Capítulo 3

Introdução aos Espaços de Banach

A definição de espaço normado aparece em 2.13. Iremos utilizar as notações introduzidas na seção 2.2, em particular as de 2.15. Além disso, sabemos de 2.14 que um espaço normado, $\langle E, \| \, \| \rangle$, é um espaço métrico, com a métrica dada por

$$d(x, y) \;=\; \|x - y\|, \qquad (x, y \in E)$$

3.1 Espaços de Banach

Definição 3.1 *Um* **espaço de Banach** *é um espaço normado que é completo na métrica originária de sua norma.*

Exemplo 3.2 Os seguintes são exemplos de espaços de Banach :

(1) $\langle \mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p \rangle$, $1 \leq p \leq \infty$;

(2) $\ell_\infty(\omega)$ (2.19, 2.94);

(3) $c_0(\mathbb{N})$, o espaço das sequências de reais que convergem para 0, com a norma induzida por $\ell_\infty(\omega)$ (2.94);

(4) Se Z é um espaço compacto, $\mathbb{C}(Z)$, o espaço das funções reais contínuas em Z, com a norma

$$\|f\| \;=\; \sup_{z \in Z} |f(z)|.$$

Mais exemplos importantes surgirão no que segue. □

Exercício 3.3 *Seja X um espaço topológico Hausdorff. Lembramos que $\mathbb{C}(X)$ indica o espaço vetorial das funções reais contínuas de domínio X. Se $f \in \mathbb{C}(X)$, o* **suporte de f** *é dado por* [1]

$$\text{supp } f \;=\; \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Definimos

[1] Lembre-se que $\overline{A}$ indica o *fecho* de A.

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_0(X) &= \{f \in \mathbb{C}(X) : \forall\, \varepsilon > 0, \textit{ existe } K \textit{ compacto, tal que } |f(x)| \le \varepsilon \textit{ se } x \in X - K\}; \\ \mathbb{C}_c(X) &= \{f \in \mathbb{C}(X) : \operatorname{supp} f \textit{ é compacto em } X\}. \end{aligned}$$

$\mathbb{C}_0(X)$ é o **espaço das funções contínuas que são zero no infinito**, *enquanto que $\mathbb{C}_c(X)$ é o* **espaço das funções contínuas de suporte compacto** *em X.*

a) $\mathbb{C}_0(X)$ e $\mathbb{C}_c(X)$ são espaços vetoriais reais, com $\mathbb{C}_c(X) \subseteq \mathbb{C}_0(X)$. Se X é compacto, então $\mathbb{C}_c(X) = \mathbb{C}_0(X) = \mathbb{C}(X)$.

b) Para $f \in \mathbb{C}_0(X)$, defina

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Então, $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma em $\mathbb{C}_0(X)$, com a qual este espaço é de Banach.

c) $\mathbb{C}_c(X)$ é denso em $\mathbb{C}_0(X)$.

d) Se $X = \mathbb{N}$ com a métrica discreta, isto é, $d(n,m) = \begin{cases} 1 & \textit{se } n \neq m \\ 0 & \textit{se } m = n, \end{cases}$, descreva os espaços $\mathbb{C}_c(\mathbb{N})$ e $\mathbb{C}_0(\mathbb{N})$.

Exercício 3.4 *Se $\langle E, \|\cdot\| \rangle$ um espaço normado e tanto $E \times E$ quanto $\mathbb{R} \times E$ têm a métrica produto, isto é,*

$$\begin{cases} d(\langle x,y \rangle, \langle x',y' \rangle) = \|x - x'\| + \|y - y'\| \\ d(\langle \lambda,x \rangle, \langle \lambda',x' \rangle) = |\lambda - \lambda'| + \|x - x'\|, \end{cases}$$

respectivamente [2], então

a) A soma é contínua, isto é, $\langle x,y \rangle \in E \times E \longmapsto x + y \in E$ é contínua.

b) A multiplicação por escalar é contínua, isto é, $\langle \lambda, x \rangle \in \mathbb{R} \times E \longmapsto \lambda x \in E$ é contínua.

c) A norma, $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, é contínua.

Definição 3.5 *Seja X um espaço normado e x_n, $n \ge 1$, uma sequência em X.*

a) $\langle x_n \rangle$ é **somável em X** *se a sequência de somas finitas $\sum_{j=1}^n x_j$ converge em X.*

b) $\langle x_n \rangle$ é **absolutamente somável** *se a sequência $\|x_n\|$ é somável em $\mathbb{R}$, isto é, se a série $\sum_{n \ge 1} \|x_n\|$ é convergente em $\mathbb{R}$.*

Proposição 3.6 *Um espaço normado X é de Banach sse toda sequência absolutamente somável é somável em X.*

Prova. Suponha que X é de Banach e que $\langle x_n \rangle$ é uma sequência absolutamente somável de elementos de X. Dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 para todo $n \ge n_0$

$$\sum_{n \ge n_0} \|x_n\| \le \varepsilon.$$

Portanto, se $m \ge n \ge n_0$,

$$\left\| \sum_{j=1}^m x_j - \sum_{j=1}^n x_j \right\| = \left\| \sum_{j=n+1}^m x_j \right\| \le \sum_{j=n+1}^m \|x_j\| \le \sum_{j \ge n_0} \|x_j\| \le \varepsilon,$$

[2] Mas poderia ser *max* no lugar de soma ou o análogo da norma p, $1 \le p < \infty$.

mostrando que a sequência $\{\sum_{j=1}^{n} x_j : n \geq 1\}$ é e Cauchy em X. Consequentemente, é convergente em X e $\langle x_n \rangle$ é somável em X.

Reciprocamente, suponha que toda sequência absolutamente somável é somável e que z_n, $n \geq 1$, é uma sequência e Cauchy em X. para cada $k \geq 1$, existe $n_k \geq 1$ tal que para todo $n, m \geq n_k$,

$$\text{(I)} \qquad \|z_n - z_m\| \;\leq\; \frac{1}{2^k}.$$

Podemos supor que n_k, $k \geq 1$, é estritamente crescente. Considere a sequência $\{y_k : k \geq 1\}$ onde

$$y_k \;=\; \begin{cases} z_{n_1} & \text{se } k = 1 \\ z_{n_k} - z_{n_{k-1}} & \text{se } k \geq 2. \end{cases}$$

Note que

$$\text{(II)} \qquad \sum_{k=1}^{m} y_k \;=\; z_{n_1} + \sum_{k=2}^{m} z_{n_k} - z_{n_{k-1}} \;=\; z_{n_k}.$$

Por outro lado, segue de (I) que

$$\begin{aligned} \|\sum_{k=1}^{m} y_k\| &= \left\|z_{n_1} + \sum_{k=2}^{m} z_{n_k} - z_{n_{k-1}}\right\| \;\leq\; \|z_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{m} \left\|z_{n_k} - z_{n_{k-1}}\right\| \\ &\leq \|z_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^{k-1}}, \end{aligned}$$

donde concluímos que $\langle y_k \rangle$ é absolutamente somável. Logo, $\langle y_k \rangle$ é somável, que tendo em vista (II), significa que a subsequência z_{n_k} é convergente. Mas então, como z_n é de Cauchy, o ítem (d) em 2.77 implica que z_n é convergente e X é completo. $\square$

O resultado a seguir fornece uma caracterização importante de aplicações *lineares contínuas* entre espaços normados. Será útil também para fornecer outros exemplos de espaços de Banach.

Teorema 3.7 *Seja $T : X \longrightarrow Y$ uma aplicação linear, onde X e Y são espaços normados. As seguintes condições são equivalentes :*

(1) *T é contínua em algum ponto de X;*

(2) *T é contínua no ponto 0;*

(3) *T é contínua;*

(4) $\sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} < \infty$;

(5) $\sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} < \infty$;

(6) *Existe $M \geq 0$ tal que para todo $x \in X$, $\|Tx\| \leq M\,\|x\|$;*

(7) *T é uniformemente contínua.*

Prova. <u>(1) ⇒ (2) :</u> Se T é contínua em z e $x_n \longrightarrow 0$, então $z + x_n \longrightarrow z$ (continuidade da soma, 3.4). Logo, a continuidade de T em z garante que

$$T(z) + T(x_n) \;=\; T(z + x_n) \longrightarrow T(z),$$

e portanto $T(x_n) \longrightarrow 0$, mostrando que T é contínua em $0 \in X$.

<u>(2) ⇒ (3) :</u> Como T é contínua em 0, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$,

$$\|x\| \leq \varepsilon \;\Rightarrow\; \|Tx\| \leq 1.$$

Se $\|y\| \leq 1$ em X, então $\|\varepsilon y\| \leq \varepsilon$ e portanto

$$\|T(\varepsilon y)\| \;=\; \|\varepsilon T(y)\| \;=\; \varepsilon\,\|Ty\| \leq 1.$$

Logo, $\|Ty\| \leq 1/\varepsilon$ e temos $\sup\{\|Ty\| : \|y\| \leq 1\} \leq 1/\varepsilon < \infty$.

Está claro que (4) $\Rightarrow$ (5). Para (5) $\Rightarrow$ (6), seja $M = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$; o mesmo raciocínio que em (2) $\Rightarrow$ (3) mostra que $\|Tx\| \leq M\,\|x\|$, $\forall\, x \in X$. Finalmente, (6) $\Rightarrow$ (7) é imediato. $\square$

Exercício 3.8 *Se $T : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação linear entre espaços normados, então*

$$\sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \;=\; \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} \;=\; \sup\{\|Tx\| : \|x\| < 1\}.$$

Teorema 3.9 *Um espaço normado de dimensão finita n é linearmente homeomorfo a $\langle\,\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1\,\rangle$.*

Prova. Seja $\langle\, X, \|\|\,\rangle$ um espaço normado de dimensão n e $f_1, \ldots, f_n$ uma base para X. Podemos supor que $\|f_j\| = 1$, $1 \leq j \leq n$, pois a sequência $\left\{\dfrac{f_j}{\|f_j\|} \;:\; 1 \leq j \leq n\right\}$ também é uma base para X, constituída de vetores de norma 1.

Definimos $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ por

$$Ta \;=\; \textstyle\sum_{j=1}^n a_j f_j,$$

onde $a = \langle\, a_1, \ldots, a_n\,\rangle$. A desigualdade triangular em X fornece

$$\|Ta\| \;=\; \left\|\textstyle\sum_{j=1}^n a_j f_j\right\| \;\leq\; \textstyle\sum_{j=1}^n |a_j|\|f_j\| \;=\; \textstyle\sum_{j=1}^n |a_j| \;=\; \|a\|_1,$$

e portanto $\|T\| \leq 1$. Pelo Teorema 3.7, T é contínua; além disso, por construção, T é *bijetora*.

Seja $B = \{a \in \mathbb{R}^n : \|a\|_1 < 1\}$ e $S = \{a \in \mathbb{R}^n : \|a\|_1 = 1\}$. Como S é compacto em $\mathbb{R}^n$ (é fechado e limitado) e T é contínua, temos que TS é compacto em X e portanto fechado em X (X é Hausdorff). Note que $0 \notin TS$, pois $T(0) = 0$, $0 \notin S$ e T é injetora. Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(0) \;\cap\; TS \;=\; \emptyset,$$

onde $B_\varepsilon(0) \;=\; \{y \in X : \|y\| < \varepsilon\}$. Mostraremos que $B_\varepsilon(0) \;\subseteq\; TB$. Se não, existiria $z \in B_\varepsilon(0)$ tal que $z \notin TB \cup TS$. Como T é sobrejetora, existe $b \in \mathbb{R}^n$, $\|b\|_1 > 1$, tal que $Tb = z$. Considere $a = \dfrac{b}{\|b\|_1}$; então, $a \in S$ e temos

$$\|Ta\| \;=\; \frac{\|Tb\|}{\|b\|_1} \;=\; \frac{\|z\|}{\|b\|_1} \;<\varepsilon$$

pois $1/\|b\|_1 < 1$. Mas então, $Ta \in B_\varepsilon(0) \cap TS$, o que é impossível.

Como $B_\varepsilon(0) \;\subseteq\; TB$, a inversa T^{-1} de T leva $B_\varepsilon(0)$ dentro de B. Mas então a linearidade de T^{-1} acarreta

$$T^{-1}(B_1(0)) \;=\; T^{-1}(1/\varepsilon\;\; B_\varepsilon(0)) \;\subseteq\; \frac{1}{\varepsilon}\,B,$$

mostrando que $\|T^{-1}\| \leq 1/\varepsilon$. Por 3.7, T^{-1} é contínua e T é um homeomorfismo linear, como desejado. $\square$

Corolário 3.10 *Se X é um espaço normado de dimensão finita, então*

(1) *X é localmente compacto;*

(2) *Para todo $r > 0$ e $p \in X$, $\overline{B}_r(p) = \{q \in X : \|p - q\| \leq r\}$ é compacto.*

(3) *Todo fechado e limitado em X é compacto;*

(4) *X é um espaço de Banach;*

(5) *Toda aplicação linear de X em um espaço normado é contínua.*

Prova. (1) segue do Teorema 3.9 e do fato que $\langle \mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1 \rangle$ é localmente compacto. Os ítens (2) e (3) são consequência de (1) e do fato que homotetias e translações são contínuas. O ítem (4) vem de (2) e da Proposição 2.90. Para (5), seja $T : \langle \mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1 \rangle \longrightarrow Y$ uma aplicação linear, onde Y é um espaço normado. Seja

$$e_j \;=\; \langle 0, \ldots, \underset{j}{1}, 0, \ldots, 0 \rangle \qquad (1 \leq j \leq n)$$

a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Se $f_j = Te_j$, $1 \leq j \leq n$, então $\sup_{1 \leq j \leq n} \|f_j\| = M < \infty$. Portanto,

$$\|Ta\| \;=\; \left\|T(\textstyle\sum_{j=1}^n \; a_j e_j)\right\| \;\leq\; \textstyle\sum_{j=1}^n |a_j| \; \|Te_j\| \;\leq\; M \textstyle\sum_{j=1}^n |a_j| \;=\; M \, \|a\|_1,$$

e T é contínua pelo Teorema 3.7. É agora fácil concluir, a partir do Teorema 3.9, que toda aplicação linear de um espaço normado de dimensão finita em Y é contínua. □

Exercício 3.11 *Um espaço normado localmente compacto tem dimensão finita.* [3]

Definição 3.12 *Se X, Y são espaços normados, indicamos por $\mathcal{B}(X, Y)$ o conjunto das aplicações lineares* **contínuas** *de X em Y. Para $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, definimos*

$$\|T\| \;=\; \sup \, \{\|Tx\| : \|x\| = 1\},$$

denominada a **norma de T**.

Exercício 3.13 *Com a notação de* 3.12, *$\langle \mathcal{B}(X, Y), \|\cdot\| \rangle$ é um espaço vetorial real normado.*

Teorema 3.14 *Se Y é um espaço de Banach, o mesmo é verdade para $\mathcal{B}(X, Y)$, para todo espaço normado X.*

Prova. Por 3.13, $\mathcal{B}(X, Y)$ é um espaço normado. Seja T_n, $n \geq 1$, uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}(X, Y)$, isto é, para todo

(I) $$\forall \, \boldsymbol{\varepsilon} > 0, \, \exists \, n_0 \geq 1, \, \forall \, n, \, m \geq n_0, \quad \|T_n - T_m\| \leq \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Segue de (I) que para cada $x \in X$, a sequência $T_n x$, $n \geq 1$, é de Cauchy em Y, pois

$$\|T_n x - T_m x\| \;=\; \|(T_n - T_m)x\| \;\leq\; \|T_n - T_m\| \|x\|.$$

Uma vez que Y é completo, existe $Tx \in Y$, tal que $T_n x \longrightarrow Tx$. Então

<u>$*$ $x \mapsto Tx$ é linear :</u> Da continuidade da soma e da multiplicação por escalar em Y (3.4) obtemos

[3] Com 3.10.(1), X é localmente compacto *sse* $dim \, X < \infty$.

$$
\begin{aligned}
T(x+x') &= \lim_{n\to\infty} T_n(x+x') = \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(x') \\
&= T(x)+T(x') \\
T(\lambda x) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \lambda\, T_n(x) \\
&= \lambda T(x),
\end{aligned}
$$

como necessário.

$*$ <u>T é contínua :</u> Como T_n, $n \geq 1$, é de Cauchy, deve ser limitada, isto é, $\sup_{n\geq 1} \|T_n\| = M < \infty$. Assim, se $x \in X$, a continuidade da norma em Y (3.4) juntamente com o fato de que

$$\|T_n x\| \leq \|T_n\|\|x\| \leq M\,\|x\|,$$

nos fornece

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq M\,\|x\|,$$

e T é contínua pelo Teorema 3.7.

Resta mostrar que $T_n \longrightarrow T$ em $\mathcal{B}(X, Y)$, isto é, que $\|T - T_n\| \longrightarrow 0$. Seja $x \in X$, com $\|x\| = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, de (I) vem que para todo n, $m \geq n_0$ temos

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| = \|T_n - T_m\| \leq \varepsilon.$$

Uma vez que $T_n x \longrightarrow Tx$, a continuidade da norma e a desiqualdade acima implicam que

$$\forall\ m \geq n_0,\quad \|Tx - T_m x\| \leq \varepsilon.$$

Como o raciocínio acima independe do ponto x (com $\|x\| = 1$), concluímos que

$$\forall\ m \geq n_0,\quad \|T - T_m\| \leq \varepsilon,$$

isto é, $T_n \longrightarrow T$ em $\mathcal{B}(X, Y)$, completando a prova. $\square$

Proposição 3.15 *Sejam X e Y espaços normados, com Y de Banach. Seja H um subespaço* denso *de X e $S \in \mathcal{B}(H, Y)$. Então existe uma* única *$T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que $T_{|H} = S$ e $\|T\| = \|S\|$.*

Prova. Como H é denso em X, para cada $x \in X$ existe uma sequência h_n, $n \geq 1$, em H tal que $h_n \longrightarrow x$. Como $\langle\, h_n \,\rangle$ é convergente, é também de Cauchy (2.77.(a)). Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que para todo n, $m \geq n_0$, $\|h_n - h_m\| \leq \varepsilon$. Considere a sequência $S(h_n)$, $n \geq 1$, em Y. Então, para n, $m \geq n_0$,

$$\|S(h_n) - S(h_m)\| = \|S(h_n - h_m)\| \leq \|S\|\,\|h_n - h_m\| \leq \varepsilon\|S\|,$$

e portanto $\langle\, S(h_n) \,\rangle$ é de Cauchy em Y. Como Y é de Banach, existe $Tx \in Y$, tal que $\lim_{n\to\infty} S(h_n) = Tx$. Suponha que k_n, $n \geq 1$, é uma sequência em H, tal que $k_n \longrightarrow x$. Dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $\|h_n - k_n\| \leq \varepsilon$. De fato, como h_n, k_n convergem para x, existem n_1, $n_2 \geq 1$ tais que para $n \geq n_1$, n_2

$$\|x - h_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \|x - k_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, se $n_0 = \max\,\{n_1, n_2\}$ e $n \geq n_0$, teremos

$$\|h_n - k_n\| \leq \|h_n - x\| + \|x - k_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Mas então, para $n \geq n_0$, obtemos

$$\|S(h_n) - S(k_n)\| = \|S(h_n - k_n)\| \leq \|S\|\,\|h_n - k_n\| \leq \varepsilon\,\|S\|,$$

e portanto $S(k_n) \longrightarrow Tx$. Acabamos de mostrar que Tx independende da sequência em H que converge para x. Com isto está definida uma função

$$T : X \longrightarrow Y.$$

Em particular, para $h \in H$, temos $Th = Sh$, pois a sequência constante de valor h certamente converge para h. Assim, T é uma extensão de S à X. Como soma e multiplicação por escalar são contínuas e o valor Tx independende da sequência em H que converge para x, é fácil ver que T é linear.

Dado $x \in X$, seja h_n, $n \geq 1$, tal que $h_n \longrightarrow x$. Então, $S(h_n) \longrightarrow Tx$ e a continuidade da norma nos fornece $\|h_n\| \longrightarrow \|x\|$ e $\|S(h_n)\| \longrightarrow \|Tx\|$. Assim,

$$\|Tx\| \;=\; \lim_{n\to\infty} \|S(h_n)\| \;\leq\; \|S\| \lim_{n\to\infty} \|h_n\| \;=\; \|S\|\,\|x\|,$$

e T é contínua (por 3.7), com $\|T\| \leq \|S\|$. Dado que T é extensão de S, concluímos que $\|T\| = \|S\|$. A unicidade é consequência imediata do fato que funções contínuas com valores num espaço Hausdorff, que coincidem num denso, são iguais. □

Observação 3.16 A Proposição 3.15 é um caso particular (porque ?) do sequinte

Teorema 3.17 *Sejam X, Y espaços métricos, com Y completo. Seja H um subconjunto denso de X e $S : H \longrightarrow Y$ uma função uniformemente contínua. Então S tem uma única extensão a uma função uniformemente contínua de X em Y.*

O leitor está convidado a construir uma prova para 3.17. □

Para finalizar esta seção iremos apresentar dois resultados fundamentais : o Princípio da Limitação Uniforme e o Teorema de Banach-Steinhaus. Inicialmente, lembremos que um espaço topológico X é **de Baire** se satisfizer a condição

[Baire] Se U_n, $n \geq 1$, é uma sequência de abertos densos em X, então $\bigcap_{n\geq 1} U_n$ é denso em X.

Pelo Teorema 2.95 e o Corolário 2.96, os métricos completos, os localmente compactos e os compactos são espaços de Baire. Em particular, todo espaço de Banach é de Baire. A seguinte observação fornece uma condição equivalente a [Baire] que é frequentemente útil :

Lema 3.18 *Um espaço X é de Baire sse satisfizer a seguinte condição :*

[fBaire] Se F_n, $n \geq 1$, é uma sequência de fechados tal que $X = \bigcup_{n\geq 1} F_n$, então existe $n \geq 1$ e um aberto $U \neq \emptyset$, tal que $U \subseteq F_n$.

isto é, $X = \bigcup_{n\geq 1} F_n \;\Rightarrow\; \operatorname{int} F_n \neq \emptyset$, *para algum* $n \geq 1$.

Prova. Suponha que X é de Baire e que $X = \bigcup_{n\geq 1} F_n$. Se todos F_n têm interior vazio, então $U_n = F_n^c$ são abertos densos em X. Como X é de Baire, $\bigcap_{n\geq 1} U_n$ é densa em X; em particular, esta interseção é não vazia, o que é absurdo, pois X é a união dos complementos dos U_n. A recíproca é deixada como exercício para o leitor. □

Teorema 3.19 (Princípio da Limitação Uniforme) *Seja X um espaço de Baire e $\mathcal{F}$ uma família de funções reais contínuas em X, tal que para todo $x \in X$, existe $K_x \in \mathbb{R}_+$ tal que*

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} |f(x)| \;\le K_x.$$

Então, existe um aberto não vazio U em X e um real $K \ge 0$ tal que

$$\textit{Para todo } x \in U, \quad \sup_{f\in\mathcal{F}} |f(x)| \;\le K.$$

Prova. Para $n \ge 1$ e $f \in \mathcal{F}$, seja

$$F_{nf} \;=\; \{x \in X : |f(x)| \le n\}.$$

Como cada $f \in \mathcal{F}$ é contínua, F_{nf} é fechado em X. Defina $F_n = \bigcap_{f\in\mathcal{F}} F_{nf}$; então F_n é fechado em X (é uma interseção de fechados) e temos

$$X \;=\; \bigcup_{n\ge1} F_n.$$

De fato, dado $x \in X$, podemos escolher $n \ge 1$ tal que $K_x \le n$. Mas então $x \in F_{nf}$, $f \in \mathcal{F}$, isto é, $x \in F_n$. Pelo Lema 3.18, existe um aberto $U \ne \emptyset$ e $n \ge 1$ tal que $U \subseteq F_n$. Está claro que U satisfaz as condições estabelecidas na conclusão (com $K = n$). $\square$

Teorema 3.20 (Banach-Steinhaus) *Sejam X, Y espaços normados, com Y de Banach.*

a) Seja $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}(X,Y)$ uma família de transformações lineares tal que

$$\forall\ x \in X, \quad \sup_{T\in\mathcal{L}} \|Tx\| < \infty.$$

Então existe $M \ge 0$ tal que $\sup_{T\in\mathcal{L}} \|T\| \;\le\; M$.

b) Seja T_n, $n \ge 1$, uma sequência em $\mathcal{B}(X,Y)$ tal que para cada $x \in X$, $T_n x$ é convergente em Y. Então, existe $M \ge 0$ tal que

(1) *Para todo $n \ge 1$,* $\|T_n\| \;\le\; M$;

(2) *A prescrição* $Tx \;=\; \lim_{n\to\infty} T_n x$ *define um elemento de $\mathcal{B}(X,Y)$, com $\|T\| \le M$.*

Prova. a) Para $T \in \mathcal{L}$, considere a função $f_T(x) = \|Tx\|$; como a norma é contínua, f_T é uma função real contínua, $T \in \mathcal{L}$. Como X é de Banach, a coleção $\mathcal{F} = \{f_T : T \in \mathcal{L}\}$ satisfaz as hipóteses de 3.19. Assim, existe $K \ge 0$ e uma bola aberta, $B_r(p)$, tal que

$$\text{Para todo } y \in B_r(p), \quad \sup_{T\in\mathcal{L}} \|Ty\| \;\le\; K,$$

Se $x \in B = \{y \in X : \|y\| < 1\}$, então $p + rx \in B_r(p)$. Logo, para $T \in \mathcal{L}$,

$$r\|Tx\| \;=\; \|T(rx)\| \;=\; \|T(p+rx) \;-\; T(p)\| \;\le\; \|T(p+rx)\| + \|Tp\| \;\le 2K.$$

Assim, para todo $T \in \mathcal{L}$ e $x \in B$

$$\|Tx\| \;\le\; \frac{2K}{r},$$

e o Teorema 3.7 implica que $\|T\| \le \dfrac{2K}{r} = M$, como desejado.

b) Como para todo $x \in X$, $T_n x$ é convergente em Y, temos que

$$\text{Para todo } x \in X, \quad \sup_{n\ge1} \|T_n x\| \;<\; \infty.$$

Pelo ítem (a), existe $M \ge 0$ tal que $\|T_n\| \le M$, $n \ge 1$. É fácil ver que $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ define uma função linear de X em Y. Resta provar que T é contínua. Se $x \in X$, então

$$\|Tx\| \;=\; \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \;\le\; (\sup_{n\ge1} \|T_n\|)\, \|x\| \;\le\; M\|x\|,$$

e portanto $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, com $\|T\| \le M$, completando a prova. $\square$

3.2 Funcionais Lineares. O Teorema de Hahn-Banach

Definição 3.21 *Se V é um espaço vetorial real, um* **funcional ou forma linear em $\boldsymbol{V}$** *é uma aplicação linear de V em $\mathbb{R}$. Seja V^* o espaço vetorial dos funcionais lineares em V.*

Exercício 3.22 *Se V é um espaço vetorial real com $\dim V = n$, então $\dim V^* = n$. Dada uma base $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ de V, construa uma base de V^*, $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$, canonicamente associada à base de V.*

Definição 3.23 *Seja X um espaço normado. Definimos*

$$X' \;=\; \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$$

denominado o **espaço dos funcionais lineares contínuos em $\boldsymbol{X}$** [4]. *O nome usual dado a X' é* **dual de $\boldsymbol{X}$**. *O espaço $X'' = (X')'$ denomina-se* **bidual de $\boldsymbol{X}$**.

Corolário 3.24 *Para todo espaço normado X, X' é um espaço de Banach.*

Prova. Segue imediatamente do Teorema 3.14. □

Exercício 3.25 *Se X é um espaço normado tal que todo funcional linear em X é contínuo, então $\dim X < \infty$.*

Exercício 3.26 *Seja X um espaço vetorial. Para $h \in V^*$ definimos*

$$ker\, h \;=\; \{x \in X : h(x) = 0\} \;=\; h^{-1}(0)$$

denominado o **kernel ou núcleo de $\boldsymbol{h}$**.

a) $ker\, h$ é um sub-espaço de X.

b) Se $x \notin ker\, h$, então o subespaço gerado por x e $ker\, h$ é X. [5]

c) Um sub-espaço H de X é um **hiperplano** *se para todo $x \in X - H$, o subespaço gerado por x e H é igual a X. Mostre que existe uma correspondência natural e biunívoca entre X^* e o conjunto dos hiperplanos em X.*

d) Suponha que X seja normado. Então, $h \in X'$ sse $ker\, h$ é fechado em X.

e) Se X é normado, existe uma correspondência natural e biunívoca entre X' e o conjunto dos hiperplanos fechados *em X.*

Proposição 3.27 *Para todo $n \geq 1$ e $1 \leq p \leq \infty$*

$$\langle\, \mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p \,\rangle' \;=\; \langle\, \mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q \,\rangle,$$

onde p e q são **conjugados**, *isto é, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \;=\; 1$.*

[4] Não confunda X^* com X'; veja o Exercício 3.25.

[5] Ou seja, a *codimensão* de $ker\, h = 1$.

Prova. Fixamos n e p entre 1 e ∞. Faremos a prova para $p \in (1, \infty)$ deixando o par conjugado $\langle 1, \infty \rangle$ para o leitor. Para facilitar a notação, indicaremos $\langle \mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p \rangle$ por $\mathbb{R}^n_p$.

Se $a = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathbb{R}^n$, seja

$$\widehat{a} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } \widehat{a}(b) = \textstyle\sum_{j=1}^n a_j b_j.$$

É fácil verificar que

$*$ $\widehat{a}$ é um funcional linear em $\mathbb{R}^n$;

$*$ A função $a \mapsto \widehat{a}$ é injetora [6] e linear, isto é,

$$\widehat{a+b} = \widehat{a} + \widehat{b} \quad \text{e} \quad \widehat{\lambda a} = \lambda \widehat{a},$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

A desiqualdade de Hölder (Teorema 2.11) mostra que

$$|\widehat{a}(b)| = \left|\textstyle\sum_{j=1}^n a_j b_j\right| \leq \textstyle\sum_{j=1}^n |a_j| \, |b_j| \leq \|a\|_q \, \|b\|_p,$$

e portanto, como funcional linear em $\mathbb{R}^n_p$, $\widehat{a}$ é contínuo (já sabíamos disto, 3.10), tal que $\|\widehat{a}\| \leq \|a\|_q$. Verificaremos que

$$\text{(I)} \qquad \|\widehat{a}\| = \|a\|_q.$$

Se $x \in R$, definimos $sgn\, x = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$ Portanto, $x sgn\, x = |x|$.

Para $a \in \mathbb{R}^n$, considere $b = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$, onde

$$\text{(II)} \qquad b_j = \frac{|a_j|^{q-1}}{\|a\|_q{}^{q-1}} \, sgn\, a_j.$$

Como $1/p + 1/q = 1$, temos $q - 1 = q/p$; assim, para $1 \leq j \leq n$,

$$\text{(III)} \qquad |b_j| = \frac{|a_j|^{q/p}}{\|a\|_q{}^{q/p}}.$$

Segue imediatamente de (III) que

$$\|b\|_p{}^p = \textstyle\sum_{j=1}^n |b_j|^p = \textstyle\sum_{j=1}^n \left(\dfrac{|a_j|^{q/p}}{\|a\|_q{}^{q/p}}\right)^p = \textstyle\sum_{j=1}^n \dfrac{|a_j|^q}{\|a\|_q{}^q} = 1$$

e portanto $\|b\|_p = 1$. Por outro lado, usando (II), temos

$$\widehat{a}(b) = \textstyle\sum_{j=1}^n a_j b_j = \textstyle\sum_{j=1}^n a_j sgn\, a_j \dfrac{|a_j|^{q-1}}{\|a\|_q{}^{q-1}} = \textstyle\sum_{j=1}^n \dfrac{|a_j|^q}{\|a\|_q{}^{q-1}} = \dfrac{\|a\|_q{}^q}{\|a\|_q{}^{q-1}} = \|a\|_q,$$

completando a prova de (I). Considere a aplicação

$$T : \mathbb{R}^n_q \longrightarrow (\mathbb{R}^n_p)', \text{ dada por } Ta = \widehat{a}.$$

Então, T é linear, injetora, contínua e satisfaz $\|Ta\| = \|\widehat{a}\| = \|a\|_q$, para todo $a \in \mathbb{R}^n_q$. Para completar a prova, é suficiente mostrar que T é sobrejetora. No caso concreto em que estamos, isto é consequência imediata do fato que a $dim\, (\mathbb{R}^n_p)' = n$ (3.22). Apresentaremos outro argumento, que é útil para lidar com objetos de dimensão infinita.

[6] Pois $\widehat{a}(e_j) = a_j$, $1 \leq j \leq n$, onde e_j é a base canônica de $\mathbb{R}^n$ (como na prova de 3.10).

Seja $f : \mathbb{R}^n_p \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear e considere, para $1 \leq j \leq n$

$$a_j = f(e_j),$$

onde $e_j = \langle\, 0, \ldots, \underset{j}{1}, \ldots, 0 \,\rangle$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Para $c = \sum_{j=1}^n c_j e_j$, temos

$$\text{(IV)} \qquad f(c) \;=\; \sum_{j=1}^n c_j f(e_j) \;=\; \sum_{j=1}^n c_j a_j \;=\; \widehat{a}(c),$$

isto é, $f = \widehat{a} = Ta$, onde $a = \langle\, a_1, \ldots, a_n \,\rangle$. A desigualdade de Hölder (2.11) aplicada a (IV) garante que $\|f\| \leq \|a\|_q$. Por outro lado, para o vetor b dado por (II), o mesmo cálculo efetuado acima mostra que

$$f(b) \;=\; \widehat{a}(b) \;=\; \|a\|_q,$$

e como $\|b\|_p = 1$, concluímos que $\|a\|_q \leq \|f\|$. Assim, $\|f\| = \|a\|_q$ e a aplicação T identifica (é uma isometria entre) $\mathbb{R}^n_q$ e o dual de $\mathbb{R}^n_p$. □

Exercício 3.28 *Seja $\ell_1(\omega)$ o conjunto de todas as sequências absolutamente somáveis de reais. Está claro que com a soma e a multiplicação por escalar usuais, $\ell_1(\omega)$ é um espaço vetorial real. Para $x = \langle\, x_n \,\rangle \in \ell_1(\omega)$ definimos*

$$\|x\|_1 \;=\; \sum_{n\geq 1} |x_j|.$$

a) $\|\cdot\|_1$ é uma norma em $\ell_1(\omega)$, com a qual é um espaço de Banach.

b) Em $\ell_1(\omega)$ e c_0, as sequências quasi-nulas [7] são sub-espaços vetoriais densos.

c) $c_0{}' \;=\; \ell_1(\omega)$ e $\ell_1(\omega)' \;=\; \ell_\infty(\omega)$.

Exercício 3.29 *Para $1 \leq p < \infty$ seja*

$$\ell_p(\omega) \;=\; \{x = \langle\, x_n \,\rangle \in \mathbb{R}^\omega : \sum_{n\geq 1} |x_n|^p < \infty\}.$$

Para $x \in \ell_p(\omega)$, definimos

$$\|x\|_p \;=\; \left(\sum_{n\geq 1} |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

a) Com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar real, $\ell_p(\omega)$ é um espaço vetorial real.

b) As desigualdades de Hölder (2.11) *e Minkowski* (2.12) *valem para os espaços $\ell_p(\omega)$.*

c) $\|\cdot\|_p$ é uma norma em $\ell_p(\omega)$, com a qual é um espaço de Banach.

d) Para $1 \leq p < \infty$,

$$\ell_p(\omega)' \;=\; \ell_q(\omega),$$

onde p e q são conjugados, isto é, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Um dos resultados mais importantes da Análise Funcional Clássica é o seguinte

Teorema 3.30 (Hahn-Banach) *Seja X um espaço normado, V um sub-espaço de X e $f \in V'$. Então existe $F \in X'$ tal que $F_{|V} = f$ e $\|f\| = \|F\|$.* [8]

[7] Isto é, nulas, exceto em um número finito de coordenadas.

[8] Isto é, F é uma extensão contínua de f, de mesma norma.

Antes da prova, lembraremos alguns fatos sobre ordens parciais e o Lema de Zorn.

3.31 Ordens Parciais e o Lema de Zorn. Seja V um conjunto. Uma relação binária em V, $\leq$, é uma **ordem parcial** se satisfizer, para todo x, y, $z \in V$

[po 1] : $x \leq x$;

[po 2] : $x \leq y$ e $y \leq x \quad \Rightarrow \quad x \; y$;

[po 3] : $x \leq y$ e $y \leq z \quad \Rightarrow \quad x \leq z$.

O exemplo arquetípico de ordem parcial é o conjunto das partes de um conjunto com a relação de inclusão : $\langle 2^X, \subseteq \rangle$.

Uma ordem parcial $\leq$ em V é **linear, total ou uma cadeia** se para todo x, $y \in V$

[total] : $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Se $\langle V, \leq \rangle$ é um conjunto parcialmente ordenado, $C \subseteq V$ e $a \in V$:

$*$ C é uma **cadeia em V** se for linearmente ordenado na ordem induzida por V, isto é, se para todo a, $b \in C$, $a \leq b$ ou $b \leq a$;

$*$ a é **limitante superior de C** se $\forall\, c \in C$, $c \leq a$; [9]

$*$ a é **maximal** em V se para todo $x \in V$, $a \leq x \quad \Rightarrow \quad a = x$.

Um enunciado muito importante é o seguinte

3.32 Lema de Zorn *Se $\langle V, \leq \rangle$ é um conjunto parcialmente ordenado e não vazio, em que toda cadeia tem limitante superior, então V tem pelo menos um elemento maximal.*

O Lema de Zorn deve ser tratado como um (possível) *Axioma*, pois não pode ser demonstrado a partir dos Axiomas "elementares" da Teoria dos Conjuntos. Na realidade, é equivalente ao Axioma da Escolha e ao Axioma da Boa Ordem, entre outros. *A melhor (única ?) maneira de entender seu conteúdo é vê-lo em ação.* $\square$

Agora para a prova do Teorema 3.30. O primeiro passo é o

Lema 3.33 *Sejam X um espaço normado, E um subespaço de X e $f \in E'$. Se $u \in X$, seja G o subespaço de X gerado por E e u. Então existe $g \in G'$ tal que $g_{|E} = f$ e $\|g\| = \|f\|$.*

Prova. Podemos supor que $u \notin E$, senão nada há a provar. Temos

$$G \;=\; \{e + \lambda u : \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } e \in E\}.$$

Como $g_{|E} = f$, uma extensão de f a G é univocamente determinada por seu valor em u. Digamos que este valor seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$g(e + \lambda u) \;=\; f(e) + \lambda g(u) \;=\; f(e) + \alpha.$$

Logo, extensões são fáceis de construir; a questão é *controlar* $\|g\|$, isto é, escolher $\alpha = g(u)$ tal que $\|g\| \leq \|f\|$ [10].

[9] Advinha o que é ser *limitante inferior, supremo, ínfimo*, etc.

[10] A outra desigualdade é imediata, pois g é extensão de f.

Fato 3.34 $\|g\| \leq \|f\|$ *sse* α *satisfaz* $\forall\, e \in E, \;\; |f(e) - \alpha| \;\leq\; \|f\|\,\|e - u\|$.

Prova. Suponha que $\|g\| \leq \|f\|$; então para todo $e \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left| g\left(\frac{e + \lambda u}{\|e + \lambda u\|}\right)\right| \;=\; \frac{|g(e + \lambda u)|}{\|e + \lambda u\|} \;\leq\; \|f\|,$$

isto é, para todo $e \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

(I) $$|g(e + \lambda u)| \;=\; |f(e) + \lambda\alpha| \;\leq\; \|f\|\,\|e + \lambda u\|.$$

Se fizermos $\lambda = -1$ em (I), obtemos $|f(e) - \alpha| \leq \|f\|\,\|e - u\|$, como desejado.

Recíprocamente, suponha a condição satisfeita; se $\lambda = 0$, então $g(e) = f(e) \leq \|f\|\,\|e\|$, como necessário. Se $\lambda \neq 0$, então

$$e + \lambda u \;=\; -\lambda(\frac{-e}{\lambda} - u)$$

e assim, como $-\frac{e}{\lambda} \in E$, temos

$$\begin{aligned} |g(e + \lambda u)| \;&=\; \left|g(-\lambda(\frac{-e}{\lambda} \;-\; u))\right| \;=\; |\lambda|\, \left|g(\frac{-e}{\lambda} \;-\; u)\right| \;\leq\; |\lambda|\,\|f\|\,\left\|\frac{-e}{\lambda} \;-\; u\right\| \\ &=\; \|f\|\,\|e + \lambda u\|, \end{aligned}$$

mostrando que $\|g\| \leq \|f\|$ e completando a prova do Fato.

O Fato 3.34 nos garante que o nosso problema tem solução sse para todo $e \in E$, α satisfaz a seguinte condição

(II) $$f(e) - \|f\|\,\|e - u\| \;\leq\; \alpha \;\leq\; f(e) + \|f\|\,\|e - u\|.$$

Para que isto se verifique é necessário e suficiente que para todo e, e' em E,

(III) $$f(e) - \|f\|\,\|e - u\| \;\leq\; f(e') + \|f\|\,\|e' - u\|,$$

isto é, que a extremidade esquerda do intervalo determinado por $e \in E$ em (II), esteja à esquerda da extremidade direita do intervalo determinado por e' em (II). Mas temos

$$f(e) \;-\; f(e') \;=\; f(e - e') \;\leq\; \|f\|\,\|e - e'\| \;\leq\; \|f\|\,(\|e - u\| + \|e' - u\|)$$

de onde (III) segue imediatamente. Assim, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que se definimos $g(e + \lambda u) = f(e) + \lambda\alpha$, a extensão assim obtida verifica $\|g\| = \|f\|$, como desejado. $\square$

Prova do Teorema 3.30. Seja

$$V \;=\; \{\langle\, G, g \,\rangle : G \text{ é sub-espaço de } X,\; E \subseteq G,\; g \in G',\; \text{com } g_{|E} = f \text{ e } \|g\| = \|f\|\}.$$

Para $\langle\, G, g \,\rangle$, $\langle\, H, h \,\rangle$ em V definimos

$$\langle\, G, g \,\rangle \;\leq\; \langle\, H, h \,\rangle \quad \text{sse} \quad G \subseteq H \;\text{ e }\; h_{|G} = g.$$

Temos $V \neq \emptyset$ ($\langle\, E, f \,\rangle \in V$) e que $\leq$ é uma ordem parcial em V. Se $C = \{\langle\, G_i, g_i \,\rangle : i \in I\}$ é uma cadeia em V, seja

$$H \;=\; \bigcup_{i \in I} G_i.$$

Então H é um subespaço de X; de fato, se x, $y \in H$, $\exists\, i$, $j \in I$, tais que $x \in G_i$ e $y \in G_j$. Como C é uma cadeia, ou $G_i \subseteq G_j$, ou $G_j \subseteq G_i$. No primeiro caso, $x + y \in G_j \subseteq H$; no segundo, $x + y \in G_i \subseteq H$. Assim, H é fechado por soma. Está claro que H é fechado por multiplicação por escalares. Uma vez que H é um sub-espaço de X, o Princípio da Colagem de Compatíveis (1.10) fornece uma *única* $h : H \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h_{|G_i} = g_i$, para todo $i \in I$. É imediato que h é linear. Se $x \in H$, seja $i \in I$ tal que $x \in G_i$. Então,

$$|h(x)| \;=\; |g_i(x)| \;\leq\; \|g_i\| \, \|x\| \;=\; \|f\| \, \|x\|,$$

e portanto $\|h\| \leq \|f\|$. Como h é extensão de f (pois cada g_i é), obtemos $\|h\| = \|f\|$, mostrando que $\langle H, h \rangle$ está em V e é um limitante superior de C.

Pelo Lema de Zorn (3.32), V tem um elemento maximal, $\langle L, F \rangle$. O Lema 3.33 implica que $L = X$. De fato; se existisse $u \in X - L$, seja G o sub-espaço gerado por L e u. Então, L está propriamente contido em G. Por outro lado, 3.33 fornece $g \in G'$, estendendo F e satisfazendo $\|g\| = \|F\| = \|f\|$. Mas então, $\langle G, g \rangle$ seria um elemento de V estritamente maior que $\langle L, F \rangle$, contrariando sua maximalidade. Portanto, $L = X$ e F é a extensão de f a X, verificando $\|F\| = \|f\|$. □

Corolário 3.35 *Seja X um espaço normado.*

a) Seja H um subespaço fechado de X, $x \notin H$ e $\alpha = \inf_{h \in H} \|x - h\|$. Então, existe $f \in X'$ tal que $f_{|H} \equiv 0$, $\|f\| \leq \dfrac{1}{\alpha}$ e $f(x) = 1$.

b) Um sub-espaço fechado de X é a interseção dos hiperplanos fechados que o contém. [11]

c) Se $x \neq 0$ em X, então existe $f \in X'$ tal que $\|f\| = 1$ e $f(x) = \|x\|$.

Prova. a) Como H é fechado e $x \notin H$, temos que $\alpha > 0$ (2.86.(c)). Seja G o sub-espaço gerado por H e x, isto é,

$$G \;=\; \{h + \lambda x : h \in H \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Definimos $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(h + \lambda x) \;=\lambda.$$

Então, $g(x) = 1$ e $g_{|H} \equiv 0$. Resta mostrar que $\|g\| \leq 1/\alpha$. Para $h \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, lembrando que H é um sub-espaço temos

$$\|h + \lambda x\| \;=\; |\lambda| \left\| x + \frac{h}{\lambda} \right\| \;=\; |\lambda| \left\| x - \frac{-h}{\lambda} \right\| \;\geq\; |\lambda| \, \alpha \;=\; |g(h + \lambda x)| \, \alpha,$$

donde concluímos que $\|g\| \leq 1/\alpha$, como desejado [12]. Pelo Teorema 3.30, g tem uma extensão $f \in X'$, com $\|f\| = \|g\|$. Logo, $f_{|H} \equiv 0$ e $f(x) = 1$.

b) A prova é consequência de (a) e do Exercício 3.26; é deixada a cargo do leitor.

c) Dado $x \neq 0$ em X, seja $H = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}$ (um sub-espaço de X) e $h : H \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(\lambda x) = \lambda \|x\|$. Então, $\|h\| = 1$ e $h(x) = \|x\|$. Pelo Teorema 3.30, h tem uma extensão $f \in X'$ tal que $\|f\| = \|h\| = 1$. □

Exercício 3.36 *Para cada $x = \langle x_n \rangle \in \ell_1(\omega)$ e $y = \langle y_n \rangle \in \ell_\infty(\omega)$, definimos*

$$\widehat{x}(y) \;=\; \textstyle\sum_{n \geq 1} x_j y_j.$$

a) $\widehat{x} \in \ell_\infty(\omega)'$ e $\|\widehat{x}\| = \|x\|_1$.

[11] A definição de hiperplano aparece em 3.26.

[12] Na realidade, $\|g\| = 1/\alpha$; basta tomar uma sequência h_n em H tal que $\|x - h_n\| \longrightarrow \alpha$ e aplicar o mesmo método de cálculo.

b) A aplicação $x \in \ell_1(\omega) \longmapsto \widehat{x} \in \ell_\infty(\omega)'$ *é linear, continua, injetora e tem norma* 1 *(É uma isometria).*

c) Para $x \in \ell_1(\omega)$, $\widehat{x}_{|c_0} \equiv 0 \;\Rightarrow\; x = 0$.

d) Mostre que existe $f \in \ell_\infty(\omega)'$ *tal que* $f \neq \widehat{x}$, *para todo* $x \in \ell_1(\omega)$. (Seja e a sequência constante iqual a 1 em $\ell_\infty(\omega)$. Então, $\|e\|_\infty = 1$ e $e \notin c_0$. Mas c_0 é um sub-espaço fechado de $\ell_\infty(\omega)$...).

e) Mostre que* $\ell_\infty(\omega)'$ *não é separável.*[13]

3.3 Os espaços $L^p(\mu)$

Lembramos que

* R^* é a reta real extendida por dois pontos $\{-\infty, \infty\}$ de tal modo que para todo real "standard" a

$$-\infty < a < \infty.$$

* Se $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ é uma espaço de medida, uma propriedade vale μ-qs (μ-quasi sempre) se o conjunto dos pontos A onde é falsa satisfaz $\mu(A) = 0$.

* Se p, $q \in [1, \infty]$, dizemos que p e q são **conjugados** se $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Em particular, 1 e ∞ são conjugados.

Seja $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ um espaço de medida. Para $1 \leq p \leq \infty$ definimos

$$\mathcal{L}^p(\mu) \;=\; \begin{cases} \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}^* : \int_X |f|^p \, d\mu \;<\; \infty\} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}^* : |f| \text{ é limitada } \mu\text{-qs}\} & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Lema 3.37 *Com as operações usuais de soma de multiplicação por escalar,* $\mathcal{L}^p(\mu)$ *é um espaço vetorial real.*

Prova. Se $p = \infty$ o resultado é claro. Se $p \in [1, \infty)$, note que se f, $g \in \mathcal{L}^p$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então, para $x \in X$

* $|f(x) + g(x)|^p \;\leq\; (|f(x)| + |g(x)|)^p \;\leq\; 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$; [14]

* $|\lambda f(x)|^p \;=\; |\lambda|^p\,|f(x)|^p$.

Segue imediatamente destas observações e do fato que integração é crescente que $\mathcal{L}^p(\mu)$ é fechado por soma e produto por escalar. $\square$

Para $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, definimos

$$\|f\|_p \;=\; \begin{cases} \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}\, f & \text{se } p = \infty, \end{cases}$$

onde para $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$

[13] E portanto não pode ser $\ell_1(\omega)$, que é separável.

[14] t^p é convexa por 2.6.(b).

$$\|f\|_\infty \;=\; \text{ess sup } f \;=\; \inf\,\{M \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq M\}) = 0\},$$

denominado o **sup essencial de f**.

Exercício 3.38 *Mostre que se $f,\, g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\|\lambda f\|_\infty \;=\; |\lambda|\; \|f\|_\infty \quad e \quad \|f+g\|_\infty \;\leq\; \|f\|_\infty \;+ \|g\|_\infty.$$

Com a mesma prova que nos Teoremas 2.11 e 2.12 temos

Teorema 3.39 *Seja $\langle\, X, \Sigma, \mu\,\rangle$ um espaço de medida.*
a) (Hölder) *Se $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ e $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, com p e q conjugados, então $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ e*

$$\|fg\|_1 \;\leq\; \|f\|_p\; \|g\|_q.$$

b) (Minkowski) *Se $f,\, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, então*

$$\|(f+g)\|_p \;\leq\; \|f\|_p \;+\; \|g\|_p.$$

Segue do Teorema 3.39 que nos espaços $\mathcal{L}^p(\mu)$ a função $\|\cdot\|_p$ verifica as condições

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda|\; \|f\|_p \quad \text{e} \quad \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Por outro lado, o que é falso é a implicação

$$\|f\|_p = 0 \;\;\Rightarrow\;\; f = 0,$$

pois, na realidade, $\|f\|_p = 0$ acarreta somente $f = 0$ μ-qs. A relação

$$f \;\theta\; g \quad \text{sse} \quad f = g \;\mu\text{-qs}$$

é uma relação de equivalência, tal que

$*$ $f \in \mathcal{L}^p$ sse $q \in \mathcal{L}^p$;

$*$ Se $f,\, g \in \mathcal{L}^p$, então $\|f\|_p = \|g\|_p$ sse $|f|\;\theta\;|g|$.

Para podermos trabalhar com *espaços normados* é portanto necessário passar $\mathcal{L}^p(\mu)$ ao quociente pela relação θ. O resultado desta operação são os espaços $L^p(\mu)$, isto é,

$$L^p(\mu) \;=\; \mathcal{L}^p/\theta.$$

Resumindo a ópera, temos

Lema 3.40 *Seja $\langle\, X, \Sigma, \mu\,\rangle$ um espaço de medida. Para $p \in [1,\, \infty]$, seja $L^p(\mu)$ o quociente de $\mathcal{L}^p(\mu)$ pela relação de equivalência que identifica funções que são iguais μ-qs. Então*

a) $L^p(\mu)$ é um espaço vetorial real, normado pela função

$$\|f/\theta\|_p \;=\; \|f\|_p.$$

b) Se $f/\theta \in L^p(\mu)$ e $g/\theta \in L^q(\mu)$, onde p e q são conjugados, então

$$(f/\theta)(g/\theta) = fg/\theta \in L^1(\mu) \quad e \quad \|fg/\theta\|_1 \;\leq\; \|f/\theta\|_p\; \|g/\theta\|_q.$$

Prova. Exercício. □

Muito embora $L^p(\mu)$ consista de *classes de equivalência* de funções em $\mathcal{L}^p$, iremos, como aliás todo mundo faz, *trata-las como se fossem funções de X em R^**. Assim, nunca mais o leitor encontrará a notação f/θ; mas frequentemente a expressão "$f \in L^p(\mu)$", onde f é uma função de X em $\mathbb{R}^*$.

Observação 3.41 Considere o espaço de medida $\langle \mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu \rangle$, onde μ é a medida da contagem em $\mathbb{N}$. Observe que para $p \in [1, \infty]$,

$$\mathcal{L}^p(\mu) \;=\; L^p(\mu) \;=\; \ell_p(\omega),$$

exatamente os espaços introduzidos no Exercício 3.29. A relação de equivalência que constroi $L^p(\mu)$ a partir de $\mathcal{L}^p(\mu)$ é, neste caso, a identidade, porque o único subconjunto de $\mathbb{N}$ de μ-medida nula é o vazio. Em particular, tudo que for provado para os espaços $L^p(\mu)$ em geral, vale também para os $\ell_p(\omega)$. $\square$

Teorema 3.42 (Riesz-Fisher) *Se $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ é um espaço de medida e $p \in [1, \infty]$, então $L^p(\mu)$ é um espaço de Banach.*

Prova. Deixamos o caso de $p = \infty$ para o leitor e trataremos do caso em que $p < \infty$. Pela Proposição 3.6, é suficiente mostrar que toda sequência absolutamente somável em $L^p(\mu)$ é somável. Seja então f_n, $n \geq 1$, uma sequência em $L^p(\mu)$, tal que $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_p = M < \infty$.

Definimos $h_n = \sum_{j=1}^n |f_j|$, $n \geq 1$. A sequência h_n é positiva e crescente e portanto converge para $h : X \longrightarrow \mathbb{R}^*$. Vamos mostrar que $h \in L^p(\mu)$. Temos,

$$\|h_n\|_p \;=\; \|\textstyle\sum_{j=1}^n |f_j|\|_p \;\leq\; \sum_{j=1}^n \||f_j|\|_p \;=\; \sum_{j=1}^n \|f_j\|_p \;\leq\; M,$$

e portanto, $\int_X h_n^p \, d\mu \leq M^p$. Como $h_n \longrightarrow h$, o Lema de Fatou acarreta que

$$\int_X h^p \;\leq\; M^p,$$

e $h \in L^p(\mu)$. Em particular, se $A = \{x \in X : h(x) = \infty\}$, então $\mu(A) = 0$. Para $x \in A^c$ (o complemento de A), a série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ é absolutamente convergente e portanto convergente. Definimos

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } \quad f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A \\ \sum_{n\geq 1} f_n(x) & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Então f é mensurável. Além disso, como $|f| \leq h$ e $h \in L^p(\mu)$, está claro que $f \in L^p(\mu)$. Mostraremos que, em $L^p(\mu)$

$$\|f \;-\; \textstyle\sum_{j=1}^n f_j\|_p \longrightarrow 0,$$

e assim, f é a soma, em $L^p(\mu)$ da série $\sum_{n\geq 1} f_n$. Primeiro observe que

$$\textstyle\sum_{j=1}^n f_j \text{ converge simplesmente para } f(x) \text{ em } A^c.$$

Como $\mu(A) = 0$, $f - \sum_{j=1}^n f_j$ converge a zero μ-qs e portanto

$$\text{(I)} \qquad \left| f \;-\; \textstyle\sum_{j=1}^n f_j \right|^p \text{ converge a } 0 \ \mu\text{-qs.}$$

Agora note que

$$\left| \textstyle\sum_{j=1}^n f_j \right| \;\leq\; \sum_{j=1}^n |f_j| \;\leq\; h.$$

Uma vez que $|f| \leq h$, temos

$$\text{(II)} \qquad \left| f \;-\; \textstyle\sum_{j=1}^n f_j \right|^p \;\leq\; (|f| \;+\; \sum_{j=1}^n |f_j|)^p \;\leq\; (2h)^p \;=\; 2^p h^p.$$

Agora, (I), (II), o fato que $2^p h^p$ é integrável e o Teorema da convergência dominada de Lebesque garantem que

$$\int_X \left|f \; - \; \sum_{j=1}^n \; f_j\right|^p \;\; \longrightarrow \;\; 0,$$

e $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ em $L^p(\mu)$, como desejado. $\square$

Exercício 3.43 *Se $f_n \longrightarrow f$ em $L^p(\mu)$, então existe uma sub-sequência f_{n_k} de f_n tal que f_{n_k} converge simplesmente μ-qs para f.*

Proposição 3.44 *Se $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ é um espaço de medida e $p \in [1, \infty]$, então os seguintes conjuntos [15] são densos em $L^p(\mu)$:*

(1) *As funções limitadas;*[16]

(2) *As funções limitadas, nulas fora de um conjunto de medida finita;*

(3) *As funções simples, nulas fora de um conjunto de medida finita.*

Prova. a) Para $f \in L^p(\mu)$ e $n \geq 1$ definimos

$$f_n(x) \;\; = \;\; \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \leq n \\ 0 & \text{se } |f(x)| > n. \end{cases}$$

Está claro que cada f_n é limitada; além disso,

$$|f_n| \;\; \leq \;\; |f| \;\; \text{e} \;\; f_n \overset{s}{\longrightarrow} f.$$

Logo, $f_n \in L^p(\mu)$, $n \geq 1$, e para todo $n \geq 1$

$$|f - f_n|^p \longrightarrow 0 \;\; \text{e} \;\; |f - f_n|^p \;\; \leq \;\; |f|^p.$$

O Teorema da convergência dominada de Lebesque então acarreta

$$\int_X |f - f_n|^p \, d\mu \;\; \longrightarrow \;\; 0$$

isto é, $\|f - f_n\|_p \longrightarrow 0$ em $L^p(\mu)$, como desejado.

b) Por (a), é suficiente mostrar que se $f \in L^p(\mu)$ é limitada, então existe uma sequência de funções limitadas, nulas fora de um conjunto de medida finita, que converge para f.

Primeiro assuma que $f \geq 0$. Para $n \geq 0$, definimos

$$\begin{cases} E_0 \;\; = \;\; \{x \in X : f(x) = 0\}; \\ E_1 \;\; = \;\; \{x \in X : 1 < f(x)\}; \\ E_n \;\; = \;\; \{x \in X : f(x) \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right]\} \qquad \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Note que os E_n são mensuráveis, dois a dois disjuntos e como $\int_X f^p \, d\mu < \infty$, temos que

(I) Para todo $n \geq 1$, $\mu(E_n) < \infty$ e $X \;\; = \;\; \bigcup_{n\geq 0} E_n$.

Para $n \geq 1$, seja $g_n \;\; = \;\; \chi_{E_n} f_n$, onde χ_{E_n} é a função característica de E_n [17]. Então,

[15] Na realidade, sub-espaços.

[16] Evidentemente, aquelas que estão em $L^p(\mu)$.

[17] $\chi_{E_n}(x) = 1$ sse $x \in E_n$.

(II) $$\sum_{n\geq 1} g_n \ = \ f.$$

De fato, dado $x \in X$, por (I), existe um único $n \geq 0$, tal que $x \in E_n$. Se $n = 0$, então todas as g_n são nulas em x e portanto $\sum_{n\geq 1} g_n(x) = 0 = f(x)$. Se $n \geq 1$, observe que só g_n é distinta de zero em x, com valor igual a $f(x)$.

Seja $s_n = \sum_{j=1}^{n} g_j$; note que s_n é nula fora da união $\bigcup_{j=1}^{n} E_j$, que certamente tem medida finita (por (I)). Como (II) implica que $s_n \longrightarrow f$, de forma crescente, temos que

$$(f \ - \ s_n)^p \longrightarrow 0 \text{ em } X, \text{ com } (f \ - \ s_n)^p \ \leq \ f^p.$$

Portanto, o Teorema da convergência dominada de Lebesque garante que $\|f - s_n\|_p \longrightarrow 0$, completando a prova de (b) para funções positivas.

Para o caso geral, sabemos que dado $\varepsilon \geq 0$, existem g, h limitadas, positivas e nulas fora de um conjunto de medida finita, tais que

$$\|f^+ - \ g\|_p \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ e } \ \|f^- - \ h\|_p \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mas então $g - h$ é limitada, nula fora de um conjunto de medida finita e temos

$$\begin{aligned}\|f \ - \ (g - h)\|_p \ &= \ \|(f^+ - f^-) \ - \ (g - h)\|_p \ = \ \|(f^+ - g) \ + \ (h - f^-)\|_p \\ &\leq \ \|f^+ - g\|_p + \|h - f^-\|_p \ \leq \ \varepsilon,\end{aligned}$$

encerrando a prova de (b).

c) É suficiente mostrar que todo elemento limitado de $L^p(\mu)$, nulo fora de um conjunto de medida finita, pode ser aproximado por funções simples, nulas fora de um conjunto de medida finita. Deixamos para o leitor, como exercício [18], a prova do seguinte

Lema 3.45 *Seja $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ um espaço de medida tal que $\mu(X) < \infty$. Se f é uma função mensurável tal que $\sup_{x\in X} |f(x)| \leq M$, então existe uma sequência t_n, $n \geq 1$, de funções simples e mensuráveis tal que t_n converge* uniformemente *para f e $\sup_{x\in X} |t_n(x)| \leq M$, $\forall\, n \geq 1$.*

O ítem (c) segue de (b), do Lema 3.45 e do fato que se $\mu(X)$ é finita, convergência uniforme implica convergência na norma p, para todo $p \in [1, \infty]$. □

3.4 Mensurabilidade e Continuidade. Medidas de Borel Regulares

A finalidade desta seção é mostrar que se X é um espaço localmente compacto, Σ é uma σ-álgebra em X que contém os Borelianos e μ é uma medida *quasi-regular* em Σ (Definição 3.50.(b)) então

$*$ O espaço $\mathbb{C}_c(X)$ é denso em todo $L^p(\mu)$ (3.62);

$*$ Toda função real mensurável definida em X e nula fora de um conjunto de medida finita é "muito parecida" com uma função contínua de suporte compacto (Teorema de Lusin, 3.68).

Em particular, isto se aplica à medida de Lebesque em $\mathbb{R}^n$.

[18] Teorema 10.30, p. 239 do livro texto [Rudin]; ou o Exercício 3.66, abaixo.

Inicialmente, observamos o seguinte [19]

Lema 3.46 *Seja* $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ *um espaço de medida tal que*

$*$ *X é um espaço topológico Haudorff;*

$*$ *Σ é uma σ-álgebra em X, que contém os Borelianos;*

$*$ *Se K é compacto em X, então $\mu(K) < \infty$.*

Então, $\mathbb{C}_c(X) \subseteq L^p(\mu), \quad 1 \leq p \leq \infty.$

Prova. Está claro que toda função contínua é mensurável, pois Σ contém os Borelianos. Além disso, como todo elemento de $\mathbb{C}_c(X)$ é limitado, temos $\mathbb{C}_c(X) \subseteq L^\infty(\mu)$ (na realidade, temos mesmo $\mathbb{C}_0(X) \subseteq L^\infty(\mu)$). Se $p \in [1, \infty)$ e $f \in \mathbb{C}_c(X)$, devemos verificar que $|f|^p$ é integrável em X. Como f é limitada em X e $\mu(supp\ f)$ é finito

$$\int_X |f|^p \, d\mu \quad \leq \quad \mu(supp\ f)\ \|f\|_\infty \quad < \quad \infty,$$

como necessário. Note a importância da hipótese que compactos têm medida finita. □

Todos os resultados e provas, com uma única exceção, valem para *espaços topológicos Hausdorff localmente compactos*. A exceção é a prova, não o enunciado, da Proposição 3.47, conhecido como Lema de Urysohn. Assim, os enunciados estão, em geral, escritos para este tipo de espaço. Quem não sabe o que é "topológico" é só substituir por "métrico". **Em tudo que segue "espaço topológico" é sinônimo de "espaço Hausdorff".**

A definição de **suporte**, $supp\, f$, de uma função $f \in \mathbb{C}(X)$ aparece em 3.3.

Proposição 3.47 (Urysohn) *Seja X um espaço (métrico) localmente compacto. Se K é compacto e U é aberto em X, com $K \subseteq V$, então existe $f : X \longrightarrow [0, 1]$, contínua, tal que*

(1) $f_{|K} \equiv 1$; *(2) $supp\, f$ é compacto e está contido V.*

Em particular, $f_{|V^c} \equiv 0$.

Prova. Como X é localmente compacto, para cada $x \in K$, existe um aberto W_x contendo x, tal que $\overline{W_x}$ é compacto e está contido em V. A compacidade de K garante que existem $x_1, \ldots, x_n$ em K tal que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_n} =_{def} W.$$

Claro que W é aberto; já que $\overline{W} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{W_{x_n}}$, temos que $\overline{W}$ é um compacto, contido em V. Seja $F = W^c$; então F é fechado e disjunto de K (que também é fechado, pois X é Hausdorff). Para $A \subseteq X$, seja

$$\rho_A : X \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por } \rho_A(x) = \inf_{a \in A} d(x, a),$$

onde d é a métrica de X. Então :

$*$ ρ_A é contínua; $*$ A é fechado em X $\Rightarrow$ $\rho_A(x) = 0$ sse $x \in A$.

Seja $f : X \longrightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \frac{\rho_K(x)}{\rho_F(x) + \rho_K(x)}$$

[19] Os espaços $\mathbb{C}_c(X)$ e $\mathbb{C}_0(X)$ são definidos em 3.3.

Como $K \cap F = \emptyset$, f está bem definida (o denominador nunca é nulo). Além disso, $f_{|F} \equiv 0$ e $f_{|K} \equiv 1$. Assim, $\{x \in X : f(x) \neq 0\} \subseteq W$ e portanto

$$supp\, f \;=\; \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} \;\subseteq\; \overline{W} \;\subseteq\; V,$$

e o suporte de f é um compacto [20] contido em V, encerrando a prova. □

Observação 3.48 A Proposição 3.47 vale para espaços *topológicos* localmente compactos; o enunciado e a conclusão são as mesmas. O caso geral tem status de "Teorema" (embora seja conhecido como Lema de Urysohn); a dificuldade é produzir a função f, *sem a métrica.*

Como mencionado no início da seção, tudo que discutiremos a seguir vale para espaços Hausdorff localmente compactos, subsituindo-se o uso de 3.47 pela sua generalização. □

Teorema 3.49 (Partição da Unidade) *Seja X um espaço localmente compacto, K um compacto em X e $V_1, \dots, V_n$ abertos em X tal que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n V_j$. Então, existem funções contínuas de X em $[0,1]$ tais que*

(1) $\forall\, 1 \leq j \leq n$, *$supp\ g_j$ é um compacto contido em V_j;*

(2) $\forall\, x \in K$, $\sum_{j=1}^n g_j(x) \;=\; 1$.

Prova. Dado $x \in K \cap V_j$, existe um aberto W_x tal que $x \in W_x \subseteq \overline{W_x} \subseteq V_j$, com $\overline{W_x}$ compacto. Como K é compacto, existem $x_1, \dots, x_m \in K$, tal que $K \subseteq \bigcup_{i1}^m W_{x_i}$. Para cada j entre 1 e n, seja

$$U_j \;=\; \bigcup\, \{W_{x_i} : x_i \in V_j\}.$$

Então, U_j é um aberto, $1 \leq j \leq n$, e temos

$$\overline{U_j} \text{ é um compacto contido em } V_j\ ^{21} \quad \text{e} \quad K \;\subseteq\; \bigcup_{j=1}^n U_j.$$

Pela Proposição 3.47, para $1 \leq j \leq n$, existe $f_j : X \longrightarrow [0,1]$, contínua, tal que

(I) $$f_{j\,|\overline{U_j}} \;\equiv\; 1 \quad \text{e} \quad supp\, f_j \text{ é um compacto contido em } V_j.$$

Para $1 \leq j \leq n$, definimos

$$g_j \;=\; \begin{cases} f_1 & \text{se } j = 1 \\ f_j \prod_{k \leq (j-1)} (1 - f_k) & \text{se } j \geq 2. \end{cases}$$

Claro que temos $g_j : X \longrightarrow [0,1]$, contínuas. Além disso, já que f_j é fator de g_j, temos $supp\ g_j \subseteq supp\, f_j \subseteq V_j$. Assim, $supp\, g_j$ é um compacto contido em V_j. Finalmente, note que

$$g_1 + g_2 - 1 \;=\; f_1 - 1 + f_2(1 - f_1) \;=\; -\,(1 - f_1)(1 - f_2).$$

Por indução, verifica-se que

(II) $$\sum_{j=1}^n g_j \;=\; 1 - \prod_{j=1}^n (1 - f_j).$$

Como $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_j$, segue imediatamente de (I) e (II) que $\sum_{j=1}^n g_j(x) = 1$, para $x \in K$. □

Definição 3.50 *Sejam X um espaço localmente compacto e Σ uma σ-álgebra em X, que contém os Borelianos.*

[20] Todo fechado em um compacto é compacto.

[21] Pois é união finita de abertos cujos fechos são compactos contidos em V_j.

a) Uma medida definida em Σ, denomina-se uma **medida de Borel em X**.

b) Uma medida de Borel positiva em X, μ, é **quasi-regular** *se satisfizer as seguintes condições :*

[reg 1] : Para todo compacto $K \subseteq X$, $\mu(K) < \infty$;

[reg 2] : Para todo $A \in \Sigma$, $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U$ é aberto e $A \subseteq U\}$;

[reg 3] : Se $A \in \Sigma$ é aberto ou tem medida finita, então

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ é compacto e } K \subseteq A\};$$

c) Uma medida de Borel positiva é **regular** *se a condição [reg 3] vale para todo $E \in \Sigma$.*

d) Uma medida é **completa** *se $A \subseteq B \in \Sigma$ e $\mu(B) = 0 \Rightarrow A \in \Sigma$.*

Exemplo 3.51 1. A medida de Lebesque em $\mathbb{R}^n$ é uma medida de Borel regular e completa (veja Corolário 3.61.(a)).

2. Se X é um conjunto com a topologia discreta (todos os pontos são abertos) então X é métrico [22] e localmente compacto (pontos são compactos). Se $\Sigma = 2^X$ e μ é a medida da contagem em X, isto é,

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{o cardinal de } A & \text{se } A \text{ é finito} \\ \infty & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

então μ é uma medida de Borel regular e completa. □

Proposição 3.52 *Seja $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ uma espaço de medida.*

a) Definimos

$$\overline{\Sigma} = \{A \subseteq X : \exists\, B, C \in \Sigma \text{ e } D \subseteq C \text{ tal que } A = B \cup D \text{ e } \mu(C) = 0\}.$$

Então, $\overline{\Sigma}$ é uma σ-álgebra em X, contendo Σ. Além disso, μ tem uma única extensão a uma medida $\overline{\mu}$ em $\overline{\Sigma}$, tal que $\langle X, \overline{\Sigma}, \overline{\mu} \rangle$ é um espaço de medida completo.

b) Se X é um espaço localmente compacto e μ é de Borel quasi-regular (ou regular) em X, o mesmo é verdade para $\overline{\mu}$.

Prova. a) Está claro que $\Sigma \subseteq \Sigma^c$ ($\emptyset$ tem medida nula) e que Σ^c é fechado por uniões enumeráveis. Resta mostrar que é fechado por complementos. Dado $A = B \cup D \in \Sigma^c$, com $D \subseteq C \in \Sigma$ e $\mu(C) = 0$, note que

$$\text{(I)} \quad A^c = B^c \cap D^c = B^c \cap (C^c \cup (C - D)) = (B^c \cap C^c) \cup (B^c \cap (C - D)).$$

Uma vez que Σ é uma σ-álgebra e $B^c \cap (C - D) \subseteq C$, (I) mostra que $A^c \in \overline{\Sigma}$, como desejado.

Se $A \in \overline{\Sigma}$, $A = B \cup D$, onde D é subconjunto de $C \in \Sigma$ de μ-medida nula, definimos

$$\overline{\mu}(A) = \mu(B).$$

Deixamos ao leitor a verificação dos seguintes fatos :

[22] $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$ e $d(x, x) = 0$.

(1) $\overline{\mu}$ está bem definida, isto é, independe do modo como cada elemento de $\overline{\Sigma}$ está expresso como união de um conjunto em Σ e um subconjunto de um conjunto de μ-medida nula. Em particular, $\overline{\mu}$ é extensão de μ;

(2) $\overline{\mu}$ é uma medida σ-aditiva sobre $\overline{\Sigma}$;

(3) (completude) $A \subseteq B \in \overline{\Sigma}$ e $\overline{\mu}(B) = 0 \;\Rightarrow\; A \in \overline{\Sigma}$;

(4) (unicidade) $\overline{\mu}$ é a única extensão de μ a $\overline{\Sigma}$;

(5) O ítem (b). $\square$

Observação 3.53 O espaço $\langle X, \overline{\Sigma}, \overline{\mu} \rangle$ da Proposição 3.52 denomina-se **completamento** de $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$. Como está canonicamente associado a $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ e preserva quasi-regularidade e regularidade, muitos autores incluem a completude *na definição* de medida de Borel. Por 3.52, sempre que conveniente e sem perda de generalidade, podemos supor que o espaço de medida em discussão é completo. $\square$

A importância de medidas de Borel quasi-regulares vem do seguinte

Teorema 3.54 (Riesz-Markov) *Seja X um espaço localmente compacto e $I : \mathbb{C}_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear* positivo, *isto é,*

$$\forall\, f \in \mathbb{C}_c(X), \quad f \geq 0 \;\Rightarrow\; I(f) \geq 0.$$

Então, existe uma única *medida de Borel quasi-regular e completa em X, μ, tal que para $f \in \mathbb{C}_c(X)$* [23]

$$I(f) \;=\; \int_X f\, d\mu.$$

Prova. Veja, por exemplo, Teorema 2.14, capítulo 2 (pag. 40) em [Rudin 2][24] ou Teorema 23, capítulo 13 (pag. 352) em [Royden][25]. $\square$

Observação 3.55 O Teorema 3.54 nos fornece um modo alternativo de construir a medida de Lebesque em $\mathbb{R}^n$. Para $f \in \mathbb{C}_c(\mathbb{R}^n)$, seja Q um paralelepípedo em $\mathbb{R}^n$ tal que f é nula fora de Q e defina

$$I(f) \;=\; \int_Q f\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

onde a integral acima é a de Riemann (aquela do Cálculo III). Claro que I é um funcional linear positivo em $\mathbb{C}_c(\mathbb{R}^n)$. A única medida de Borel regular completa em $\mathbb{R}^n$ que representa I é precisamente a medida de Lebesque. $\square$

Exercício 3.56 *Seja $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ uma medida de Borel regular, com X localmente compacto. Se $g \in L^1(\mu)$ é positiva e definimos, para $E \in \Sigma$,*

$$\nu(E) \;=\; \int_X g\chi_E\, d\mu \;=\; \int_E g\, d\mu,$$

então, ν é uma medida de Borel regular em X.

[23] Dizemos que μ *representa* I.

[24] W. Rudin, **Real and Complex Analysis**, McGraw Hill, New York, 1966; (minha preferida).

[25] H. L. Royden, **Real Analysis**, Macmillan Publ. Co., New York, 1988 (3ª edição).

Definição 3.57 *Um espaço X é* **σ-compacto** *se for união enumerável de compactos.*

Exemplo 3.58 1. Todo espaço compacto é, evidentemente, σ-compacto.

2. $\mathbb{R}^n$ é σ-compacto, $n \geq 1$.

3. Um espaço discreto (todo ponto é aberto) é σ-compacto sse for enumerável. $\square$

Proposição 3.59 *Seja μ uma medida de Borel sobre um espaço localmente compacto X. Suponha que*

(1) μ verifica as condições [reg 1] e [reg 2] en 3.50.(b); *(2) X é σ-compacto.*

Então,

a) Para $A \in \Sigma$ e $\varepsilon > 0$, existe um fechado F e um aberto U, tal que

$$F \subseteq A \subseteq V \quad e \quad \mu(V - F) < \varepsilon.$$

b) Existe $S \in F_\sigma$ e $T \in G_\delta$ tal que $S \subseteq A \subseteq T$ e $\mu(T - S) = 0$. [26]

c) μ é regular.

Prova. Suponha que $X = \bigcup_{n \geq 1} K_n$, onde cada K_n é compacto.

a) Fixemos $\varepsilon > 0$. Para $A \in \Sigma$, seja $A_n = A \cap K_n$, $n \geq 1$. Temos

$$A = \bigcup_{n\geq 1} A_n, \quad \text{com } \mu(A_n) < \infty, \quad n \geq 1$$

pois $\mu(K_n) < \infty$. Por [*reg* 2], existem abertos V_n, $n \geq 1$, tal que

$$A_n \subseteq V_n \text{ e } \mu(V_n - A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Logo, se $V = \bigcup_{n\geq 1} V_n$, temos $V - A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} (V_n - A_n)$ e portanto

$$\mu(V - A) \leq \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} (V_n - A_n)\right) \leq \sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podemos agora aplicar o mesmo método para A^c, o complemento de A. Assim, existe um aberto W tal que $A^c \subseteq W$ e $\mu(W - A^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $F = W^c$; então F é um fechado contido em A, com

$$A - F = A \cap F^c = (A^c)^c \cap W = W - A^c.$$

Portanto, $\mu(V - F) \leq \mu(V - A) + \mu(W - A^c) < \varepsilon$, completando a prova de (a).

b) Para $A \in \Sigma$, aplicamos (a) para $\varepsilon = \frac{1}{n}$, produzindo uma sequência $\langle F_n, V_n \rangle$, $n \geq 1$, tal que

$$F_n \subseteq A \subseteq V_n \text{ e } \mu(V_n - F_n) < \frac{1}{n}.$$

Seja $S = \bigcup_{n\geq 1} F_n$ e $T = \bigcap_{n\geq 1} V_n$; então $S \in F_\sigma$, $T \in G_\delta$ e $S \subseteq A \subseteq T$; além disso, como

$$T - S \subseteq \bigcap_{n\geq 1} V_n - F_n,$$

temos que $\mu(T - S) = 0$, como desejado.

[26] $\begin{cases} F_\sigma = \{E \subseteq X : E \text{ é união enumerável de fechados}\}; \\ G_\delta = \{E \subseteq X : E \text{ é interseção enumerável de abertos}\}. \end{cases}$

c) Para verificar que μ é regular, devemos mostrar que para $A \in \Sigma$,

(I) $$\mu(A) \;=\; \sup\,\{\mu(K) : K \text{ é compacto e } K \subseteq A\},$$

isto é, que $[reg\ 3]$ em 3.50.(b) vale para todo $A \in \Sigma$. Tendo em vista (a), é suficiente verificar que (I) vale para fechados em X. Se F é fechado em X, então as interseções $F \cap K_n$ são compactos em X, $n \geq 1$. Seja $T_n = \bigcup_{j=1}^{n} F \cap K_j$; então T_n é uma sequência crescente de compactos em X tal que

(II) $$F \;=\; \bigcup_{n\geq 1} T_n.$$

Como T_n cresce para F, (II) implica que $\lim_{n\to\infty} \mu(T_n) \;=\; \mu(F)$, encerrando a prova. □

O método de prova da Proposição 3.59 fornece o

Corolário 3.60 *Seja μ uma medida de Borel quasi-regular em um espaço localmente compacto X. Se $\mu(A) < \infty$, então existem $S \in F_\sigma$ e $T \in G_\delta$ tal que*

$$S \;\subseteq\; A \;\subseteq\; T \quad e \quad \mu(T - S) = 0.$$

Em particular, se μ é completa, todo conjunto de medida finita é a união de um conjunto em F_σ e um conjunto de medida nula.

Prova. Exercício; mas lembre-se que todo compacto é fechado, pois X é Hausdorff. □

Corolário 3.61 *A medida de Lebesque em $\mathbb{R}^n$ é regular e tem as propriedades (a) e (b) em 3.59.*

b) Se μ é uma medida de Borel completa em um espaço σ-compacto, que satisfaz $[reg\ 1]$ e $[reg\ 2]$ em 3.50.(b), então todo $A \in \Sigma$ se escreve como $S \cup B$, com $S \in F_\sigma$ e $\mu(B) = 0$.

Prova. a) Já observamos que $\mathbb{R}^n$ é σ-compacto. Se λ é a medida de Lebesque e K é compacto em $\mathbb{R}^n$, existe um cubo C tal que $K \subseteq C$. Como $\lambda(C)$ é seu volume, concluímos que λ satisfaz $[reg\ 1]$ em 3.50.(b). A própria definição de λ implica que $[reg\ 2]$ está verificada. A conclusão segue imediatamente de 3.59. O ítem (b) está claro. □

Os métodos introduzidos acima têm outras aplicações. Um exemplo é a

Proposição 3.62 *Seja μ uma medida de Borel quasi-regular em um espaço localmente compacto X, definida em $\Sigma \subseteq 2^X$.*

a) Se $A \in \Sigma$ tem medida finita, existe uma sequência $\langle\, g_n \,\rangle \in \mathbb{C}_c(X)$ tal que $0 \leq g_n \leq 1$ e g_n converge μ-qs e de forma crescente para χ_A.

b) $\mathbb{C}_c(X)$ é denso em $L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Prova. a) Como μ é quasi-regular, para cada $n \geq 1$, existe um par $\langle\, K_n, V_n \,\rangle$ tal que

$$K_n \text{ é compacto, } \; V_n \text{ é aberto, } \; K_n \subseteq A \subseteq V_n \;\text{ e }\; \mu(V_n - K_n) < \frac{1}{n}.$$

Definimos $T_n \;=\; \bigcup_{j=1}^{n} K_j$ e $U_n \;=\; \bigcup_{j=1}^{n} V_j$. Então, para $n \geq 1$,

$$T_n \text{ é compacto, } \; U_n \text{ é aberto, } \; T_n \subseteq T_{n+1}, \; U_{n+1} \subseteq U_n \;\text{ e }\; T_n \subseteq A \subseteq U_n.$$

Além disso, de

$$U_n - T_n \;=\; \bigcap_{j=1}^n V_j - \bigcup_{j=1}^n K_j \;=\; \bigcap_{j=1}^n V_j - K_j,$$

obtemos $\mu(U_n - T_n) < \dfrac{1}{n}$. Pela Proposição 3.47, para $n \geq 1$, existe $g_n \in \mathbb{C}_c(X)$ tal que

$$0 \leq g_n \leq 1, \quad {g_n}_{|T_n} \;\equiv\; 1 \;\text{ e }\; supp\ g_n \subseteq U_n.$$

Uma vez que T_n é crescente, a sequência g_n cresce para χ_A, exceto no conjunto $T - U$, onde

$$T = \bigcup_{n\geq 1} T_n \quad\text{e}\quad U = \bigcap_{n\geq 1} U_n.$$

Como $\mu(T - U) = 0$, a prova de (a) está completa.

b) Por 3.46, $\mathbb{C}_c(X) \subseteq L^p(\mu)$. Por 3.44.(c), as funções simples, nulas fora de um conjunto de medida finita são densas em $L^p(\mu)$. Portanto é suficiente mostrar que toda função simples, nula fora de um conjunto de medida nula pode ser aproximada, em $L^p(\mu)$, por elementos de $\mathbb{C}_c(X)$. Seja $\varphi = \sum_{j=1}^m a_j\ \chi_{E_j}$ uma função simples, tal que $\mu(E_j) < \infty$, $1 \leq j \leq m$. Pelo ítem (a), existe uma sequência $\langle\, g_n^j \,\rangle \in \mathbb{C}_c(X)$, tal que

$$g_n^j \overset{\mu-qs}{\longrightarrow} \chi_{E_j}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Logo, $g_n \;=\; \sum_{j=1}^n a_j\ g_n^j$ converge μ-qs para φ, com $\langle\, g_n \,\rangle \in C_c(X)$. Se $A = \bigcup_{j=1}^n E_j$ e M $= \sup_{1\leq j\leq m} |a_j|$, esta convergência é dominada pela função integrável $M\chi_A$ e portanto g_n converge a φ em todo $L^p(\mu)$, como desejado. $\square$

Prepatório para a prova de que funções mensuráveis são "muito parecidas" com funções contínuas, vamos apresentar um modo especial de aproximar funções mensuráveis positivas.

Teorema 3.63 *Sejam $\langle\, X, \Sigma, \mu \,\rangle$ um espaço de medida e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável, limitada e positiva. Então existem $E_n \in \Sigma$, $n \geq 0$, tal que*

$$f \;=\; \sum_{n\geq 0} \frac{\|f\|_\infty}{2^n}\ \chi_{E_n},$$

onde χ_{E_n} é a função característica de E_n. Em particular, as somas $\sum_{j=0}^n \dfrac{\|f\|_\infty}{2^j}\ \chi_{E_j}$ convergem de forma crescente e uniforme *para f em X.*

Antes da prova do Teorema 3.63, lembremos que todo real $\alpha \in [0, 1)$ tem uma **expansão binária standard**, isto é, existe uma sequência

$$eb(\alpha) \;=\; \langle\, \alpha_n \,\rangle \in 2^{\mathbb{N}},$$

satisfazendo as seguintes condições :

[eb 1] : $\quad \alpha \;=\; \sum_{n\geq 1} \dfrac{\alpha_n}{2^n}$;

[eb 2] : $\quad$ Para todo $n \geq 1$, existe $m > n$ tal que $\alpha_m = 0$.

A condição [eb 2] garante que $eb(\alpha)$ não contém uma sub-sequência infinita de 1's consecutivos. Portanto [27], cada $\alpha \in [0, 1)$ possui uma *única* expansão binária e a associação

$$\alpha \in [0, 1) \longmapsto eb(\alpha) = \langle\, \alpha_n \,\rangle \in 2^{\mathbb{N}}$$

é uma função.

[27] Lembre que $1/2^n = \sum_{j\geq n+1} 1/2^j$.

Lema 3.64 *a) A função eb :* $[0,1) \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ *é injetora. Para* $\alpha,\, \beta \in [0,1)$ *e* $n \geq 1$,

$$\alpha_j = \beta_j,\ 1 \leq j \leq n \ \Rightarrow\ |\alpha - \beta| \leq \frac{1}{2^n}.$$

b) Se $\alpha \in [0,1)$ *e* $n \geq 1$,

$$\alpha_n = 1 \quad sse \quad \alpha \in \bigcup \left\{ \left[\frac{k}{2^n},\ \frac{k+1}{2^n}\right) \ :\ 1 \leq k \leq 2^n \ e\ k\ \acute{e}\ \acute{\imath}mpar \right\}.$$

c) Para $\alpha \in [0,1)$ *e* $n \geq 1$,

$$\alpha_n = 0 \quad sse \quad \alpha \in \bigcup \left\{ \left[\frac{k}{2^n},\ \frac{k+1}{2^n}\right) \ :\ 0 \leq k \leq (2^n - 1) \ e\ k\ \acute{e}\ par \right\}.$$

Prova. O ítem (a) é consequência imediata de [eb 1]. Para (b), dividiremos o argumento em dois casos :

$*$ $\underline{n = 1.}$ Está claro que $\alpha_1 = 1 \ \Rightarrow\ 1/2 \leq \alpha < 1$. Por outro lado, se $\alpha \in [1/2,\, 1)$, a condição [eb 2] garante que $\alpha_n = 1$, já que $\sum_{j \geq 2} \frac{\alpha_j}{2^j} \ <\ \frac{1}{2}$.

$*$ $\underline{n \geq 2.}$ Suponha que k é ímpar entre 1 e 2^n e que $\frac{k}{2^n} \leq \alpha < \frac{k+1}{2^n}$. Se $\alpha_n = 0$, então

$$\text{(I)} \qquad \alpha \ =\ \sum_{1 \leq j < n} \frac{\alpha_j}{2^j} + \sum_{j \geq n+1} \frac{\alpha_j}{2^j}.$$

A condição [eb 2] garante que $\sum_{j \geq n+1} \frac{\alpha_j}{2^j} \ <\ \frac{1}{2^n}$. Por outro lado, o primeiro termo do lado direito de (I) pode ser escrito

$$\sum_{1 \leq j < n} \frac{\alpha_j}{2^j} \ =\ \sum_{1 \leq j < n} \frac{\alpha_j 2^{n-j}}{2^n}.$$

Seja $t = \sum_{1 \leq j < n} \alpha_j 2^{n-j}$; observe que t é par, entre 0 e 2^n. Assim sendo, temos que

$$\text{(II)} \qquad \alpha \in \left[\frac{t}{2^n},\ \frac{t+1}{2^n}\right) \ \cap\ \left[\frac{k}{2^n},\ \frac{k+1}{2^n}\right).$$

Já que k é ímpar, ou $t + 1 \leq k$ ou $t \geq k + 1$ e a interseção de intervalos em (II) é vazia. Logo, $\alpha_n = 1$. Reciprocamente, suponha que $\alpha_n = 1$. Então

$$\alpha \ =\ \sum_{1 \leq j < n} \frac{\alpha_j}{2^j} + \frac{1}{2^n} + \sum_{j \geq n+1} \frac{\alpha_j}{2^j},$$

e como acima, sabemos que $\sum_{j \geq n+1} \frac{\alpha_j}{2^j} \ <\ \frac{1}{2^n}$. Por outro lado, temos

$$\sum_{1 \leq j < n} \frac{\alpha_j}{2^j} + \frac{1}{2^n} \ =\ \frac{1 + \sum_{1 \leq j < n} \alpha_j 2^{n-j}}{2^n} \ =\ \frac{k}{2^n},$$

com k ímpar. Portanto, $\alpha \in \left[\frac{k}{2^n},\ \frac{k+1}{2^n}\right)$, completando a prova de (b). O ítem (c) é consequência imediata de (b) e do fato que

$$[0,\, 1) \ =\ \bigcup_{0 \leq k \leq 2^n} \left[\frac{k}{2^n},\ \frac{k+1}{2^n}\right). \qquad \square$$

Exercício 3.65 *A função* $f : 2^\omega \longrightarrow [0,2] \subseteq \mathbb{R}$, *dada por*

$$s \in 2^\omega \ \longmapsto\ f(s) \ =\ \sum_{n \geq 0} \frac{s_n}{2^n}$$

é contínua e sobrejetora[28]. *O espaço* 2^ω *tem a topologia da métrica do Exemplo* 2.28.

[28] Lembre que $0 \in \omega$.

Prova do Teorema 3.63. Inicialmente suponha que $f : X \longrightarrow [0, 1]$. Para $n = 0$ definimos

$$E_0 \;=\; \{x \in X : f(x) = 1\}$$

e para $n \geq 1$,

$$E_n \;=\; \bigcup \left\{ f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) : 0 \leq k \leq 2^n \text{ e } k \text{ é ímpar} \right\}.$$

Cada E_n é mensurável em X, pois é união finita de mensuráveis. Note que E_0 é disjunto de $\bigcup_{n\geq 1} E_n$. Pelo Lema 3.64.(b) sabemos que se $n \geq 1$ e $x \in f^{-1}([0, 1)) = X - E_0$,

(I) $\quad x \in E_n$ sse o coeficiente de ordem n da expansão binária de $f(x)$ é igual a 1.

Para $x \in X - E_0$, seja $A_x = \{n \geq 1 : x \in E_n\}$. Como $\chi_{E_n}(x) = 0$ se $n \notin A_x$, (I) acarreta

$$\textstyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}\, \chi_{E_n}(x) \;=\; \sum_{n\in A_x} \frac{1}{2^n} \;=\; f(x),$$

e portanto $f \;=\; \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}\, \chi_{E_n}$ em X. Está claro que a somas parcais $\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^j}\, \chi_{E_j}$ convergem de forma crescente para f. A uniformidade vem do fato que $\|1/2^n \chi_{E_n}\|_\infty \leq 1/2^n$ e a série geométrica de razão $1/2$ é convergente.

Para o caso geral, como f é limitada, $0 \leq \dfrac{f}{\|f\|_\infty} \leq 1$. Assim,

$$\frac{f}{\|f\|_\infty} \;=\; \textstyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}\, \chi_{E_n},$$

e conclusão desejada segue imediatamente. $\square$

Exercício 3.66 *Mostre o Lema* 3.45 *é consequência do Teorema* 3.63.

Observação 3.67 Não há nada de especial sobre o número 2, exceto o fato de facilitar contas. Há análogos de 3.63 para qualquer base positiva ≥ 2. $\square$

Teorema 3.68 (Lusin) *Seja X um espaço localmente compacto e μ uma medida de Borel quasi-regular em X. Seja f uma função real mensurável em X, nula fora de um conjunto de medida finita.*

a) Para $\varepsilon > 0$, existe $h \in \mathbb{C}_c(X)$ tal que

$$\|h\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad e \quad \mu(\{x \in X : f(x) \neq h(x)\}) \;<\; \varepsilon.$$

b) Se f é limitada, então existe uma sequência $h_n \in \mathbb{C}_c(X)$ tal que

$$\|h_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad e \quad h_n \longrightarrow f \;\; \mu\text{-}qs.$$

Prova. a) Seja $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) < \infty$ e f é nula fora de A. Fixamos $\varepsilon > 0$.

<u>Caso 1 : f é limitada, positiva e A é compacto.</u> Seja U aberto em X tal que $K \subseteq U$ e $\overline{U}$ é compacto. Pelo Teorema 3.63 existem mensuráveis $E_n \subseteq A$, $n \geq 0$, tal que

(I) $$f \;=\; \textstyle\sum_{n\geq 0} \frac{\|f\|_\infty}{2^n}\, \chi_{E_n}.$$

Para cada $n \geq 0$, as condições [*reg* 2] e [*reg* 3] em 3.50.(b) fornecem um par $\langle K_n, V_n \rangle$, tal que

(II) $\quad K_n \subseteq E_n \subseteq V_n \subseteq U$, $\;K_n$ é compacto, V_n é aberto e $\mu(V_n - K_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Pela Proposição 3.47, para cada $n \geq 0$, existe $h_n \in \mathbb{C}_c(X)$ tal que

$$h_{n|K_n} \equiv 1 \quad \text{e} \quad supp\ h_n \subseteq V_n.$$

Definimos

$$h = \sum_{n\geq 0} \frac{\|f\|_\infty}{2^n} h_n.$$

Então, h é contínua (a série que a define converge uniformemente), com $supp\ h \subseteq U \subseteq \overline{U}$. Logo $supp\ h$ é compacto e $h \in \mathbb{C}_c(X)$. Além disso, como E_0 é disjunto de $\bigcup_{n\geq 1} E_n$ (veja a prova de 3.63), temos que $\|h\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. A relação (I) e o fato que $f_{|A^c} \equiv 0$ implicam

$$\forall\ x \in A^c \cup \bigcup_{n\geq 0} K_n, \quad f(x) = h(x).$$

Logo, $\{x \in X : f(x) \neq h(x)\} \subseteq \bigcup_{n\geq 0} V_n - K_n$ e portanto

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq h(x)\}) \leq \sum_{n\geq 0} \mu(V_n - K_n) < \sum_{n\geq 0} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon,$$

como necessário.

Caso 2 : f é limitada e positiva. Como $\mu(A) < \infty$, pela quasi-regularidade de μ, existe um compacto $K \subseteq A$, tal que $\mu(A - K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pelo caso 1, existe $h \in \mathbb{C}_c(X)$ tal que

$$\|h\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad \text{e} \quad \mu(\{x \in X : h(x) \neq f_{|K}(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mas então

$$\mu(\{x \in X : h(x) \neq f(x)\}) \leq \mu(\{x \in X : h(x) \neq f_{|K}(x)\}) + \mu(A - K) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Caso Geral. Se f é limitada, o caso 2 aplicado a f^+ e f^-, fornece h^+, $h^- \in \mathbb{C}_c(X)$ tais que

$$\|h^*\|_\infty = \|f^*\|_\infty \quad \text{e} \quad \mu(\{x \in X : f^*(x) \neq h^*(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

onde $* \in \{+, -\}$. Então, $h = h^+ - h^-$ é contínua e satisfaz as condições desejadas.

Finalmente, para $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável, note que se

$$L_m = \{x \in X : |f(x)| \geq m\},$$

então, $\bigcap_{m\geq 1} L_m = \emptyset$, com $L_m \subseteq A$. Assim, $\mu(L_m) < \infty$ e portanto $\mu(L_m) \longrightarrow 0$. Como f coincide com a função limitada $(1 - \chi_{L_m})f$ fora de L_m, a prova de (a) está completa.

b) Para cada $n \geq 1$, existe $h_n \in \mathbb{C}_c(X)$ tal que se $D_n = \{x \in X : f(x) \neq h_n(x)\}$, então

$$\|h_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad \text{e} \quad \mu(D_n) < \frac{1}{2^n}.$$

Para $\eta \geq 0$, seja

$$B_\eta = \{x \in X : \exists \text{ uma sequência estritamente crescente } n_k \text{ tal que } |f(x) - h_{n_k}(x)| \geq \eta\}.$$

Como $B_\eta \subseteq \bigcap_{k\geq 1} D_{n_k}$, temos que $\mu(B_\eta) = 0$. Se $C = \{x \in X : f(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x)\}$, então

$$C^c \subseteq \bigcup_{m\geq 1} B_{1/m},$$

e portanto $\mu(C^c) = 0$. Logo, $h_n \longrightarrow f$ μ-qs, completando a prova. □

O leitor poderá verificar que 3.62 também pode ser obtida a partir do Teorema 3.68.

A próxima definição identifica algumas classes importantes de espaços de medida.

Definição 3.69 *Seja $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ um espaço de medida.*

a) $A \subseteq X$ é **localmente mensurável** *se $A \cap E \in \Sigma$, para todo $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E) < \infty$.*

b) $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ é **saturado** *se todo subconjunto localmente mensurável está em Σ.*

c) $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ é **σ-finito** *se existir uma sequência $X_n \in \Sigma$, $n \geq 1$, tal que $\mu(X_n) < \infty$ e $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$.*[29]

Exemplo 3.70 1. Toda medida de Borel quasi-regular em um espaço σ-compacto é σ-finita. Em particular, a medida de Lebesque em $\mathbb{R}^n$ é σ-finita.

2. Todo espaço σ-finito é saturado. Se $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$, com $\mu(X_n) < \infty$, e A é localmente mesurável, então $A \cap X_n \in \Sigma$. Portanto, da igualdade

$$A = \bigcup_{n\geq 1} A \cap X_n$$

e do fato que Σ é uma σ-álgebra, obtemos $A \in \Sigma$. □

Exercício 3.71 *Seja $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ um espaço de medida . Mostre que a família dos conjuntos localmente mensuráveis em $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ é uma σ-álgebra, que contém Σ.*

Teorema 3.72 (Unicidade de Medidas Quasi-Regulares) *Sejam X um espaço localmente compacto e $\langle \Sigma_1, \mu_1 \rangle$, $\langle \Sigma_2, \mu_2 \rangle$ medidas de Borel em X, quasi-regulares, completas e saturadas. As seguintes condições são equivalentes :*

(1) *$\mu_1 = \mu_2$ e $\Sigma_1 = \Sigma_2$;*

(2) *μ_1 e μ_2 coincidem nos abertos de X;*

(3) *μ_1 e μ_2 coincidem nos compactos de X.*

Prova. É suficiente mostrar que (3) $\Rightarrow$ (1). Seja $\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ e

$$\Sigma_{i0} = \{B \in \Sigma_i : \mu_i(B) = 0\} \text{ e } \Sigma_{ifin} = \{A \in \Sigma_i : \mu_i(A) < \infty\}, \quad i = 1, 2.$$

Se $A \in \Sigma$ é aberto ou tem medida finita, a condição [*reg* 3] em 3.50.(b) acarreta

$$\begin{aligned} \mu_1(A) &= \sup \{\mu_1(K) : K \subseteq A \text{ e } K \text{ é compacto}\} \\ &= \sup \{\mu_2(K) : K \subseteq A \text{ e } K \text{ é compacto}\} = \mu_2(A), \end{aligned}$$

μ_1 e μ_2 coincidem em A. Em particular,

(I) μ_1 e μ_2 coincidem nos abertos e em todo Boreliano de medida finita.

Seja $A \in \Sigma_1$, tal que

(II) $$\mu_1(A) = \inf \{\mu_1(V) : A \subseteq V \text{ e } V \text{ é aberto}\} = 0.$$

Então existem abertos V_n em X tais que $A \subseteq T = \bigcap_{n\geq 1} V_n$ e $\mu_1(V_n) < \frac{1}{n}$. Logo, T é um Boreliano (na realidade, um G_δ), contendo A, tal que $\mu_1(T) = 0$. Como μ_1 coincide com μ_2 nos Borelianos e μ_2 é completa, concluímos que $A \in \Sigma_2$ e $\mu_2(A) = 0$. Por simetria, obtemos

(III) $$\Sigma_{10} = \Sigma_{20}.$$

[29] As vezes dizemos que μ é σ-finita.

Se $A \in \Sigma_{1fin}$, o Corolário 3.60 implica que $A = S \cup B$, onde $S \in F_\sigma$ e $\mu_1(B) = 0$. Como todo F_σ é Boreliano, (I) e (III) implicam que $A \in \Sigma_2$ e $\mu_2(A) = \mu_1(A)$. Como o argumento é simétrico, concluímos que

(IV) $$\Sigma_{1fin} = \Sigma_{2fin} \quad \text{e} \quad \mu_1|_{\Sigma_{1fin}} = \mu_2|_{\Sigma_{2fin}}.$$

Finalmente, se $A \in \Sigma_2$ e $B \in \Sigma_{1fin}$, então (IV) acarreta $A \cap B \in \Sigma_{2fin} \subseteq \Sigma_1$. Assim, todo elemento Σ_2 é localmente mensurável em relação a $\langle X, \Sigma_1, \mu_1 \rangle$, a saturação deste espaço garante que $A \in \Sigma_1$. Analogamente, $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, estabelecendo a igualdade desejada. Agora (I) e a primeira igualdade em (II) implicam $\mu_1 = \mu_2$, encerrando a prova. □

Observação 3.73 Se μ_1 e μ_2 são medidas de Borel quasi-regulares, definidas na *mesma* σ-álgebra, a equivalência em 3.72 é imediata. □

Antes de discutir os duais dos espaços $\mathbb{C}(X)$, X um compacto Hausdorff, e $L^p(\mu)$, onde $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ é um espaço de medida σ-finita, é necessário apresentar as noções de *reticulado vetorial* e *reticulado normado*, que faremos na seção que segue.

3.5 Reticulados de Funções Reais

Seja X um conjunto e $\mathbb{R}^X$ o conjunto das funções de X em $\mathbb{R}$. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, seja

$$\check{\alpha} \quad = \quad \text{a função contante de valor } \alpha \text{ em } X.$$

Assim, $\check{1}$ e $\check{0}$ são as funções contantes de valor 1 e 0, respectivamente, X.

Está claro que $\mathbb{R}^X$ é um espaço vetorial real com a soma e multiplicação usual, isto é, para $f, g \in \mathbb{R}^X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in X$

$$[f + g](x) = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad [\lambda f](x) = \lambda f(x).$$

Na realidade, $\mathbb{R}^X$ é uma **álgebra real** pois podemos definir uma multiplicação

$$[f \cdot g](x) \quad = \quad f(x)g(x), \qquad (x \in X)$$

de modo que $\mathbb{R}^X$ é um anel comutativo e a aplicação

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \longmapsto \check{\alpha} \in \mathbb{R}^X$$

é um homomorfismo injetor de anéis, tal que $f \cdot \check{\alpha} = \alpha f$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathbb{R}^X$.

Mas a estrutura presente em $\mathbb{R}^X$ é ainda mais ampla, pois podemos introduzir uma **ordem parcial** (3.31), da seguinte forma

[op] $$f \leq g \quad \text{sse} \quad \text{Para todo } x \in X, \quad f(x) \leq g(x).$$

É imediato que $\langle \mathbb{R}^X, \leq \rangle$ é um conjunto parcialmente ordenado (3.31). Note que *$\mathbb{R}^X$ é linearmente ordenado sse X é unitário, isto é, $X = \{x\}$*. Além disso, a função $\check{\cdot}$ é uma imersão de ordem, isto é, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha \leq \beta \quad \text{sse} \quad \check{\alpha} \leq \check{\beta}.$$

Como $\check{\cdot} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^X$ é um isomorfismo de toda estrutura de $\mathbb{R}$ (operações e ordem) com a imagem desta função, passaremos a identificar os números reais com as funções constantes em X.

Para $f,\, g \in \mathbb{R}^X$ e $x \in X$, definimos

$$(*) \qquad [f \wedge g](x) \;=\; \min\,\{f(x),\, g(x)\} \quad \text{e} \quad [f \vee g](x) \;=\; \max\,\{f(x),\, g(x)\}.$$

Lema 3.74 *Com as definições acima, se $f,\, g,\, \varphi \in \mathbb{R}^X$,*

a) $f \wedge g$ é o **ínfimo** *de $\{f,\, g\}$ em $\mathbb{R}^X$, isto é,*

(1) $f \wedge g \leq f \quad e \quad f \wedge g \leq g$;

(2) $\forall\, h \in \mathbb{R}^X, \quad h \leq f \text{ e } h \leq g \quad \Rightarrow \quad h \leq f \wedge g$.

A operação $\wedge : \mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^X \longrightarrow \mathbb{R}^X$ é comutativa e associativa.

b) $f \wedge g$ é o **supremo** *de $\{f,\, g\}$ em $\mathbb{R}^X$, isto é,*

(1) $f \vee g \geq f \quad e \quad f \vee g \geq g$;

(2) $\forall\, h \in \mathbb{R}^X, \quad h \geq f \text{ e } h \geq g \quad \Rightarrow \quad h \geq f \vee g$.

A operação $\vee : \mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^X \longrightarrow \mathbb{R}^X$ é comutativa e associativa.

c) Para $f,\, g,\, h \in \mathbb{R}^X$, $\begin{cases} f \wedge (g \vee h) &=& (f \wedge g) \vee (f \wedge h); \\ f \vee (g \wedge h) &=& (f \vee g) \wedge (f \vee h). \end{cases}$

d) Definimos $f^+ \;=\; f \vee \check{0}$ e $f^- \;=\; -f \vee \check{0}$. Então, $f^+,\, f^- \geq \check{0}$ e temos

$$(1) \quad f \;=\; f^+ - f^-; \qquad\qquad (2) \quad |f| \;=\; f^+ + f^-.$$

e) Se $f,\, g,\, \varphi \geq \check{0}$ e $\varphi \leq f + g$, então $\varphi \;\leq\; (\varphi \wedge f) \;+\; (\varphi \wedge g)$.

Prova. Comentaremos apenas (e), deixando os outros ítens para o leitor.

Como $\varphi \geq 0$ e $\varphi \wedge f \leq \varphi$, temos que $0 \leq \varphi - (\varphi \wedge f) \leq \varphi$. Vamos mostrar que

$$\text{(I)} \qquad \varphi - (\varphi \wedge f) \;\leq\; g.$$

De fato, para $x \in X$,

$*$ Se $f(x) \geq \varphi(x)$, então $[\varphi \wedge f](x) = f(x)$, e a desiqualdade em (I) segue da hipótese que $\varphi \leq f + g$;

$*$ Se $\varphi(x) \leq f(x)$, temos $[\varphi \wedge f](x) = \varphi(x)$ e portanto (I) segue de $0 \leq g(x)$.

Assim, $\varphi - (\varphi \wedge f) \leq g$, φ e o ítem (a) implica $\varphi - (\varphi \wedge f) \leq \varphi \wedge g$, que é equivalente à relação desejada. $\square$

Lema 3.75 *Para $f,\, g \in \mathbb{R}^X$,*

a) $f \wedge g \;=\; \dfrac{f \,+\, g \,-\, |f-g|}{2} \qquad e \qquad f \vee g \;=\; \dfrac{f \,+\, g \,+\, |f-g|}{2}.$

Em particular, $f^+ = \dfrac{f+|f|}{2}$ *e* $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$.

b) $-f \;\leq\; g \;\leq\; f \quad \Rightarrow \quad |g| \;\leq\; |f|$.

c) $|f \wedge g| \;\leq\; \max\,\{|f|,\, |g|\}$.

Prova. Basta lembrar que se $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ então

$$\min\,\{\alpha,\, \beta\} \;=\; \frac{\alpha \,+\, \beta \,-\, |\alpha-\beta|}{2} \quad \text{e} \quad \max\,\{\alpha,\, \beta\} \;=\; \frac{\alpha \,+\, \beta \,+\, |\alpha-\beta|}{2}. \qquad \square$$

Definição 3.76 *Seja $\langle L, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado.*

a) $\langle L, \leq \rangle$ é um **reticulado** *se para todo $a,\ b \in L$,*

$$a \wedge b \ =_{def} \inf \{a,\ b\} \quad e \quad a \vee b \ =_{def} \ \sup \{a,\ b\}$$

existem em L. A definição de inf *e* sup *é análoga à conhecida em $\mathbb{R}$: se $S \subseteq L$ e $x,\ y \in L$*

$*$ x é o **ínfimo** *de S ($x \ = \ \bigwedge S$) se*

(i) Para todo $s \in S$, $x \leq s$; *(ii) Se $y \leq s$, para todo $s \in S$, então $y \leq x$.*

$*$ x é o **supremo** *de S ($x \ = \ \bigvee S$) se*

(i) Para todo $s \in S$, $s \geq x$; *(ii) Se $y \geq s$, para todo $s \in S$, então $x \leq y$.*

b) Escrevemos $\top_L$ = $\sup L$ e $\perp_L = \inf L$, se existirem em L, denominados **top (ou maior elemento)** *e* **bottom (ou menor elemento)** *de L, respectivalmente.*

c) Um reticulado é **distributivo** *se satisfizer as leis em 3.74.(c).*

d) Um reticulado é **vetorial** *se L for um espaço vetorial real tal que multiplicação por escalar e soma são compatíveis com a ordem parcial em L, isto é, para $f,\ g,\ h \in L$ e $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$\begin{cases} [rvet\ 1] \ : \ f \leq g \quad \Rightarrow \quad f + h \ \leq \ g + h; \\ [rvet\ 2] \ : \ \lambda \geq 0 \quad e \quad f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda f \geq 0. \end{cases}$$

e) Seja E um espaço normado, que é um reticulado vetorial. E é um **reticulado normado** *se para todo $a,\ b \in E$,*

$$-a \ \leq \ b \ \leq \ a \quad \Rightarrow \quad \|b\| \ \leq \ \|a\|.$$

f) $\langle P, \leq \rangle$ é um **sub-reticulado** *de $\langle L, \leq \rangle$ se $P \subseteq L$, a ordem em P é a induzida por L e P é fechado em relação às operações $\wedge$ e $\vee$.*

g) $\langle P, \leq \rangle$ é um **sub-reticulado vetorial** *de $\langle L, \leq \rangle$ se se P é um sub-espaço vetorial e um sub-reticulado de L.*

Exercício 3.77 *a) Em um reticulado $\langle L, \leq \rangle$ as operações $\wedge$ e $\vee$ verificam as seguintes propriedades :*

[ret 1] : $\wedge$ e $\vee$ são associativas e comutativas;

[ret 2] : $a = a \wedge (a \vee b)$; $a = a \vee (a \wedge b)$.

b) Seja $\langle X, \wedge, \vee \rangle$ um conjunto com duas operações binárias, satisfazendo [ret 1] e [ret 2] em (a). Defina

$$a \leq b \quad sse \quad a \wedge b = a.$$

Mostre que $\langle X, \leq \rangle$ é um conjunto parcialmente ordenado e que com esta ordem parcial X é um reticulado tal que para todo $a,\ b \in X$

$$a \wedge b = \inf \{a,\ b\} \quad e \quad a \vee b = \sup \{a,\ b\}$$

na ordem $\leq$.

c) Todo sub-reticulado de um reticulado distributivo é distributivo.

Exemplo 3.78 1. É claro que $\mathbb{R}$ é um reticulado vetorial normado (pelo valor absoluto).

2. Com a ordem parcial introduzida acima, $\langle\, \mathbb{R}^X, \leq \,\rangle$ é um reticulado vetorial distributivo.

3. Seja $B = \{f \in \mathbb{R}^X : |f| \leq 1\}$; então B é um sub-reticulado de $\mathbb{R}^X$, mas não um sub-reticulado vetorial, pois B não é *sub-espaço* de $\mathbb{R}^X$. Note que como reticulado [30]

$$\top_B = 1 \quad \text{e} \quad \bot_B = -1.$$

Por outro lado, é evidente que $\mathbb{R}^X$ não possui nem $\top$ nem $\bot$.

4. Seja $\ell_\infty(X)$ o conjunto das funções *limitadas* em $\mathbb{R}^X$. Em $\ell_\infty(X)$ definimos

$$\|f\|_\infty \;=\; \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Então, $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma $\ell_\infty(X)$, com a qual é um espaço de Banach. Além disso, $\ell_\infty(X)$ é um sub-reticulado vetorial de $\mathbb{R}^X$ e uma *sub-álgebra* de $\mathbb{R}^X$, pois é fechado em relação a produtos e contém a imagem da função $\check{\cdot}$ que identifica as funções contantes em X com $\mathbb{R}$.

É consequência imediata de 3.75.(b) (e fácil verificar diretamente) que $\ell_\infty(X)$ é um reticulado normado, isto é,

$$-f \;\leq\; g \;\leq\; f \quad \Rightarrow \quad \|g\|_\infty \;\leq\; \|f\|_\infty.$$

Além disso, $\ell_\infty(X)$ também satisfaz (devido a 3.75.(b))

$$\|f \wedge g\|_\infty \;\leq\; \max\,\{\|f\|_\infty, \|g\|_\infty\}.$$ □

A caracterização de inf e sup em 3.75.(a) fornece outros exemplos de reticulados vetoriais normados e distributivos (são todos sub-reticulados de $\mathbb{R}^X$; 3.77.(c)).

Proposição 3.79 *a) Seja X um espaço topológico localmente compacto. Com as operações $\wedge$, $\vee$ induzidas por $\mathbb{R}^X$,*

(1) *$\mathbb{C}(X)$ é um reticulado vetorial distributivo;*

(2) *$\mathbb{C}_c(X)$ e $\mathbb{C}_0(X)$ são reticulados vetoriais normados (por $\|\cdot\|_\infty$) e distributivos.*

b) Sejam $\langle\, X, \Sigma, \mu \,\rangle$ é um espaço de medida e $1 \leq p \leq \infty$. Com as operações $\wedge$, $\vee$ induzidas por $\mathbb{R}^X$, os sequintes espaços são reticulados vetoriais normados e distributivos :

(1) *$L^p(\mu)$;*

(2) *Funções limitadas, nulas fora de um conjunto de medida nula;*

(3) *Funções simples, nulas fora de um conjunto de medida finita.*

Prova. Para (a) Basta lembrar que o valor absoluto e qualquer combinação linear de contínuas é contínua e aplicar o Lema 3.75.(a) para concluir que os espaços em questão são sub-reticulados de $\mathbb{R}^X$. Quanto ao fato de serem normados, isto vem imediatamente de 3.75.(b). Analogamente, verificamos (b). Os detalhes são deixados para o leitor. □

Definição 3.80 *Sejam L e P reticulados vetoriais. Uma função $f : L \longrightarrow P$ é* **positiva** *se para todo $a \in L$*

$$a \geq 0 \;\Rightarrow\; f(a) \geq 0.$$

Em particular, um funcional linear $f : L \longrightarrow \mathbb{R}$ é **positivo** *se $a \geq 0 \;\Rightarrow\; f(a) \geq 0$.*

[30] Lembre-se que estamos indentificando α com $\check{\alpha}$.

Exercício 3.81 *Seja $f : L \longrightarrow P$ uma função linear, onde L e P são reticulados vetoriais. As seguintes condições são equivalentes :*

$$(1)\ f \text{ é positiva;} \qquad (2)\ \forall\, a, b \in L, \quad a \leq b \ \Rightarrow \ f(a) \leq (b),$$

isto é, f é crescente.

Proposição 3.82 *a) Sejam L um reticulado normado e X um espaço compacto. Se T é uma aplicação linear positiva de $\mathbb{C}(X)$ em L, então T é contínua e $\|T\| \ = \ \|T(1)\|$.* [31]

b) Se T é um funcional linear positivo em $\mathbb{C}(X)$, então T é contínuo e $\|T\| \ = \ T(1)$.

Prova. a) Seja $\varphi \in \mathbb{C}(X)$ tal que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Como $-1 \leq \varphi \leq 1$, o Exercício 3.81 acarreta

(I)
$$T(-1) \ \leq \ T(\varphi) \ \leq \ T(1).$$

Já que $T(-1) = -\,T(1)$ e L é um reticulado normado, (I) implica $\|T(\varphi)\| \ \leq \ \|T(1)\|$. Pelo Teorema 3.7, T é contínuo. Além disso, como $\|1\|_\infty = 1$, temos $\|T\| = \|T(1)\|$. O ítem (b) é consequência de (a), já que em $\mathbb{R}$, $\|T(1)\| = |T(1)| = T(1)$, pois T é positivo. $\square$

Observe a generalidade da Proposição 3.82 : por 3.79, L pode ser $\mathbb{C}_0(Z)$, $C_c(Z)$, com Z localmente compacto, ou qualquer $L^p(\mu)$, entre tantos outros.

3.6 O Dual de $\mathbb{C}_c(X)$

Como aplicação do Teorema de Riesz (3.54) e dos resultados da seção 3.5, provaremos o

Teorema 3.83 (Riesz) *Seja X um espaço compacto Hausdorff e $\mathbb{C}_c(X)$ o espaço de Banach das funções reais contínuas em X, com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Se I é um funcional linear contínuo em $\mathbb{C}_c(X)$ então existem medidas de Borel regulares e positivas em X, μ^+ e μ^-, tal que para toda $f \in \mathbb{C}_c(X)$*

$$I(f) \ = \ \int_X f \, d\mu^+ - \int_X f \, d\mu^- \quad e \quad \|I\| \ = \ \mu^+(X) \ + \ \mu^-(X).$$

O Teorema 3.83 é consequência do Teorema 3.54 e do

Teorema 3.84 *Seja X um espaço compacto e I um funcional linear contínuo sobre $\mathbb{C}(X)$. Então, existem funcionais lineares positivos sobre $\mathbb{C}(X)$, I^+, I^-, tal que*

$$(1)\ \ I \ = \ I^+ - I^-; \qquad (2)\ \ \|I\| \ = \ I^+(\check{1}) \ + \ I^-(\check{1}).$$

Prova. Para f *positiva* em $\mathbb{C}(X)$ definimos

$$S(f) \ = \ \sup\,\{I(\varphi) : 0 \leq \varphi \leq f\}.$$

Como $I(0) = 0$, está claro que $S(f) \geq 0$. Além disso,

(I)
$$S(0) \ = \ 0 \ \text{ e } \ I(f) \ \leq \ S(f).$$

[31] Pela última vez : estamos identificando $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\check{\alpha}$.

Fato 3.85 *Se f, g são positivas em $\mathbb{C}(X)$ e $\lambda \geq 0$ é um real, então*

a) $f \leq g \;\; \Rightarrow \;\; S(f) \leq S(g)$;

b) $S(\lambda f) \;=\; \lambda S(f)$;

c) $S(f \,+\, g) \;=\; S(f) \,+\, S(g)$.

Prova. a) Segue imediatamente do fato que se $\varphi \in \mathbb{C}(X), \;\; \varphi \leq f \;\; \Rightarrow \;\; \varphi \leq g$.

b) Se $\lambda = 0$ nada há a provar. Se $\lambda \neq 0$ então

$$0 \leq \psi \leq \lambda f \quad \text{sse} \quad 0 \leq \frac{\psi}{\lambda} \leq f,$$

e portanto a linearidade de I acarreta

$$\begin{aligned} S(\lambda f) \;&=\; \sup\,\{I(\psi) : 0 \leq \psi \leq \lambda f\} \;=\; \sup\,\{I(\lambda(\psi/\lambda)) : 0 \leq \psi \leq \lambda f\} \\ &=\; \lambda\,\sup\,\{I(\psi/\lambda) : 0 \leq \psi \leq \lambda f\} \;=\; \lambda\,\sup\,\{I(\varphi) : 0 \leq \varphi \leq f\} \;=\; \lambda S(f). \end{aligned}$$

Se $0 \leq \varphi \leq f$ e $0 \leq \psi \leq g$, então $0 \leq \varphi + \psi \leq f + g$ e portanto, como

$$I(\varphi) + I(\psi) \;=\; I(\varphi \,+\, \psi) \;\leq\; S(f + g),$$

concluímos que $S(f) + S(g) \leq S(f + g)$. Por outro lado, se $0 \leq \varphi \leq f + g$, 3.75.(e) garante que

$$\varphi \;\leq\; (\varphi \wedge f) + (\varphi \wedge g).$$

Logo $0 \;\leq\; (\varphi - (\varphi \wedge g)) \;\leq\; f$ e portanto

$$I(\varphi) - I(\varphi \wedge g) \;=\; I(\varphi \,-\, (\varphi \wedge g)) \;\leq\; S(f),$$

isto é,

$$I(\varphi) \;\leq\; S(f) + I(\varphi \wedge g) \;\leq\; S(f) + S(g),$$

que fornece $S(f + g) \leq S(f) + S(g)$, completando a prova de (c) e do Fato.

O próximo passo é estender S ‘a todo $\mathbb{C}(X)$. Se $f \in \mathbb{C}(X)$ sejam h e k funções positivas em $\mathbb{C}(X)$, tais que $f + h$ e $f + k$ são positivas [32]. Então, o Fato 3.85.(c) implica que

$$S(f + h) + S(k) \;=\; S(f + h + k) \;=\; S(f + k) + S(k),$$

ou seja,

(II) $\qquad S(f + h) - S(h)$ independe de $h \geq 0$, tal que $f + h \geq 0$.

Definimos

$$I^{+}(f) \;=\; S(f + |f|) - S(|f|).$$

Claro que $I^{+}(f) = S(f)$, para toda $f \geq 0$ em $\mathbb{C}(X)$ e I^{+} é uma extensão de S à todo $\mathbb{C}(X)$.

Fato 3.86 *I^{+} é um funcional linear positivo em $\mathbb{C}(X)$, com $I(f) \leq I^{+}(f)$, $\forall \; f \geq 0$.*

Prova. Como I^{+} coincide com S nas funções positivas, segue de (I) que é uma função positiva e que $I(f) \leq I^{+}(f)$ sempre que $f \geq 0$; resta mostrar sua linearidade. Para f, $g \in \mathbb{C}(X)$, seja $k = |f| + |g|$. Então, (II) e 3.85.(c) implicam

[32] Lembre-se que f é *limitada* em X, devido à compacidade.

$$\begin{aligned}
I^+(f+g) &= S(f+g+|f|+|g|\ ) - S(|f|+|g|) \\
&= S((f+|f|)+(g+|g|)) - [S(|f|)+S(|g|)] \\
&= S(f+|f|) + S(g+|g|) - [S(|f|)+S(|g|)] \\
&= [S(f+|f|) - S(|f|)] \ + \ [S(g+|g|) - S(|g|)] \ = \ I^+(f) + I^+(g),
\end{aligned}$$

verificando a aditividade de I^+. Se $\lambda \geq 0$ em $\mathbb{R}$, 3.85.(b) acarreta

$$I^+(\lambda \mathrm{f}) \ = \ S(\lambda f + \lambda|f|) - S(\lambda|f|) \ = \ \lambda[S(f+|f|) - S(|f|)] \ = \ \lambda I^+(f).$$

Se $\lambda < 0$, então como $I^+(0) = S(0) = 0$ e $\lambda f + |\lambda| f = 0$, temos

$$0 \ = \ I^+(\lambda f + |\lambda| f) \ = \ I^+(\lambda f) + I^+(|\lambda| f) \ = \ I^+(\lambda f) + |\lambda| I^+(f),$$

e portanto, $I^+(\lambda f) \ = \ -|\lambda| I^+(f) \ = \ \lambda I^+(f)$, completando a prova do Fato 3.86.

Definimos $I^- = I^+ - I$; então, I^- é um funcional linear em $\mathbb{C}(X)$, que é positivo por 3.86. Além disso, temos

$$I \ = \ I^+ - I^-,$$

estabelecendo (1). Para verificar (2), seja $\varphi \in \mathbb{C}(X)$, tal que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Então, $|\varphi| \leq 1$ e o fato que I^+ e I^- são crescentes (3.81) fornece

$$I^+(\varphi) \leq I^+(1) \quad \text{e} \quad I^-(\varphi) \leq I^-(1).$$

Logo,

$$|I(\varphi)| \ = \ |I^+(\varphi) \ - \ I^-(\varphi)| \ \leq \ I^+(1) = I^-(1).$$

Para a igualdade em (2), seja $\varphi \in \mathbb{C}(X)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$. Então, $\|2\varphi \ - \ 1\|_\infty \leq 1$, e portanto

$$\|I\| \ \geq \ I(2\varphi \ - 1) \ = \ 2I(\varphi) - I(1).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|I\| \ &\geq \ \sup\ \{2I(\varphi) \text{ - } I(1) : 0 \leq \varphi \leq 1\} \ = \ 2\sup\ \{I(\varphi) : 0 \leq \varphi \leq 1\} \ - \ I(1) \\
&= \ 2S(1) - I(1) \ = \ 2I^+(1) - [I^+(1) - I^-(1)] \\
&= \ I^+(1) + I^-(1),
\end{aligned}$$

completando a prova. □

Prova do Teorema 3.83. Pelo Teorema 3.84, podemos escrever $I = I^+ - I^-$, onde I^+ e I^- são funcionais lineares positivos em $\mathbb{C}(X)$. Pelo Teorema 3.54 e o ítem (c) na Proposição 3.59, existem medidas de Borel regulares e positivas em X, μ^+, μ^-, tal que se $f \in \mathbb{C}(X)$, então

$$I^+(f) \ = \ \int_X f \, d\mu^+ \quad \text{e} \quad I^-(f) \ = \ \int_X f \, d\mu^-.$$

A afirmação (1) no enunciado de 3.83 segue imediatamente. Para (2), observe que

$$I^+(1) \ = \ \int_X 1 \, d\mu^+ \ = \ \mu^+(X) \quad \text{e} \quad I^-(1) \ = \ \int_X 1 \, d\mu^- \ = \ \mu^-(X),$$

e portanto 3.84.(2) fornece

$$\|I\| \ = \ \mu^+(X) + \mu^-(X),$$

como necessário. □

O Teorema 3.83 pode ser aplicado, juntamente com outras construções, para descrever os duais de alguns espaços interessantes. A maioria destas aplicações precisam de toplogia que está fora do escopo do curso. De toda forma, daremos os enunciados pertinentes.

Seja X um espaço localmente compacto. Seja $X^* = X \cup \{\omega\}$, onde ω é um elemento distinto dos de X. Seja

$$\mathcal{B} \;=\; \{V \subseteq X^* : V \text{ é aberto em } X \text{ ou } V = K^c, \text{ com } K \subseteq X, \text{ compacto}\}.$$

Teorema 3.87 *Seja X um espaço localmente compacto.*

a) A coleção $\mathcal{B}$ é fechada por interseções finitas.

b) Seja τ a família dos subconjuntos de X^* que são uniões de elementos de $\mathcal{B}$. Então

(1) τ é uma topologia Hausdorff em X^*, que contém a topologia original de X;

(2) Com a topologia τ, X^* é compacto e X é um aberto denso em X^*.

c) Seja $\mathbb{C}_\omega(X^*) = \{f \in \mathbb{C}(X^*) : f(\omega) = 0\}$. Então,

(1) $\mathbb{C}_\omega(X^*)$ é um subespaço fechado de $\mathbb{C}(X^*)$;

(2) $\mathbb{C}_0(X)$ é linearmente isométrico a $\mathbb{C}_\omega(X^*)$.

Prova. O leitor certamente deveria tentar fazer ! $\square$

O espaço X^* denomina-se o **compactificado de um ponto ou de Alexandroff** do localmente compacto X. Como resultado desta construção e de 3.83 podemos obter

Teorema 3.88 *Seja X um espaço localmente compacto e I um funcional linear contínuo em $\mathbb{C}_0(X)$. Então existem medidas de Borel regulares, positivas e finitas em X, μ^+, μ^-, tais que se $f \in \mathbb{C}_0(X)$*

$$(1)\ I(f) \;=\; \int_X f\, d\mu^+ - \int_X f\, d\mu^-; \qquad (2)\ \|I\| \;=\; \mu^+(X) + \mu^-(X).$$

Para os espaços do tipo $L^\infty(\mu)$, temos o seguinte

Teorema 3.89 *Seja $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ um espaço de medida. Então existe um espaço compacto Hausdorff S tal que $L^\infty(\mu)$ é linearmente isométrico a $\mathbb{C}(S)$.*

Há muitas provas de 3.89; mas um lógico certamente prefere a que utiliza **Dualidade de Stone**. Infelizmente, não iremos discutir este assunto no curso. Está claro que deve ser possível utilizar 3.89 e 3.83 para ter uma idéia do dual de $L^\infty(\mu)$.

Na seção que segue, ocupar-nos-emos de descrever os duais de $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, quando σ é uma medida σ-finita (3.69.(c)).