3.7 O dual de $L^p(\mu)$

Como iremos precisar lidar com uma variedade de espaços de medida associados a um espaço dado, introduzimos a seguinte notação :

3.90 Notação. Seja $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ um espaço de medida. Para $A \in \Sigma$ e $1 \leq p \leq \infty$, definimos

$$L^p(A, \mu) \;=\; \{f \in L^p(\mu) : f_{|A^c} \;\equiv\; 0\}.$$

Claro que $L^p(A, \mu)$ é um subespaço de $L^p(\mu)$; consideramo-lo como espaço normado com a norma induzida por $L^p(\mu)$.

Lema 3.91 *Seja $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ um espaço de medida. Para $A \in \Sigma$ e $1 \leq p \leq \infty$*

a) $\langle A, \Sigma_A, \mu_{|\Sigma_A} \rangle$ é um espaço de medida, onde $\Sigma_A = \{A \cap D : D \in \Sigma\}$.

b) $L^p(A, \mu)$ é linearmente isométrico à $L^p(\mu_{|\Sigma_A})$.

c) $L^p(A, \mu)$ é um espaço de Banach e um sub-espaço fechado de $L^p(\mu)$.

Prova. É fácil ver que Σ_A é uma σ-álgebra em A e que a restrição de μ a Σ_A é uma medida, verificando (a). Para (b), considere a função

$$\alpha : L^p(A, \mu) \longrightarrow L^p(\mu_{|\Sigma_A}), \text{ dada por } \;\alpha(f) = f_{|A}.$$

É imediato que α é linear; se $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável, seja $\gamma(h)$ a extensão de h à X por zero, isto é,

$$(\gamma) \qquad \gamma(h)(x) \;=\; \begin{cases} h(x) & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Está claro que $\gamma(h)_{|A} = h$ e portanto α é bijetora, com inversa γ. Se $f \in L^p(A, \mu)$, como $f = f\,\chi_A$, temos

$$\|\alpha(f)\|_p{}^p \;=\; \int_A \left|f_{|A}\right|^p d\mu \;=\; \int_A |f|^p\, d\mu \;=\; \int_X |f|^p\, d\mu \;=\; \|f\|_p{}^p,$$

e α é uma isometria linear, como desejado. O ítem (c) é consequência imediata de (b) e do Teorema 3.42. $\square$

Será útil registrar a seguinte consequência de 3.63 e 3.44 :

Corolário 3.92 *Seja $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ um espaço de medida e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e limitada. Para $p \in [1, \infty]$, existe uma sequência de funções simples e mensuráveis, s_n, $n \geq 1$, tal que*

(1) s_n converge uniformemente para f, com $|f - s_n| \leq |f|$, para todo $n \geq 1$;

(2) Se $f \in L^p(\mu)$, $\;s_n$ converge para f em $L^p(\mu)$.

Prova. Se f é positiva e limitada, 3.63 fornece uma sequência s_n, $n \geq 1$, que converge de forma crescente e uniforme para f, qual seja,

$$s_n \;=\; \sum_{j=1}^n \frac{\|f\|_\infty}{2^j}\, \chi_{E_j}.$$

Portanto, (1) vale para qualquer mensurável limitada e positiva. Se f é limitada, mensurável e troca de sinal, sejam t_n e z_n sequências de funções simples e mensuráveis satisfazendo (1) em relação à f^+ e f^-, respectivamente. Consideremos, $s_n = t_n - z_n$, $n \geq 1$; s_n é simples, mensurável e temos

$$|f - s_n| \;=\; |(f^+ - f^-) - (t_n - z_n)| \;\leq\; |f^+ - t_n| + |f^- - z_n| \;\leq\; f^+ + f^- \;=\; |f|,$$

de onde concluímos que s_n converge uniformemente para f e que esta convergência é dominada por $|f|$, estabelecendo (1) em geral. Se $1 \leq p < \infty$, (2) é consequência de (1) e do Teorema da convergência dominada. Para $p = \infty$, (2) segue imediatamente de (1). □

Lema 3.93 *Seja $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ um espaço de medida finita e S um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$. Seja f uma função em $L^1(\mu)$ tal que para todo $E \in \Sigma$, se $\mu(E) > 0$ então*

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \;\in\; S.$$

Então, $\mu(\{x \in X : f(x) \notin S\}) \;=\; 0.$

Prova. Se $p \notin S$, seja $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ tal que $I \cap S = \emptyset$, com $I = (p - \boldsymbol{\varepsilon}, \;\; p + \boldsymbol{\varepsilon})$. Isto é possível pois S é fechado. Considere $E = f^{-1}(I)$; se $\mu(E) > 0$, então

$$\left|\int_E (f - p\chi_E)\, d\mu\right| \;\leq\; \int_E |f - p\chi_E| \, d\mu \;<\; \int_E \boldsymbol{\varepsilon} \, d\mu \;=\; \boldsymbol{\varepsilon}\mu(E).$$

Consequentemente,

$$\left|\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \;-\; p\right| \;<\; \boldsymbol{\varepsilon},$$

o que é impossível, pois $\dfrac{1}{\mu(E)} \int_E f \; d\mu$ deve pertencer a S. Como o complemento de S é união *enumerável* de intervalos do tipo I, concluímos que $f(x) \in S$, μ-qs. □

Proposição 3.94 *Seja $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ um espaço de medida. Para $1 \leq p \leq \infty$, seja q o conjugado de p e $h \in L^q(\mu)$. Então a prescrição*

$$H(f) \;=\; \int_X hf \; d\mu, \qquad\qquad (f \in L^p(\mu))$$

define um funcional linear contínuo em $L^p(\mu)$, tal que $\|H\| \;\leq\; \|h\|_q$. Além disso,

(1) *Se $p > 1$, então $\|H\| = \|h\|_q$;*

(2) *Se $p = 1$ e $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ satisfaz a condição*

$(*)$ *Para todo $E \in \Sigma$, $\mu(E) \;=\; \infty \;\Rightarrow\; \exists\, F \subseteq E$ com $0 < \mu(F) < \infty$,*

então $\|H\| = \|h\|_\infty$.

Prova. Podemos supor que h não é nula μ-qs, senão o resultado é trivial. Está claro que H é linear. A desigualdade de Hölder em 3.39.(a) garante que

$$|H(f)| \;\leq\; \|h\|_q \, \|f\|_p,$$

e portanto H é contínuo (3.7) e $\|H\| \;\leq\; \|h\|_q$. Para mostrar que $\|H\| = \|h\|_q$, dividiremos o argumento em dois casos :

$\underline{p \neq 1}$: Então q é finito e podemos considerar

$$\varphi \;=\; sng\, h\, \frac{|h|^{q-1}}{\|h\|_q{}^{q-1}}, \qquad \text{onde} \qquad sgn\, h(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{se } h(x) \geq 0 \\ -1 & \text{se } h(x) < 0. \end{cases}$$

Note que $sgn\, h$ é mensurável, e portanto, φ é mensurável. Como $1/p \,+\, 1/q = 1$, temos

$$q - 1 \;=\; \begin{cases} \dfrac{q}{p} & \text{se } p \neq \infty \\ 0 & \text{se } p = \infty, \end{cases}$$

e assim,

$$\|\varphi\|_p \;=\; \begin{cases} \int_X |\varphi|^p \, d\mu \;=\; \int_X \dfrac{|h|^q}{\|h\|_q{}^q} \, d\mu \;=\; \dfrac{\|h\|_q{}^q}{\|h\|_q{}^q} \;=\; 1 & \text{se } p \neq \infty \\ \|sgn\ h\|_\infty \;=\; 1 & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Portanto, $\|\varphi\|_p = 1$, $p \in (1, \infty]$. Por outro lado,

$$\int_X h\varphi \, d\mu \;=\; \int_X \frac{|h|^q}{\|h\|_q{}^{q-1}} \, d\mu \;=\; \frac{\|h\|_q{}^q}{\|h\|_q{}^{q-1}} \;=\; \|h\|_q,$$

mostrando que $\|H\| = \|h\|_q$.

$\underline{p = 1 :}$ Para $\boldsymbol{\varepsilon} \geq 0$, seja

$$E \;=\; \{x \in X : |h(x)| \geq \|h\|_\infty - \boldsymbol{\varepsilon}\}.$$

Então, E é mensurável, com $\mu(E) > 0$ [33]. Por (*) existe $F \subseteq E$ tal que $0 < \mu(F) < \infty$ [34]. Seja $f \;=\; sgn\ h\, \dfrac{\chi_F}{\mu(F)}$. É fácil ver que $f \in L^1(\mu)$, com $\|f\|_1 = 1$. Além disso, temos

$$\int_X hf \, d\mu \;=\; \int_X |h| \frac{\chi_F}{\mu(F)} \;\geq\; (\|h\|_\infty - \boldsymbol{\varepsilon})$$

e $\|H\| \geq \|h\|_\infty - \boldsymbol{\varepsilon}$. Como $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ é arbitrário, $\|H\| \geq \|h\|_\infty$, encerrando a prova. □

Observação 3.95 Todo espaço de medida σ-finito verifica (*) no enunciado de 3.94. De fato, se escrevemos $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$, com $\mu(X_n) < \infty$, e E é um conjunto de medida infinita em X, então do fato que

$$E \;=\; \bigcup_{n \geq 1} E \cap X_n$$

obtemos imediatamente a validade de (*). Mas existem espaços de medida que satisfazem (*) e que *não são* σ-finitos. Um exemplo é a medida da contagem em um espaço discreto não enumerável. □

O intuíto desta seção é provar a recíproca de 3.94 : se μ é σ-finita e $1 \leq p < \infty$, o dual de $L^p(\mu)$ é linearmente isométrico à $L^q(\mu)$, onde q é o conjugado de p.

Para isto precisaremos do Teorema de Radon-Nikodym, que será provado mais tarde.

Definição 3.96 *Sejam X um conjunto e Σ uma σ-álgebra em X. Se μ, ν são medidas positivas em Σ, dizemos que ν é* **absolutamente contínua em relação à $\boldsymbol{\mu}$**, *se para todo $A \in \Sigma$,*

$$\mu(A) = 0 \;\Rightarrow\; \nu(A) = 0.$$

[33] Senão o supremo essencial de h seria menor que $\|h\|_\infty - \varepsilon$.

[34] Se $\mu(E) < \infty$, tomamos $F = E$.

Teorema 3.97 (Radon-Nikodym) *Seja* $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ *um espaço de medida* σ*-finito e* ν *uma medida em* Σ*, que é absolutamente contínua em relação a* μ*. Então existe* $g \in L^1(\mu)$*, positiva, tal que para todo* $E \in \Sigma$*,*

$$\nu(E) \;=\; \int_X g\chi_E \, d\mu \;=\; \int_E g \, d\mu.$$

Lema 3.98 *Seja* $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ *um espaço de medida finito e* $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função mesnsurável em* X*. Para* $p \in [1, \infty)$ *as seguintes condições são equivalentes :*

(1) $h \in L^q(\mu)$*, onde* q *é o conjugado de* p*;*

(2) *Existe* $M \geq 0$ *tal que se* φ *é simples e mensurável então* $\left|\int_X h\varphi \, d\mu\right| \;\leq\; M \, \|\varphi\|_p$*.*

Além disso, se vale (2)*, então* $\|h\|_q \;\leq\; M$*.*

Prova. (1) $\Rightarrow$ (2) vem de 3.94, com $M = \|h\|_q$. Para a recíproca, temos três casos :

$\underline{p = 1}$. Neste caso, devemos mostrar que h é limitada μ-qs, e assim $h \in L^\infty(\mu)$. Se $E \in \Sigma$, a condição (2) acarreta

$$\int_X h \; sgn \; h \; \chi_E \, d\mu \;=\; \int_E |h| \, d\mu \;\leq\; M \; \|sgn \, h \, \chi_E\|_1 \;=\; M \; \mu(E),$$

e portanto o Lema 3.93 garante (com $S = [0, M]$) que $|h(x)| \leq M$, μ-qs.

$\underline{p = \infty}$. Como $\|sgn \, h\|_\infty = 1$, temos

$$\int_X h \; sgn \, h \, d\mu \;=\; \int_X |h| \, d\mu \;\leq\; M \; \|sgn \, h\|_\infty \;=\; M,$$

e $h \in L^1(\mu)$.

$\underline{p \neq 1, \infty}$. Neste caso $q \neq 1, \infty$. Seja s_n um sequência de funções simples que cresce para $|h|^q$ e consideremos

$$t_n \;=\; (s_n)^{1/p} \; sgn \, h.$$

Então, t_n são simples e mensuráveis, com

(I) $$\|t_n\|_p{}^p \;=\; \int_X |t_n| \, d\mu \;=\; \int_X s_n \, d\mu.$$

Observe que

$$ht_n \;=\; h \; sgn \, h \; (s_n)^{1/p} \;=\; |h| \; (s_n)^{1/p} \;\geq\; (s_n)^{1/q} \, (s_n)^{1/p} \;=\; (s_n)^{1/p+1/q} \;=\; s_n.$$

Portanto,

(II) $$\int_X s_n \;\leq\; \int_X h \; t_n \;\leq\; M \; \|t_n\|_p.$$

Seja $\alpha = \int_X s_n \, d\mu$; de (I) e (II) vem

$$\frac{\alpha}{\alpha^{1/p}} \;=\; \frac{\alpha^{1/p+1/q}}{\alpha^{1/p}} \;=\; \alpha^{1/q} \;\leq\; M,$$

e assim, $\alpha \;=\; \int_X s_n \, d\mu \leq\; M^q$. Agora, o Lema de Fatou (ou o Teorema da convergência monótona) implica que $\int_X |h|^q \, d\mu \;\leq\; M$ e $h \in L^q(\mu)$, com $\|h\|_q \leq M$. □

Teorema 3.99 *Sejam* $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ *um espaço de medida* σ*-finita,* $1 \leq p < \infty$ *e* Λ *um funcional linear positivo e contínuo em* $L^p(\mu)$*. Então existe uma única* $g \in L^q(\mu)$ *tal que*

$$g \text{ é positiva} \quad e \quad \forall\, f \in L^p(\mu), \;\; \Lambda(f) \;=\; \int_X gf \, d\mu,$$

onde q *é o conjugado de* p*. Além disso, temos* $\|\Lambda\| \;=\; \|g\|_q$*.*

Prova. Para verificar a unicidade é suficiente mostrar que se $h \in L^q(\mu)$

$$\forall\ f \in L^p(\mu),\ \ \int_X fh\ d\mu \ = \ 0 \quad \Rightarrow \quad h = 0\ \mu\text{-qs.}$$

Mas isto vem imediatamente da Proposição 3.94 (e de 3.95, para $p = 1$), pois devemos ter $\|h\|_q = 0$ e portanto $h = 0$ μ-qs.

Parte 1 : $\boldsymbol{\mu(X) \ < \ \infty}$. Para $E \in \Sigma$, definimos

$$\nu(E) \ = \ \Lambda(\chi_E).$$

Como Λ é positivo, temos que $\nu(E) \geq 0$; e a continuidade de Λ fornece,

(I) $$\nu(E) \ = \ \Lambda(\chi_E) \ \leq \ \|\Lambda\|\ \|\chi_E\|_p \ = \ \|\Lambda\|\ \mu(E)^{1/p}.$$

Mostraremos que ν é uma medida em Σ, que por (I) é absolutamente contínua em relação a μ. Suponha que

$$E \ = \ \bigcup_{n\geq 1} E_n,$$

com $E_n \in \Sigma$ e dois a dois disjuntos. Para $n \geq 1$, seja

$$U_n \ = \ \bigcup_{j=1}^{n} E_n.$$

Então, U_n, $n \geq 1$, é uma sequência crescente de mensuráveis, tal que $E = \bigcup_{n\geq 1} U_n$. Consequentemente, χ_{U_n} converge de forma crescente para χ_E, e portanto

$$(\chi_E - \chi_{U_n})^p \longrightarrow 0, \quad \text{dominada pela função integrável } \chi_E.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, concluímos que $\|\chi_E - \chi_{U_n}\|_p \longrightarrow 0$ em $L^p(\mu)$, isto é,

$$\chi_{U_n} \longrightarrow \chi_E \text{ em } L^p(\mu).$$

Como Λ é contínuo, obtemos

(II) $$\nu(E) \ = \ \Lambda(\chi_E) \ = \ \lim_{n\to\infty} \Lambda(\chi_{U_n}) \ = \ \nu(U_n).$$

Se observamos que $\chi_{U_n} \ = \ \sum_{j=1}^{n} \chi_{E_j}$, a linearidade de Λ e (II) fornecem

$$\nu(E) \ = \ \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \Lambda(\chi_{E_n}) \ = \ \sum_{n\geq 1} \nu(E_n),$$

e ν é de fato uma medida em Σ (que sabemos, por (I), ser absolutamente contínua). Pelo Teorema 3.97, existe $g \geq 0$ em $L^1(\mu)$, tal que para todo $E \in \Sigma$,

(III) $$\nu(E) \ = \ \int_E g\ d\mu \ = \ \Lambda(\chi_E).$$

Seja $s = \sum_{j=1}^{n} a_j\ \chi_{E_j}$ uma função simples e mensurável. De (III) obtemos

$$\Lambda(s) \ = \ \sum_{j=1}^{n} a_j\ \Lambda(\chi_{E_j}) \ = \ \sum_{j=1}^{n} a_j\ \nu(E_j) \ = \ \sum_{j=1}^{n} a_j \int_X g\ \chi_{E_j}\ d\mu \ = \ \int_X gs\ d\mu.$$

Portanto, para toda função simples s,

$$\left|\int_X\ gs\ d\mu\right| \ = \ |\Lambda(s)| \ \leq \ \|\Lambda\|\ \|s\|_p,$$

e o Lema 3.98 implica que $g \in L^q(\mu)$. Se f é uma função limitada em $L^p(\mu)$, o Corolário 3.92 fornece uma sequência de funções simples tais que

$$s_n \text{ converge uniformemente para } f, \ \ |f - s_n| \leq |f| \ \text{ e } \ f = \lim_{n\to\infty} s_n \text{ em } L^p(\mu).$$

Assim, a continuidade de Λ e o Teorema da convergência dominada [35] acarretam

[35] Como $\mu(X) < \infty$ e f é limitada, $f \in L^q(\mu)$.

(IV) $\qquad \Lambda(f) \;=\; \lim_{n\to\infty} \Lambda(s_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_X g s_n \, d\mu \;=\; \int_X gf \, d\mu.$

Como $g \in L^q(\mu)$, pela Proposição 3.94, a aplicação linear

$$G(f) \;=\; \int_X gf \, d\mu$$

é um funcional linear contínuo em $L^p(\mu)$. Por (IV) e 3.44, G e Λ coincidem no subespaço denso das funções limitadas em $L^p(\mu)$. Consequentemente, $\Lambda = G$ em todo $L^p(\mu)$. Em particular, 3.94 garante que $\|\Lambda\| = \|g\|_q$, completando a prova no caso de medida finita.

Parte 2 : O caso geral. Como X é σ-finito, podemos escrever

$$X \;=\; \bigcup_{n\geq 1} X_n,$$

com $X_n \subseteq X_{n+1}$ e $\mu(X_n) < \infty$. Definimos funcionais lineares

$$\Lambda_n : L^p(X_n) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ dados por } \Lambda_n(f) \;=\; \Lambda(\gamma(f)),$$

$\gamma(f)$ é a extensão de f por zero, definida na prova de 3.91 (veja (γ) na página 78). Se $f \in L^p(X_n, \mu)$,

$$\int_{X_n} |f|^p \, d\mu \;=\; \int_X |\gamma(f)|^p \, d\mu,$$

e $\|f\|_p$ (em $L^p(X_n, \mu)$) é igual a $\|\gamma(f)\|_p$ (em $L^p(\mu)$); logo

$$|\Lambda_n(f)| \;=\; |\Lambda(\gamma(f))| \;\leq\; \|\Lambda\| \, \|\gamma(f)\|_p \;=\; \|\Lambda\| \, \|f\|_p,$$

e Λ_n é um funcional linear contínuo em $L^p(X_n, \mu)$, com $\|\Lambda_n\| \leq \|\Lambda\|$. O fato que Λ é positivo e a contrução de Λ_n garantem que este último também é positivo. Pelo Lema 3.91, podemos aplicar o resultado da Parte 1 ao espaços $L^p(X_n, \mu)$ para obter funções positivas g_n em $L^q(X_n, \mu) \subseteq L^q(\mu)$ tais que

(V) $\qquad \|g_n\|_q \;=\; \|\Lambda_n\| \;\leq\; \|\Lambda\| \quad \text{e} \quad \forall\, f \in L^p(\mu), \;\; \Lambda_n(f\chi_{X_n}) \;=\; \int_X g_n f \, d\mu.$

De fato, como $f\chi_{X_n} \in L^p(X_n, \mu)$ e g_n é nula fora de X_n,

$$\Lambda_n(f\chi_{X_n}) \;=\; \int_{X_n} g_n f \chi_{X_n} \, d\mu \;=\; \int_X g_n f \, d\mu.$$

Uma vez que $L^p(X_n, \mu) \;\subseteq\; L^p(X_{n+1}, \mu)$, se $f \in L^p(X_n, \mu)$ então

$$\int_X g_{n+1} f \, d\mu \;=\; \int_X g_{n+1}\chi_{X_n} f \, d\mu \;=\; \Lambda_{n+1}(f) \;=\; \Lambda(\gamma(f)) \;=\; \Lambda_n(f) \;=\; \int_X g_n f \, d\mu,$$

isto é, $g_{n+1}\chi_{X_n}$ representa Λ_n em $L^p(X_n, \mu)$. A unicidade garante que $g_n = g_{n+1}\chi_{X_n}$ μ-qs. Por indução em $n \geq 1$ e mudando os valores de g_n em um subconjunto de X_n de medida nula, podemos supor que a sequência g_n *é crescente*. Seja

$$g \;=\; \sup_{n\geq 1} g_n \;=\; \lim_{n\to\infty} g_n.$$

Então, g é mensurável e, uma vez que para todo $n \geq 1$ $\|g_n\|_q \leq \|\Lambda\|$ (por (V)), o Lema de Fatou implica que $\|g\|_q \leq \|\Lambda\|$. Assim, $g \in L^q(\mu)$. Para $f \in L^p(\mu)$, considere a sequência

$$f_n \;=\; f\chi_{X_n}.$$

Então, $f_n \in L^p(X_n, \mu)$, $f_n \stackrel{s}{\longrightarrow} f$ e esta convergência é dominada por $|f|$ [36]. Portanto, em $L^p(\mu)$, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$; agora, a continuidade de Λ e (V) implicam

(VI) $\qquad \Lambda(f) \;=\; \lim_{n\to\infty} \Lambda(f_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_X g_n f \, d\mu.$

Por fim, a desigualdade de Hölder (3.39.(a)) garante que $fg \in L^1(\mu)$; como $g_n f \stackrel{s}{\longrightarrow} gf$ e esta convergência é dominada por $|gf|$, o Teorema da convergência dominada e (VI) acarretam

[36] Isto é, $|f - f_n| \leq |f|$.

$$\int_X gf\, d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_X g_n f\, d\mu \;=\; \Lambda(f),$$

e g representa Λ em $L^p(\mu)$. Pela Proposição 3.94, temos $\|g\|_q \;=\; \|\Lambda\|$, encerrando a demonstração. $\square$

Para terminar de caracterizar o dual de $L^p(\mu)$ iremos provar um análogo do Teorema 3.84. O resultado que temos em mente é

Teorema 3.100 *Seja* $\langle\, X, \Sigma, \mu\,\rangle$ *um espaço de medida e* $1 \le p \le \infty$*. Se* I *é um funcional linear contínuo em* $L^p(\mu)$*, enão existem funcionais lineares positivos e contínuos em* $L^p(\mu)$*,* I^+ *e* I^-*, tal que*

$$I \;=\; I^+ - I^-.$$

Prova. O caso $p = \infty$ é consequência dos Teoremas 3.84 e 3.89. Daqui em diante, supomos que $p \neq \infty$. A demonstração é análoga à de 3.84, exceto pela continuidade, que para $\mathbb{C}(X)$ vinha de graça (veja 3.82). É importante notar que os reticulados $L^p(\mu)$ não possuem um elemento que faça o papel da função constante 1, isto é, o *máximo positivo* da bola unitária fechada.

Seja

$$\mathcal{T} = \{f \in L^p(\mu) : f \text{ é limitada e nula fora de um conjunto de medida nula}\}.$$

$\mathcal{T}$ é um subespaço denso de $L^p(\mu)$ (3.44.(b)). Consideramos $\mathcal{T}$ como espaço normado pela norma induzida por $L^p(\mu)$. Então a restrição de I a $\mathcal{T}$ é um funcional linear contínuo. Além disso a densidade de $\mathcal{T}$ em $L^p(\mu)$ garante que

$$\left\| I_{|\mathcal{T}} \right\| \;=\; \|I\|.$$

Para $f \ge 0$ em $\mathcal{T}$ definimos

$$S(f) \;=\; \sup\,\{I(\varphi) : 0 \le \varphi \le f\}.$$

Exatamente como na prova de 3.84 [37], o fato que $\mathcal{T}$ é um reticulado vetorial normado (3.79.(b).(2)), acarreta

(1) $S(0) = 0$, $\;S(f) \ge 0\;$ e $\;S(f) \ge I(f)$;

(2) Se $f, g \ge 0$ em $\mathcal{T}$ e $\lambda \ge 0$ em $\mathbb{R}$, então

$$S(f+g) \;=\; S(f) + S(g) \quad\text{e}\quad S(\lambda f) \;=\; \lambda S(f).$$

Como em $L^p(\mu)$

(3) $$0 \le \varphi \le f \;\;\Rightarrow\;\; \|\varphi\|_p \le \|f\|_p,$$

obtemos

(4) $$S(f) \;=\; \sup\,\{I(\varphi) : 0 \le \varphi \le f\} \;\le\; \sup\,\{\|I\|\,\|\varphi\|_p : 0 \le \varphi \le f\} \;\le\; \|I\|\,\|f\|_p,$$

e S é limitado na parte positiva da bola unitária de $\mathcal{T}$. O próximo passo é estender S a todo $\mathcal{T}$. O método é o mesmo que em 3.84 : se $h, k \in \mathcal{T}$ são tais que $f + h \ge 0$ e $f + k \ge 0$, então

$$S(f+h) - S(h) \;=\; S(f+k) - S(k),$$

[37] E talvez mais importante, com mesmos argumentos.

e portanto esta diferença é independente da função em $\mathcal{T}$, conquanto que a sua soma com f seja positiva. Para $f \in \mathcal{T}$ definimos

$$\mathcal{S}(f) \;=\; S(f + |f|) - S(|f|).$$

Fato 3.101 *$\mathcal{S}$ é um funcional linear positivo e contínuo em $\mathcal{T}$, tal que para toda $f \geq 0$ em $\mathcal{T}$, $I(f) \leq \mathcal{S}(f)$.*

Prova. O mesmo argumento que na prova de 3.86 mostra que $\mathcal{S}$ é linear, positivo e satisfaz $I(f) \leq \mathcal{S}(f)$ para toda $f \geq 0$ em $\mathcal{T}$. Resta mostrar que $\mathcal{S}$ é contínuo. Como

$$|f| \;= f^+ + f^- \quad \text{e} \quad \|f\|_p \;=\; \||f|\|_p,$$

temos $\|f^+\|_p, \|f^-\|_p \;\leq\; \|f\|_p$. Assim, como $\mathcal{S}$ é linear e coincide com S nas funções positivas, obtemos, lembrando (4),

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(f)| \;&=\; |\mathcal{S}(f^+) \;-\; \mathcal{S}(f^-)| \;\leq\; S(f^+) + S(f^-) \;\leq\; \|I\|\; \|f^+\|_p + \|I\|\; \|f^-\|_p \\ &\leq\; 2\; \|I\|\; \|f\|_p, \end{aligned}$$

e $\mathcal{S}$ é contínuo (3.7). Pela Proposição 3.15, $\mathcal{S}$ tem uma única extensão, I^+, a um funcional linear contínuo em $L^p(\mu)$. Resta mostrar que

$$I^+ \text{ é positivo} \quad \text{e} \quad f \geq 0 \text{ em } L^p(\mu) \;\Rightarrow\; I(f) \leq I^+(f).$$

Se $f \geq 0$ em $L^p(\mu)$, a prova da Proposição 3.44 mostra que existe uma sequência de funções positivas em $\mathcal{T}$, f_n, tal que em $L^p(\mu)$, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Assim,

$*$ Como $\mathcal{S}$ é positivo, obtemos

$$I^+(f) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(f_n) \;\geq\; 0,$$

e I^+ é um funcional linear contínuo e positivo em $L^p(\mu)$;

$*$ Como I é contínuo e $I(h) \leq \mathcal{S}(h)$ para $h \geq 0$ em $\mathcal{T}$ (3.101), segue que

$$I(f) \;=\; \lim_{n\to\infty} I(f_n) \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(f_n) \;=\; I^+(f),$$

como necessário. Para terminar a prova, definimos $I^- = I^+ - I$. Então, I^- é um funcional linear positivo e contínuo em $L^p(\mu)$, verificando as condições desejadas. □

Estamos em condições de provar o

Teorema 3.102 *Seja $\langle\, X, \Sigma, \mu \,\rangle$ um espaço de medida σ-finito e $p \in [1, \infty)$. Se I é um funcional linear contínuo em $L^p(\mu)$ então existe uma única $g \in L^q(\mu)$ tal que*

$$\|I\| \;=\; \|g\|_q \quad e \quad \forall\, f \in L^p(\mu), \;\; I(f) \;=\; \int_X fg \; d\mu.$$

Prova. Pelo Teorema 3.100 podemos escrever $I = I^+ - I^-$, com I^+ e I^- funcionais lineares positivos e contínuos em $L^p(\mu)$. O Teorema 3.99 fornece funções positivas g^+, g^- em $L^q(\mu)$ tais que se $f \in L^p(\mu)$

$$I^+(f) \;=\; \int_X fg^+ \; d\mu \quad \text{e} \quad I^-(f) \;=\; \int_X fg^- \; d\mu.$$

Então, $g = (g^+ - g^-) \in L^q(\mu)$, com $I(f) \;=\; \int_X fg \; d\mu$, $\forall\, f \in L^p(\mu)$. Agora, a Proposição 3.94 garante que $\|I\| = \|g\|_q$. □