de $\mathbb{R}^X$ que contém A deve conter todos os A_n e portanto também a sua união.

c) Note que para cada $n \geq 0$, A_{n+1} é construído adicionado-se a A_n, sup e inf de *pares* de elementos em A_n. Portanto, lembrando 3.112.(b), temos

$$card(A_n) \ \leq \ card(A_{n+1}) \ \leq \ card((A_n)^5) \ = \ card(A_n),$$

[65] Na ordem da inclusão.

e todos os A_n têm a cardinalidade de A. Seque de 3.112.(b) (ou de 3.112.(e)) que

$$card(A) \ \leq \ card(\rho(A)) \ \leq \ \aleph_0 \, card(A) \ = \ card(A),$$

encerrando a prova. □

Definição 3.181 *Seja X um conjunto e A um subconjunto de $\mathbb{R}^X$.*

a) A é uma **álgebra** *se*

$$h, k \in A \quad e \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad h + k, \ \ hk \quad e \quad \alpha h \in A.$$

Assim, uma álgebra é um subconjunto de $\mathbb{R}^X$ que é fechado por multiplicação por escalar, bem como por soma e multiplicação de funções.

b) A **separa pontos em X** *se para todo $x \neq y$ em X, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Como consequência de 3.179 temos o famoso

Teorema 3.182 (M. Stone)[66] *Seja K um espaço compacto Hausdorff. Se $A \subseteq \mathbb{C}(K)$ é uma álgebra que contém as funções contantes e separa pontos em K, então A é densa em $\mathbb{C}(K)$ na norma $\|\cdot\|_\infty$.*

Prova. Nossa primeira observação é

Fato 3.183 *a) Se $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ é um polinômio com coeficientes reais e $f \in A$, então*

$$p(f) \ = \ \sum_{j=0}^{n} a_j \ f^j \ \in \ A.$$

b) A verifica a condição [sep] *no enunciado de 3.179.*

Prova. (a) Como A é uma álgebra de funções que contém as constantes, a função constante de valor a_0, bem como as funções $a_j f^j$, $1 \leq j \leq n$, estão em A. Consequentemente, a soma desta funções, que é exatamente $p(f)$, também pertence a A.

b) Sejam $x, y \in K$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Como A separa pontos, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Se tomarmos

$$\alpha \ = \ \frac{a - b}{f(x) - f(y)} \quad \text{e} \quad \beta \ = \ a - \alpha f(x) \ = \ b - \alpha f(y),$$

então $\alpha f + \beta \cdot 1 \in A$ (por (a)) e temos

$$\alpha f(x) + \beta = a \quad \text{e} \quad \alpha f(y) + \beta = b,$$

como desejado.

Seja $\rho(A)$ o sub-reticulado de $\mathbb{C}(K)$ gerado por A. Por 3.183.(b) e 3.179, $\rho(A)$ é denso em $\mathbb{C}(K)$ na norma $\|\cdot\|_\infty$. Para terminar a prova devemos mostrar que A é densa em $\rho(A)$.

Fato 3.184 *a) Se a, b, c, d são elementos de um espaço normado E, então*

$$\big|\, \|a - b\| - \|c - d\| \,\big| \ \leq \ \|a - c\| + \|b - d\|.$$

b) A é densa em $\rho(A)$.

[66] A maioria dos autores chama este resultado de Teorema de Stone-Weiertrass.

Prova. a) A desigualdade triangular fornece

$$\|a-b\| \;\leq\; \|a-c\| + \|c-d\| + \|b-d\|$$

e portanto, $\|a-b\| - \|c-d\| \leq \|a-c\| + \|b-d\|$. Um cálculo análogo mostrará que $\|c-d\| - \|a-b\| \leq \|a-c\| + \|b-d\|$, de onde a conclusão segue imediatamente.

b) Com a notação de 3.180.(b), temos

$$\rho(A) \;=\; \bigcup_{n\geq 0} A_n.$$

Assim, para provar que A é densa em $\rho(A)$ é suficiente verificar que A é densa em A_n, para todo $n \geq 0$. Lembremos (3.75.(a)) que se $f,\, g \in \mathbb{C}(K)$

$$f \vee g \;=\; \frac{f+g+|f-g|}{2} \quad \text{e} \quad f \wedge g \;=\; \frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

A prova será por indução em $n \geq 0$. O caso $n = 0$ é trivial já que $A_0 = A$. Assuma que A é densa em A_n. Para verificar que A é densa em A_{n+1}, basta mostrar que, dado $\varepsilon > 0$ e $f,\, g \in A_n$, existem $h,\, k \in A$ tal que

$$\|h - (f \wedge g)\|_\infty < \varepsilon \quad \text{e} \quad \|k - (f \vee g)\|_\infty < \varepsilon.$$

Trataremos o caso do sup; o método para o inf é análogo. Fixado $\varepsilon > 0$, como A é denso em A_n, existem $f_1,\, g_1 \in A$ tais que

$$\text{(I)} \qquad \|f - f_1\|_\infty \;<\; \varepsilon \quad \text{e} \quad \|g - g_1\|_\infty < \varepsilon.$$

Note que o ítem (a) implica

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} \|\,|f_1 - g_1| \;-\; |f-g|\,\|_\infty \;&=\; \sup_{x\in K} \big|\,|f_1(x) - g_1(x)| \;-\; |f(x) - g(x)|\,\big| \\ &\leq\; \sup_{x\in K} |f_1(x) - f(x)| + |g_1(x) - g(x)| \\ &=\; \|f_1 - f\|_\infty + \|g_1 - g\|_\infty. \end{aligned}$$

Seja $M > 0$ tal que $\|f_1 - g_1\|_\infty \leq M$. Pelo Teorema 3.175 existe um polinômio $p(t)$, com coeficientes reais, tal que [67]

$$\text{(III)} \qquad \text{Para todo } z \in [-M, M], \quad ||z| - p(z)| < \varepsilon.$$

Por 3.183.(a) $p(f_1 - g_1) \in A$, enquanto que (III) implica

$$\text{(IV)} \qquad \|p(f_1 - g_1) \;-\; |f_1 - g_1|\,\|_\infty \;<\; \varepsilon.$$

Seja $k = \dfrac{f_1 + g_1 + p(f_1 - g_1)}{2}$; está claro que $k \in A$. Então, (I), (II) e (IV) acarretam

$$\begin{aligned} \|k - (f \vee g)\|_\infty \;&=\; 1/2\; \|f_1 + g_1 + p(f_1 - g_1) \;-\; (f + g + |f - g|)\|_\infty \;= \\ &=\; 1/2\|(f_1 - f) \;+\; (g_1 - g) \;+\; [p(f_1 - g_1) \;-\; |f - g|]\,\|_\infty \\ &\leq\; 1/2\; (\|f_1 - f\|_\infty + \|g_1 - g\|_\infty + \|p(f_1 - g_1) - |f_1 - g_1|\,\|_\infty + \|\,|f_1 - g_1| \;-\; |f - g|\,\|_\infty \\ &\leq 1/2(\|f_1 - f\|_\infty + \|g_1 - g\|_\infty + \|p(f_1 - g_1) - |f_1 - g_1|\,\|_\infty + \|f_1 - f\|_\infty + \|g_1 - g\|_\infty) \\ &<\; \frac{5}{2}\,\varepsilon, \end{aligned}$$

completando as provas do Fato 3.184 e do Teorema. $\square$

[67] A função $|\cdot|$ é contínua em $[-M, M]$.

Exercício 3.185 *Seja $A \subseteq \mathbb{C}([0, 2\pi])$ o conjunto das funções* [68] *da forma*

$$a_0 \ + \ \sum_{j=1}^{n} \ a_j \cos jx \ + \ \sum_{k=1}^{m} \ b_j \sin kx,$$

onde a_0, $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$ são reais. Então, A é denso em $\mathbb{C}([0, 2\pi])$ na norma $\|\cdot\|_\infty$. [69]

3.11.3 A Densidade de $\mathbb{C}(K)$

Para esta parte precisaremos establecer alguns preliminares topológicos.

Proposição 3.186 *Seja X um espaço Hausdorff.*

a) Se K_1 e K_2 são compactos disjuntos em X então existem abertos disjuntos U_1, U_2, tais que $K_1 \subseteq U_1$ e $K_2 \subseteq U_2$.

b) Se X é compacto e F_1, F_2 são fechados disjuntos em X então existe $f \in \mathbb{C}(X, [0, 1])$ tal que $f_{|F_1} \equiv 1$ e $f_{|F_2} \equiv 0$. Em particular, X é normal e completamente regular (3.115).

c) Se X é compacto, $\mathcal{B}$ é uma base para X e x, y são pontos distintos em X, então existem U, $V \in \mathcal{B}$ tais que

$$\overline{U} \cap \overline{V} \ = \ \emptyset, \quad x \in U \quad e \quad y \in V.$$

Prova. a) Seja K um compacto em X e z um ponto de Z fora de K. Como X é Hausdorff, para cada $y \in K$ existem abertos disjuntos W_y, V_y em X tal que $z \in V_y$ e $y \in W_y$. A compacidade de K implica na existência de $y_1, \ldots, y_n \in K$ tal que

$$K \ \subseteq \ \bigcup_{1 \leq j \leq n} W_{y_j} \ \ =_{def} \ \ O.$$

Considere $V \ = \ \bigcap_{1 \leq j \leq n} V_{y_j}$; está claro que V é aberto, $z \in V$ e $V \cap O = \emptyset$. Acabamos de mostrar que se K é compacto em X e $z \notin K$,

(I) Existem abertos disjuntos V, O tal que $z \in V$ e $K \subseteq O$.

Podemos aplicar (I) a cada par $\langle\, x, K_2 \,\rangle$, $x \in K_1$. Assim, existem abertos disjuntos V_x, O_x em X tais que $x \in V_x$ e $K_2 \subseteq O_x$. Por compacidade, existem $x_1, \ldots, x_m \in K_1$ tais que

$$K_1 \ \subseteq \ U \ \ =_{def} \ \bigcup_{i \leq j \leq m} V_{x_j}.$$

Se considerarmos $U' \ = \ \bigcap_{1 \leq j \leq m} O_{x_j}$, temos

$$K_1 \ \subseteq \ U, \ \ K_2 \ \subseteq \ U' \ \text{ e } \ U \cap U' \ = \ \emptyset,$$

como desejado.

b) Se X é compacto, todo fechado é compacto. O ítem (a) garante a existência de abertos disjuntos U_1, U_2 tais que $F_1 \subseteq U_1$ e $F_2 \subseteq U_2$. Assim, X é normal. Pelo Lema de Urysohn (3.47) existe $f \in \mathbb{C}(X, [0, 1])$ tal que

$$f_{|F_1} \ \equiv 1 \ \text{ e } \ supp\, f \subseteq U_1.$$

Como $F_2 \subseteq U_2 \subseteq U_1^c$, concluímos que $f_{|F_2} \equiv 0$, como necessário. Como todo ponto é compacto, segue imediatamente do exposto que X é completamente regular. [70]

[68] Chamadas *polinômios trigonométricos*.

[69] Mostre que A verifica as hipóteses do Teorema 3.182.

[70] Como observado em 3.117, normal $\Rightarrow$ completamente regular vale em geral.

c) É possível obter o resultado diretamente de (b). Mas faremos uma prova que independe do Lema de Urysohn. Como K é Hausdorff, existem abertos disjuntos A, B tais que $x \in A$ e $y \in B$. Em particular, $x \notin \overline{B}$. Como $\{x\}$ e $\overline{B}$ são compactos, o ítem (a) fornece abertos disjuntos W_1, W_2 tais que

$$x \in W_1 \quad \text{e} \quad \overline{B} \ \subseteq \ W_2.$$

Seja $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq W_1$. Então, $U \subseteq W_2^c$ e portanto $\overline{U} \subseteq W_2^c$ (pois este último é fechado). Se $V \in \mathcal{B}$ é tal que $y \in V \subseteq B$, temos $\overline{V} \subseteq \overline{B} \subseteq W_2$ e assim $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, como necessário. □

Lema 3.187 *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função, onde X e Y são espaços topológicos.*

a) As seguintes condições são equivalentes :

(1) *f é contínua;*

(2) *Se $\mathcal{B}$ é uma base de abertos em Y, então para todo $U \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(U)$ é aberto em X;*

(3) *Para todo fechado F em Y, $f^{-1}(F)$ é fechado em X.*

(4) *Para todo $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \ \subseteq \ \overline{f(A)}$.*

b) As seguintes condições são equivalentes :

(1) *f é um homeomorfismo;*[71]

(2) *f é bijetora, contínua e* aberta[72]*;*

(3) *f é bijetora, contínua e* fechada[73].

c) Se X é compacto e Y é Hausdorff, as seguintes condições são equivalentes :

(1) *f é injetora e contínua;*

(2) *f é um homeomorfismo entre X e a imagem de f, com a topologia induzida por Y.*

Prova. a) Como

$$f \text{ é contínua} \quad \text{sse} \quad \forall\, U \text{ aberto em } Y,\ f^{-1}(U) \text{ é aberto em } X,$$

para provar a equivalência dos três primeiros ítens, basta lembrar que imagem inversa comuta com uniões quaisquer e complementos, isto é, se B, B_i, $i \in I$, são subconjuntos de Y, então

$$f^{-1}(\textstyle\bigcup_{i\in I} B_i) \ = \ \textstyle\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{e} \quad [f^{-1}(B)]^c \ = \ f^{-1}(B^c).$$

Para a equivalência entre (4) e as outras condições é bom recordar que se $p \in X$ e $A \subseteq X$

[cl] $$p \in \overline{A} \quad \text{sse} \quad \forall \text{ aberto } U\ (x \in U \ \Rightarrow\ U \cap A \neq \emptyset).$$

Logo, $A \subseteq \overline{A}$ e A é *fechado* sse $\overline{A} \subseteq A$.

Se f é contínua e $x \in \overline{A}$, seja W um aberto de Y contendo $f(x)$. Então, $f^{-1}(W)$ é um aberto contendo x e portanto

$$f^{-1}(W) \cap A \neq \emptyset,$$

[71]Isto é, f é bijetora e sua inversa é contínua.
[72]Isto é, a imagem de todo aberto em X é um aberto em Y.
[73]Isto é, a imagem de todo fechado em X é um fechado em Y.

o que significa que $W \cap f(A) \neq \emptyset$. Como W é arbitrário contendo $f(x)$, [cl] implica que $f(x) \in \overline{f(A)}$, como necessário. Reciprocamente, se (4) está satisfeita, seja F um fechado em Y e $A = f^{-1}(F)$. Então,

$$f(\overline{A}) \ \subseteq \ \overline{f(A)} \ \subseteq \ \overline{f(f^{-1}(F))} \ \subseteq \ \overline{F} \ = \ F,$$

pois F é fechado. Mas então,

$$\overline{A} \ = \ \overline{f^{-1}(F)} \ \subseteq \ f^{-1}(F) \ = \ A,$$

e $f^{-1}(F)$ é um fechado em X. Por (3), f é contínua.

b) Seja $g : Y \longrightarrow X$ a inversa de f, isto é, as seguintes relações estão satisfeitas :

(I) $$g \circ f \ = \ Id_X \ \text{ e } \ f \circ g \ = \ Id_Y.$$

É consequência imediata de (I) que para todo $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$

$$g^{-1}(A) \ = \ f(A) \ \text{ e } \ f^{-1}(B) \ = \ g(B).$$

Com estas observações, deixamos a verificação da equivalência entre (1), (2) e (3) como exercício para o leitor.

c) Seja T a imagem de f, com a topologia induzida por Y. Tendo em vista a equivalência em (b), vamos mostrar que $f : X \longrightarrow T$ é fechada. Seja F um fechado em X. Então F é compacto e portanto $f(F) \subseteq Y$ é compacto em Y. Como compactos em um espaço Hausdorff são fechados, $f(F)$ é fechado em Y. Uma vez que T tem a topologia induzida por Y e $f(F) \subseteq T$, concluímos que $f(F)$ é fechado em T, como necessário. □

3.188 Produtos Topológicos. Para $I \neq \emptyset$, seja Y_i, $i \in I$, uma família de espaços topológicos e seja

$$Y \ = \ \prod_{i \in I} Y_i$$

o produto *dos conjuntos* subjacentes (1.4). Um elemento típico de Y, que é uma função

$$s : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} Y_i, \text{ tal que para todo } i \in I,\ s(i) \in Y_i,$$

poderá ser indicado por $s = \langle s_i \rangle_{i \in I}$, dependendo da conveniência da exposição. Esta construção vem acompanhada de **projeções coordenadas**

$$\pi_i : Y \longrightarrow Y_i, \text{ dada por } \pi_i(s) \ = \ s(i).$$

Logo, se utilizarmos a notação $s = \langle s_i \rangle_{i \in I}$, então $\pi_i(s) \ = \ s_i$. O fato seguinte é consequência imediata das definições :

Fato 3.189 *Para $s, t \in Y$, as seguintes condições são equivalentes :*

(1) $s = t$; (2) *Para todo* $i \in I$, $\pi_i(s) \ = \ \pi_i(t)$.

Queremos dar a Y uma topologia, denominada **topologia produto**, que fará de Y o produto dos Y_i, *na categoria dos espaços topológicos e funções contínuas*. Uma exigência natural para uma tal topologia é que *as projeções* sejam contínuas. Portanto, é necessário declarar abertos em Y a imagem inversa de cada aberto em Y_i por π_i, para todo $i \in I$. Como veremos, isto será suficiente para gerar uma topologia em Y que terá a propriedade universal desejada (3.190.(c)).

Seja

$$\Pi \;=\; \{\pi_i^{-1}(U) : i \in I \quad \text{e} \quad U \text{ é aberto em } Y_i\}.$$

Seja $\mathcal{P}$ a coleção dos subconjuntos de Y que são uniões (arbitrárias) de interseções *finitas* de elementos de Π. **Assim, a coleção das interseções finitas de elementos de Π constituem uma *base* para $\mathcal{P}$.**

Proposição 3.190 *a) $\mathcal{P}$ é uma topologia em Y, com a qual as projeções coordenadas são contínuas.*

b) Se Y_i, $i \in I$, é Hausdorff, o mesmo é verdade para Y.

c) Se X é um espaço topológico e $f : X \longrightarrow Y$ é uma função, as seguintes condições são equivalentes :

(1) *f é contínua;*

(2) *$\forall\, i \in I$, $\pi_i \circ f$ é contínua.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_i \circ f"'] & & Y \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & Y_i & \end{tikzcd}$$

d) (Tychonoff) *Se Y_i, $i \in I$, são compactos, o mesmo é verdade para Y.*

Prova. Note que tanto Π quanto o conjunto das interseções finitas de elementos de Π estão em $\mathcal{P}$. Os axiomas de topologia estão listados no Exemplo 3.142, página 103. Temos :

[top 1] : Está claro que $\emptyset$ e $Y \in \Pi$, pois para $i \in I$, $Y = \pi_i^{-1}(Y_i)$ e $\emptyset = \pi_i^{-1}(\emptyset)$;

[top 2] : Seja $U_0, \ldots, U_n$ uma família finita de elementos de $\mathcal{P}$. Para $1 \le j \le n$, existe uma coleção F_j de interseções finitas de elementos de Π tal que

$$U_j \;=\; \textstyle\bigcup_{p \in F_j} A_p.$$

Mas então,

$$\textstyle\bigcap_{j=1}^n U_j \;=\; \bigcap_{j=1}^n \bigcup_{p \in F_j} A_p \;=\; \bigcup\, \{\bigcap_{j=1}^n A_{p_j} : \langle\, p_1, \ldots, p_n\,\rangle \in \prod_{j=1}^n F_j\}.$$

Como $\bigcap_{j=1}^n A_{p_j}$ é uma interseção finita de elementos em Π [74], concluímos que $\mathcal{P}$ é fechado por interseções finitas.

[top 3] : Está claro que $\mathcal{P}$ é fechado por uniões arbitrárias.

Se $i \in I$ e U é aberto em Y_i, então $\pi_i^{-1}(U) \in \Pi \subseteq \mathcal{P}$, e portanto a projeção π_i é contínua.

b) Suponha que os Y_i sejam Hausdorff e que s, t são elementos distintos em Y. Então existe $i \in I$ tal que $s(i) \neq t(i)$. Sejam U, V abertos disjuntos em Y_i tais que $s(i) \in U$ e $t(i) \in V$. Então,

$$\pi_i^{-1}(U) \quad \text{e} \quad \pi_i^{-1}(V) \text{ são abertos disjuntos em } Y, \text{ com } s \in \pi_i^{-1}(U) \quad \text{e} \quad t \in \pi_i^{-1}(V),$$

e Y é Hausdorff.

c) Como a composição de contínuas é contínua, é suficiente verificar que (2) $\Rightarrow$ (1). Pela equivalência em 3.187.(a), é suficiente mostrar que se U é uma intersecão finita de elementos

[74] Pois cada A_{p_j} é deste tipo.

em Π, então $f^{-1}(U)$ é aberto em Y, isto é, está em $\mathcal{P}$ [75]. Seja $i_1, \ldots, i_n$ um subconjunto finito de I e para $1 \leq k \leq n$, U_k um aberto em Y_{i_k}, tal que

$$\text{(I)} \qquad U = \bigcap_{k=1}^{n} \pi_i^{-1}(U_k).$$

Então, se escrevemos $f_k = \pi_{i_k} \circ f$, $1 \leq k \leq n$, temos

$$\text{(II)} \qquad f^{-1}(U) = \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}(U_k).$$

De fato, se $x \in X$ então (I) garante que

$$f(x) \in U \quad \text{sse} \quad \forall\, 1 \leq k \leq n, \;\; \pi_{i_k}(f(x)) \in U_k \quad \text{sse} \quad \forall\, 1 \leq k \leq n, \;\; x \in f_k^{-1}(U_k),$$

estabelecendo (II). Uma vez que cada f_k é contínua, concluímos que $f^{-1}(U)$ é aberto em X (é uma interseção finita de abertos) e portanto f é contínua, como desejado.

d) Este o famoso Teorema de Tychonoff. A prova fica para um curso de Topologia. □

A topologia $\mathcal{P}$ definida acima é a **topologia produto** em Y. É a única topologia que consideraremos em um produto de espaços topológicos. □

Um dos principais resultados desta subseção é o

Teorema 3.191 *Seja $[0,1]$ o intervalo unitário em $\mathbb{R}$ e K um espaço compacto Hausdorff de peso $\kappa \geq \aleph_0$ [76]. Seja*

$$Y = [0,1]^{\kappa}$$

o produto de κ cópias de $[0,1]$, com a topologia produto. Então existe uma aplicação injetora e contínua, $\gamma : X \longrightarrow Y$, que identifica K com um sub-espaço compacto de Y.

Prova. Seja $\mathcal{B}$ uma base de K, de cardinal κ. Pelo Exercício 3.116.(a) e o Fato 3.121, podemos supor que $\mathcal{B}$ constitui-se de abertos regulares (3.115.(a)), isto é, para todo $U \in \mathcal{B}$, $U = \text{int}\, \overline{U}$. Em particular, podemos supor que $X \notin \mathcal{B}$ [77]. Seja

$$S = \{\langle U, V \rangle : U, V \in \mathcal{B}, \;\; \text{e } \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset\}.$$

Se $\langle U, V \rangle \in S$ então $\overline{U}$, $\overline{V}$ são compactos disjuntos e por 3.186.(b) existe $\varphi_{UV} \in \mathbb{C}(X, [0,1])$ tal que ${\varphi_{UV}}_{|\overline{U}} \equiv 1$ e ${\varphi_{UV}}_{|\overline{V}} \equiv 0$. Consideremos

$$(\Phi) \qquad \Phi = \{\varphi_{UV} : \langle U, V \rangle \in S\}.$$

Fato 3.192 *a) Φ separa pontos em K : se x, y são pontos distintos em K, existe $\varphi \in \Phi$ tal que $\varphi(x) = 1$ e $\varphi(y) = 0$.*

b) $card(\Phi) = card(S) = card(\mathcal{B}) = \kappa$.

Prova. a) Vem imediatamente de 3.186.(c), pois existe $\langle U, V \rangle \in S$ tal que $x \in U$ e $y \in V$. Consequentemente, a família Φ separa pontos em K (3.181.(b)).

b) Está claro que $card(\Phi) = card(S)$ [78]. Para $U \in \mathcal{B}$, seja $x \notin \overline{U}$ (lembre que $\overline{U} \neq K$). Por 3.186.(a), existem abertos A, B tal que $\overline{U} \subseteq A$ e $x \in B$. Se $V \in \mathcal{B}$ é tal que $V \subseteq B$, então

[75] Como registrado acima, a coleção das interseções finitas de elementos de Π é uma base para $\mathcal{P}$.

[76] O caso finito não é lá muito interessante; veja 3.114.

[77] Se $X \in \mathcal{B}$, ele seria o único elemento de $\mathcal{B}$ cujo fecho é o próprio X.

[78] Para cada par em S corresponde um único elemento de Φ, por construção.

$\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, isto é, $\langle U, V \rangle \in S$. Acabamos de mostrar que todo elemento de $\mathcal{B}$ aparece como primeira coordenada de algum par em S e portanto

$$card(\mathcal{B}) \;\leq\; card(S).$$

Por outro lado, 3.112.(a) fornece

$$card(S) \;\leq\; card(\mathcal{B} \times \mathcal{B}) \;=\; card(\mathcal{B}) \;=\; \kappa$$

encerrando a prova do Fato 3.192.

Por 3.192, podemos escrever

$$\Phi \;=\; \{\varphi_\beta : \beta < \kappa\},$$

isto é, Φ é uma sequência de comprimento κ de funções contínuas de K em $[0, 1]$, que separam pontos em K (por (I)). Definimos

$$\gamma : K \longrightarrow [0,1]^\kappa, \text{ dada por } \;\; \gamma(x) \;=\; \langle\, \varphi_\beta(x) \,\rangle_{\beta<\kappa}.$$

Uma vez que Φ separa pontos em K, temos que γ é injetora. De fato, se $x \neq y$ em K, existe $\beta < \kappa$ tal que $\varphi_\beta(x) \neq \varphi_\beta(y)$. Logo, as sequências $\gamma(x)$ e $\gamma(y)$ diferem na coordenada β. Já que para todo $\alpha < \kappa$ temos

$$\pi_\alpha \circ \gamma \;=\; \varphi_\alpha \;\in\; \mathbb{C}(K, [0,1]),$$

segue da equivalência em 3.190.(c) que γ é contínua [79].

Para terminar a prova, utilizamos o ítem (c) do Lema 3.187 : a função γ sendo injetora e contínua, estabelece um homeomorfismo entre K e um sub-espacço compacto do cubo de dimensão κ, como desejado. $\square$

Corolário 3.193 *Um espaço compacto Hausdorff é metrizável sse* $w(K) \;\leq\; \aleph_0$.

Prova. Segue de 2.49 que um espaço métrico compacto tem peso $\leq \aleph_0$. Reciprocamente, se $w(X) = \aleph_0$, o Teorema 3.191 garante que K pode ser identificado com um subespaço compacto T do cubo de Hilbert, $[0,1]^\omega$. Como este espaço é metrizável (2.34), o mesmo é verdade para qualquer um de seus sub-espaços. Logo, a métrica em T pode ser transferida, pelo homeomorphismo γ de 3.191, de T para K. Explicitamente, se d é a métrica em T, definimos

$$D : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ por } D(x,y) \;=\; d(\gamma(x), \gamma(y)),$$

para obter uma métrica em K, compatível com a sua topologia original. $\square$

Com os ingredientes desenvolvidos acima estamos prontos para o

Teorema 3.194 *Se K é um espaço compacto Hausdorff infinito então* $d(\mathbb{C}(K)) \;=\; w(K)$.

Prova. Seja Φ o conjunto de funções contínuas construído na prova do Teorema 3.191 (veja (Φ), página 130). Como Φ separa pontos em K (3.192.(a)), o Teorema 3.179 garante que o subreticulado de $\mathbb{C}(K)$ gerado por Φ, $\rho(\Phi)$, é denso em $\mathbb{C}(K)$. Por outro lado, 3.180.(c) e 3.192.(b) acarretam

$$card(\rho(\Phi)) \;=\; card(\Phi) \;=\; w(K),$$

[79] $\pi_\alpha : [0,1]^\kappa \longrightarrow [0,\, 1]$ é a projeção na coordenada α, como em 3.188.

mostrando que $d(\mathbb{C}(K)) \leq w(K)$. Seja $\Lambda \subseteq \mathbb{C}(K)$ um conjunto denso. Seja

$$I = (1 - \frac{1}{3},\ 1 + \frac{1}{3}).$$

Para $f \in \Lambda$ definimos

$$A_f = \{x \in K : f(x) \in I\} = f^{-1}(I).$$

Está claro que cada A_f é aberto em K. Seja

$$\mathcal{B} = \{A_f : f \in \Lambda\}.$$

Para encerrar a prova é suficiente mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base para K. Pois se este for o caso, teremos $card(\mathcal{B}) = card(\Lambda)$ e portanto $w(K) \leq d(\mathbb{C}(K))$, como necessário para estabelecer a igualdade desejada.

Seja U um aberto em K e $x \in U$. Para mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base para K, precisamos encontrar $f \in \Lambda$ tal que

$$\text{(I)} \qquad x \in A_f \subseteq U.$$

Podemos, evidentemente, supor que $U \neq K$ [80]. Como K é completamente regular (3.186.(b)), existe $h \in \mathbb{C}(K, [0,1])$ tal que $h(x) = 1$ e $h_{|U^c} \equiv 0$. Já que Λ é denso em $\mathbb{C}(K)$,

$$\text{Existe } f \in \Lambda \text{ tal que } \|h - f\|_\infty < \frac{1}{3}.$$

Como $h(x) = 1$, devemos ter $f(x) \in I$ e assim $x \in A_f$; por outro lado, se $y \in U^c$, então $h(y) = 0$ e portanto $f(y) < \frac{1}{3}$. Conclui-se que $A_f = f^{-1}(I) \subseteq U$ estabelecendo (I) e encerrando a prova. □

Do Teorema 3.194 e do Corolário 3.193 vem

Corolário 3.195 *Se K é um espaço compacto Hausdorff então $\mathbb{C}(K)$ é separável sse K é metrizável.*

3.11.4 O Compactificado de Stone-Chech

Seja X um espaço completamente regular (3.115.(c)). Queremos construir um espaço compacto, βX, juntamente com uma função conínua, $\beta : X \longrightarrow \beta X$, satisfazendo as seguintes condições :

∗ β é injetora, contínua e sua imagem é densa em βX;

∗ Se K é um espaço compacto e $f : X \longrightarrow K$ é contínua então existe uma *única* função contínua $\beta_K f : \beta X \longrightarrow K$ tal que o seguinte diagrama é comutativo :

[80] Senão qualquer f serve !

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "f"'] & & \beta X \arrow[dl, "\beta_K f"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

isto é, f tem uma única extensão contínua a βX, ao longo de β.

A propriedade fundamental aqui é a da extensão. Um espaço compacto que resolve o problema acima é único (a menos de homeomorfismo) e denomina-se o **compactificado de Stone-Cech de $\boldsymbol{X}$**. A esta altura dos acontecimentos não vale muito a pena gastar tempo com a unicidade : é consequência imediata da propriedade "categórica" que define βX [81]. Esta construção tem importância estrutural : fornece o funtor "espaço compacto livre", adjunto do funtor esquecimento dos espaços topológicos para conjuntos [82].

Tendo em vista 3.114, só nos ocuparemos de espaços topológicos Hausdorff e **infinitos**.

Lema 3.196 *Se X é um espaço topológico então* $card(\mathbb{C}(X)) \;\leq\; 2^{d(X)}$.

Prova. Começamos com

Fato 3.197 *Se $f,\, g \in \mathbb{C}(X)$ então*

$$[f = g] \;=_{def}\; \{x \in X : f(x) = g(x)\} \text{ é fechado em } X.$$

Prova. Se $y \notin [f = g]$, seja $\boldsymbol{\varepsilon} = \dfrac{|f(y) - g(y)|}{2}$; considere os intervalos disjuntos

$$I \;=\; (f(y) - \boldsymbol{\varepsilon},\;\; f(y) + \boldsymbol{\varepsilon}) \quad \text{e} \quad J \;=\; (g(y) - \boldsymbol{\varepsilon},\;\; g(y) + \boldsymbol{\varepsilon}).$$

e sejam $U = f^{-1}(I)$ e $V = g^{-1}(J)$. Temos $x \in U \cap V$, com esta interseção aberta em X. Agora observe que se $z \in U \cap V$ então $f(z) \in I$, enquanto que $g(z) \in J$. Assim,

$$U \cap V \cap [f = g] \;=\; \emptyset,$$

mostrando que $[f = g]$ é fechado em X.

Seja $S \subseteq \mathbb{C}(X)$ um subconjunto denso de cardinal $d(X)$ [83]. Se $f,\, g$ são funções reais contínuas em X, o Fato 3.197 acarreta

$$f_{|S} = g_{|S} \quad \Rightarrow \quad f = g,$$

isto é, se f e g coincidem em S então são iguais. De fato, se $S \subseteq [f = g]$, como este último é fechado e S é denso, temos $\overline{S} = X = [f = g]$. Consequentemente, os ítens (a) e (f) em 3.112 fornecem

$$card(\mathbb{C}(X)) \;\leq\; card(\mathbb{R}^S) \;=\; (2^{\aleph_0})^{d(X)} \;=\; 2^{\aleph_0 d(X)} \;=\; 2^{d(X)},$$

completando a prova. $\square$

[81] O leitor que nunca foi apresentado à Teoria das Categorias deve fazer a prova da unicidade.

[82] Não ligue muito para este comentário, no momento.

[83] $d(X)$ é a densidade de X, definida em 3.113.

Observação 3.198 O importante nas provas de 3.197 e 3.196 é que $\mathbb{R}$ é Hausdorff. Na realidade, 3.197 vale, essencialmente com a mesma prova, para $\mathbb{C}(X, Y)$, contanto que $\underline{Y \text{ seja Hausdorff}}$. Já a conclusão de 3.196 seria

$$card(\mathbb{C}(X,Y)) \;\leq\; card(Y)^{d(X)}. \qquad \square$$

Com o mesmo método utilizado na prova do Teorema 3.191 temos

Teorema 3.199 *Seja X um espaço completamente regular e $\kappa = 2^{d(X)}$. Então*

a) Existe uma função injetora e contínua, $\beta : X \longrightarrow [0,1]^\kappa$, que identifica X com um subespaço de $[0,1]^\kappa$.

b) Seja $\beta X \;=_{def}\; \overline{\beta(X)}$. Com a topologia induzida por $[0,1]^\kappa$, βX é um espaço compacto Hausdorff, no qual $\beta(X)$ é denso.

c) Se $f \in \mathbb{C}(X)$ é limitada, então existe uma única *$\widehat{f} \in \mathbb{C}(\beta X)$ tal que $\|\widehat{f}\|_\infty = \|f\|_\infty$ e o seguinte diagrama é comutativo :*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "f"'] & & \beta X \arrow[dl, "\widehat{f}"] \\
& {[-M,\, M]} &
\end{tikzcd}$$

onde $M = \|f\|_\infty$.

Prova. a) Por 3.196 temos $card(\mathbb{C}(X)) \leq \kappa$. Portanto, existe uma enumeração [84]

$$\Psi \;=\; \{\psi_\alpha : \alpha < \kappa\}$$

de <u>todas</u> as funções contínuas de X no intervalo $[0, 1]$. Definimos

(I) $$\beta : X \longrightarrow [0,1]^\kappa, \;\; \text{dada por} \;\; \beta(x) \;=\; \langle\, \psi_\alpha(x) \,\rangle_{\alpha<\kappa}.$$

Se $x \neq y$ em X, a completa regularidade de X fornece $f : X \longrightarrow [0, 1]$, contínua, tal que $f(x) = 1$ e $f(y) = 0$ (pontos são fechados !). Logo, $f = \psi_\alpha$, para algum $\alpha < \kappa$. Assim, $\beta(x)$ e $\beta(y)$ diferem na coordenada α, mostrando que β é injetora. Como para todo $\alpha < \kappa$

$$\pi_\alpha \circ \beta \;=\; \psi_\alpha,$$

segue de 3.190.(c) que β é contínua.

No caso do Teorema 3.191, a compacidade de K garantia (via 3.187.(c)) que γ era um homeomorfismo entre K e $\gamma(K)$. No presente caso, é preciso trabalhar mais um pouco. Pelo Lema 3.187.(b), é necessário verificar que se U é um aberto em X, $\beta(U)$ é aberto em $\beta(X)$, *com a topologia induzida por* $[0,1]^\kappa$, ou seja, que existe um aberto V do cubo de dimensão κ tal que

(I) $$\beta(U) \;=\; V \cap \beta(X).$$

[84] Eventualmente com repetições.

Claro que podemos supor que $U \neq X$. Seja $F = U^c$, um fechado em X. Como X é completamente regular e a família Ψ contém <u>todas</u> as funções definidas em X com valores em $[0, 1]$, para cada $x \in U$, existe $\psi_{\alpha_x} \in \Psi$ tal que

$$\psi_{\alpha_x}(x) = 1 \quad \text{e} \quad (\psi_{\alpha_x})_{|F} \equiv 0.$$

Seja $I = (1 - \frac{1}{3},\ 1 + \frac{1}{3})$; para $x \in U$, definimos

$$V_x = \psi_{\alpha_x}^{-1}(I).$$

Na notação de 3.188, $V_x \in \Pi$, i.e., V_x é um aberto básico em $[0,1]^\kappa$. Agora definimos

$$V = \bigcup_{x \in U} V_x.$$

Fato 3.200 *Com a notação acima, V é um aberto em $[0,1]^\kappa$ e $\beta(U) = V \cap \beta(X)$. Logo, β é um homeomorfismo entre X e $\beta(X)$ com a topologia induzida por $[0,1]^\kappa$.*

Prova. Como V é união de básicos, V é uma aberto na topologia produto em $[0,1]^\kappa$ (3.190.(a)). Se $x \in U$, então a α_x-ésima coordenada de $\beta(x)$ é $\psi_{\alpha_x}(x) = 1 \in I$. Logo, $\beta(x) \in V_x \subseteq V$, mostrando que $\beta(U) \subseteq V$. Agora suponha que $\xi \in \beta(X) \cap V$. Então, para algum $z \in X$, temos

$$\xi = \beta(z) = \langle \psi_\lambda(z) \rangle_{\lambda < \kappa} \in V.$$

Consequentemente, existe $x \in U$, tal que $\beta(z) \in V_x$, ou seja, $\psi_{\alpha_x}(z) \in I$. Mas isto significa que $\psi_{\alpha_x}(z) > 1 - \frac{1}{3}$ e portanto z não pode estar em $F = U^c$, pois ψ_{α_x} vale 0 em todo ponto de F. Logo, $z \in U$ e $V \cap \beta(X) \subseteq \beta(U)$, estabelecendo a igualdade desejada. Como já observado acima, o restante da conclusão segue da equivalência em 3.187.(b).

b) Como $[0,1]^\kappa$ é compacto e Hausdorff (3.190.(b) e (d)), todo fechado em $[0,1]^\kappa$ também é compacto. Assim, $\beta X = \overline{\beta(X)}$ é, com a topologia induzida, um espaço compacto Hausdorff, no qual a imagem de X por β é denso (por definição !).

c) Seja $f : X \longrightarrow [-M, M]$ contínua. Considere as funções

$$\begin{cases} g : [-M, M] \longrightarrow [0, 1], & g(t) = 2M\, t - M; \\ h : [0, 1] \longrightarrow [-M, M], & h(s) = \dfrac{s}{2M} + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Note que g e h são contínuas e inversas uma da outra. Assim, $g \circ f$ é uma função contínua de X em $[0, 1]$. Logo, existe $\alpha < \kappa$ tal que

$$(*) \qquad g \circ f = \psi_\alpha.$$

Seja $\pi_\alpha : [0,1]^\kappa \longrightarrow [0, 1]$ a projeção do produto na α-ésima coordenada. Sabemos de 3.190.(a) que π_α é contínua. Consideremos

$$\widetilde{f} = \pi_{\alpha_{|\beta X}} : \beta X \longrightarrow [0, 1]$$

a restrição de π_α ao subespaço βX de $[0,1]^\kappa$. Então, $\widetilde{f}$ é contínua e para todo $x \in X$ temos, lembrando (*) acima

$$\widetilde{f}(\beta(x)) = \widetilde{f}(\langle \psi_\lambda(x) \rangle_{\lambda<\kappa}) = \pi_\alpha(\langle \psi_\lambda(x) \rangle_{\lambda<\kappa}) = \psi_\alpha(x) = [g \circ f](x),$$

isto é, o diagrama à esquerda é comutativo :

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "f \circ g"'] & & \beta X \arrow[dl, "\widetilde{f}"] \\
& {[0,\, 1]} &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "f"'] & & \beta X \arrow[dl, "\widehat{f}"] \\
& {[-M,\, M]} &
\end{tikzcd}
$$

Mas então, se tomarmos a composição $\widehat{f} \;\; =_{def} \;\; h \circ \widetilde{f}$, obteremos

$$\widehat{f} \circ \beta \;\;=\;\; [h \circ \widetilde{f}] \circ \beta \;\;=\;\; h \circ [\widetilde{f} \circ \beta] \;\;=\;\; h \circ [g \circ f] \;\;=\;\; [h \circ g] \circ f \;\;=\;\; f,$$

isto é, o diagrama acima à direita é comutativo, estabelecendo a existência da extensão desejada de f. Para a unicidade e a igualdade da norma é suficiente observar que duas funções, $\widehat{f}$, $\widehat{g}$, que fazem o diagrama da direita comutar devem coincidir em $\beta(X)$. Como $\beta(X)$ é denso em βX, concluímos a unicidade de $\widehat{f}$ (3.197), bem como que $\|f\|_\infty = \|\widehat{f}\|_\infty$, encerrando a prova. $\square$

O problema inicialmente proposto está quase resolvido. Até agora mostramos que dado um espaço completamente regular X, existe um espaço compacto βX tal que

$*$ X é homeomorfo a um subespaço denso de βX;

$*$ Toda função <u>real, contínua e limitada</u> definida em X tem uma única extensão a βX, com mesma norma.

Ou seja, está faltando substituir intervalos fechados em $\mathbb{R}$ por compactos arbitrários.

Teorema 3.201 *Seja X um espaço completamente regular e $X \xrightarrow{\beta} \beta X$ o diagrama construído no Teorema* 3.199*. Se K é um espaço compacto Hausdorff e $f \in \mathbb{C}(X, K)$, então existe uma única $\beta_K f \in \mathbb{C}(\beta X, K)$ tal que $\beta_K f \circ \beta \;\; = \;\; f$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo :*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "f"'] & & \beta X \arrow[dl, "\beta_K f"] \\
& K &
\end{tikzcd}
$$

Prova. Seja $\lambda = w(K)$; sabemos de 3.191 que existe um homeomorfismo

$$\gamma : K \longrightarrow \gamma(K) \;\;\subseteq\;\; [0,1]^\lambda.$$

Seja $\gamma^{-1} : \gamma(K) \longrightarrow K$ a inversa de γ. Para cada $\alpha < \lambda$, seja

$$\pi_\alpha : [0,1]^\lambda \longrightarrow [0,\, 1]$$

a projeção (contínua) na α-ésima coordenada. Dada $f \in \mathbb{C}(X, K)$, indiquemos por f_α a composição

$$X \xrightarrow{f} K \xrightarrow{\gamma} [0,1]^\lambda \xrightarrow{\pi_\alpha} [0,\,1].$$

isto é, $f_\alpha = \pi_\alpha \circ \gamma \circ f$. Está claro que f_α é contínua (é composição de contínuas). Pelo Teorema 3.199, f_α tem extensão contínua, $\widetilde{f_\alpha} : \beta X \longrightarrow [0,\,1]$, isto é,

(I) $$\widetilde{f_\alpha} \circ \beta \;=\; \pi_\alpha \circ \gamma \circ f.$$

Definimos

$$\widetilde{f} : \beta X \longrightarrow [0,1]^\lambda, \text{ por } \;\widetilde{f}(p) \;=\; \langle\, f_\alpha(p)\,\rangle_{\alpha<\lambda}.$$

Como para todo $\alpha < \lambda$,

(II) $$\pi_\alpha \circ \widetilde{f} \;=\; \widetilde{f}_\alpha,$$

3.190.(c) implica que $\widetilde{f}$ é contínua. Agora temos

Fato 3.202 $\widetilde{f}(\beta X) \;\subseteq\; \gamma(K)$.

Prova. Primeiramente note que se $x \in X$, então

(III) $$\widetilde{f}(\beta(x)) \in \gamma(K).$$

De fato, para $\alpha < \lambda$, temos, lembrando (I) e (II) acima, obtemos

$$\pi_\alpha(\widetilde{f}(\beta(x)) \;=\; \widetilde{f}_\alpha(\beta(x)) \;=\; \pi_\alpha(\gamma(f(x))).$$

Assim, para toda coordenada $\alpha < \lambda$, as sequências $\widetilde{f}(\beta(x))$ e $\gamma(f(x))$ em $[0,1]^\lambda$ coincidem em α. Portanto, devem ser iguais (3.189), isto é,

$$\widetilde{f}(\beta(x)) \;=\; \gamma(f(x))$$

de onde (III) segue imediatamente. Acabamos de mostrar que $\widetilde{f}(\beta(X)) \subseteq \gamma(K)$, que é um fechado em $[0,1]^\lambda$ (por que é compacto). Uma vez que $\beta(X)$ é denso em βX, a condição (4) em 3.187.(a) acarreta

$$\widetilde{f}(\beta X) \;=\; \widetilde{f}(\overline{\beta(X)}) \;\subseteq\; \overline{\widetilde{f}(\beta(X))} \;\subseteq\; \overline{\gamma(K)} \;=\gamma(K),$$

como desejado.

A extensão de f do enunciado pode agora ser facilmente obtida definindo-se

$$\beta_K f \;=\; \gamma^{-1} \circ \widetilde{f}.$$

O leitor não terá dificuldades em mostrar que o diagrama do enunciado é comutativo. A unicidade é determinada, como na prova de 3.199, pela densidade de $\beta(X)$ em βX. $\square$