2. Palestra 2. Representaçoes irredutíveis e indecomponíveis. Teorema de densidade.

2.1. Representaçoes indecomponíveis e teorema de densidade.

Definição 8. A *soma direta* de duas representaçoes V_1 e V_2 de uma álgebra A é uma representação $V_1 \oplus V_2$ com ação $\rho(x, y) = \rho_1(x) \oplus \rho_2(y)$.

Definição 9. Uma representação $V \neq 0$ de uma álgebra A é *indecomponível* se não é isomorfo a uma soma direta de duas representações diferentes de zero.

Se uma representação é irredutível, então é indecomponível. O inverso é falso em geral (ver nos exemplos).

Definição 10. Uma representação de A é *semi-simples* se ele é uma soma direta de representações simples (irredutível).

Exemplo 6. Alguns exemplos:

(1) Suponha que $V_1 = k$ é representação 1-dimensional de k. Então a soma direta $V_1 \oplus V_1$ é $k \oplus k$ com
$$\rho : x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad x \in k$$
(2) Seja $V = k^2$ uma representação de $k[x]$ dada por
$$\rho : x \mapsto \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad x \in k.$$
Esta representação é indecomponível, mas não irredutível (o subespaço
$$\{(x, 0) \mid x \in k\}$$
é invariante). Em particular, não é semi-simples.

(3) Seja V uma representação irredutível de A de dimensão n. Então $Y = \mathrm{End}(V)$, com ação de A por multiplicação à esquerda, é uma representação semisimples de A, isomorfo a nV (a soma direta de n cópias de V). Na verdade, qualquer base $v_1, \ldots, v_n$ de V dá origem a um isomorfismo de representações $\mathrm{End}(V) \to nV$, dado por $x \mapsto (xv_1, \ldots, xv_n)$.

Vamos discutir o caso $A = k[x]$. Esta é uma álgebra comutativa então representações irredutíveis de A são sempre representações 1-dimensionais $\rho(x) = \lambda \in k$.

A classificação das representações indecomponíveis de $k[x]$ é mais interessante. Lembre-se que qualquer operador linear em um espaço vetorial V de dimensão finita, pode ser reduzida para a forma normal de Jordan. Mais especificamente, o bloco de Jordan $J_{\lambda,n}$ é o operador em k^n que age na base como $J_{\lambda,n}e_i = \lambda e_i + e_{i-1}$ para $i > 1$, e $J_{\lambda,n}e_1 = \lambda e_1$. Para qualquer operador linear $B : V \to V$ existe uma base de V tal que a matriz de B nesta base é uma soma direta de blocos de Jordan. Isto implica que todas as representações indecomponíveis de A são $V_{\lambda,n} = k^n, \lambda \in k$, com $\rho(x) = J_{\lambda,n}$. O fato de que estas representações são indecomponível e pares não-isomórfica resulta do teorema da forma normal de Jordan (o que em particular diz que a forma normal de Jordan de um operador é único salvo permutação de blocos).

Proposição 5. Sejam $V_1, \dots, V_m$ representações não-isomorficas irredutíveis de dimensão finita de A, e W é um subrepresentaçao de $V = \oplus_{i=1}^m n_i V_i$. Então W é isomorfo a $\oplus_{i=1}^m r_i V_i$, $r_i \le n_i$, e a inclusão $\varphi : W \to V$ é uma soma direta de inclusões $\varphi_i : r_i V_i \to n_i V_i$ dado pela multiplicação de um vetor de elementos de V_i por uma matriz X_i de tamanho $r_i \times n_i$ com linhas linearmente independentes: $\varphi(v_1, \dots, v_{r_i}) = (v_1, \dots, v_{r_i}) x_i$.

Demonstração. A demonstração é por indução em $n := \sum_{i=1}^m n_i$. A base da indução $n = 1$ é clara. Para executar o passo de indução, vamos supor que W é diferente de zero, e estabelecer uma subrepresentação irredutível $P \subset W$. Lembre-se que tal P existe. Pelo Lema de Schur, P é isomorfo a V_i para algum i, e a inclusão $\varphi : P \to V$ fatora através de $n_i V_i$, e depois a identificação de P com V_i é dada pela fórmula $v \mapsto (vq_1, \dots, vq_{n_i})$, onde $q_l \in k$ não são todos zero.

Agora, nos temos que o grupo $G_i = GL_{n_i}(k)$ de matrizes invertíveis $n_i \times n_i$ sobre k atua na $n_i V_i$ por $(v_1, \dots, v_{n_i}) \mapsto (v_1, \dots, v_{n_i}) g_i$ (e pela identidade em $n_j V_j$, $j \neq i$), e, então atua no conjunto de subrepresentações de V, preservando a propriedade que queremos mostrar: sobre a ação de g_i a matriz X_i vai para $X_i g_i$, e $X_j, j \neq i$ não mudam. Tome $g_i \in G_i$ tal que $(q_1, \dots, q_{n_i}) g_i = (1, 0, \dots, 0)$. Então W_{g_i} contém o primeiro termo da soma V_i de $n_i V_i$ (é Pg_i). Então $Wg_i = V_i \oplus W'$, onde $W' \subset n_1 V_1 \oplus \cdots \oplus n_m V_m$ o kernel da projeção de Wg_i para o primeiro somando V_i. Assim, a declaração exigida segue do pressuposto de indução.

$\square$

Corolário 6. *Seja V uma representação irredutível de dimensão finita de A e $v_1, \dots, v_n \in V$ são vetores linearmente independentes. Então, para qualquer $w_1, \dots, w_n \in V$ existe um elemento $a \in A$ tal que $av_i = w_i$.*

Demonstração. Suponha o contrário. Em seguida, a imagem da aplicação $A \to nV$ dada por $a \mapsto (av_1, \dots, av_n)$ é um subrepresentação corresponde a uma $r \times n$ matriz X, $r < n$. Assim, tomando $a = 1$, temos que existem vetores $u_1, \dots, u_r \in V$ tal que $(u_1, \dots, u_r)x = (v_1, \dots, v_n)$. Seja $(q_1, \dots, q_n)$ um vetor não nulo tal que $X(q_1, \dots, q_n)T = 0$ (existe porque $r < n$). Então

$$\sum q_i v_i = (u_1, \dots, u_r) X (q_1, \dots, q_n) T = 0.$$

Então $Pq_i v_i = 0$. Contradição com a independência linear de v_i. $\square$

Teorema 7. *(Teorema de Densidade).*

(i) *Seja V uma representação irredutível de dimensão finita de A. A aplicação $\rho : A \to \mathrm{End} V$ é sobrejetiva;*
(ii) *Seja $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$, onde V_i são representações irredutíveis não isomorfas de A. A aplicação $\oplus_{i=1}^r \rho_i : A \to \oplus_{i=1}^r \mathrm{End}(V_i)$ é sobrejetiva.*

Demonstração. (i) Seja B a imagem de A em $\mathrm{End}(V)$. Nosso objetivo é mostrar que $B = \mathrm{End}(V)$. Seja $c \in \mathrm{End}(V)$, $v_1, \dots, v_n$ uma base de V e $w_i = cv_i$. Pelo Corolário 6, existe $a \in A$ tal que $av_i = w_i$. Então $\rho(a) = c$, para $c \in B$. Então afirmação (i) segue.

(ii) Seja B_i a imagem de A em $\mathrm{End}(V)$, e B a imagem de A em $\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}(V_i)$. Lembre-se que como uma representação de A, $\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}(V_i)$ é semisimples: é isomorfo a $\oplus_{i=1}^r d_i V_i$, onde $d_i = \dim V_i$. Então, pela Proposição 2.2, $B = \oplus_i B_i$. Por outro lado, (i) implica que $B_i = \mathrm{End}(V_i)$. Assim (ii) segue.

□

2.2. **Soma direta de álgebras matriciais.**

Definição 11. Seja A uma álgebra. A *álgebra dual* $A^{op} = a \in A$ é uma álgebra com a multiplicação $a \cdot b = ba$.

Definição 12. (Representação Dual) Seja V uma representação de qualquer álgebra A. A representação dual V^* é a representação da álgebra dual A^{op} com a ação

$$\rho : a \mapsto \phi_a \in \mathrm{End}(V^*), \quad \phi_a(f(v)) = f(av).$$

Soma direta de álgebras de matriz é uma álgebra $A = \oplus_{i=1}^r \mathrm{Mat}_{d_i}(k)$.

Teorema 8. *Seja* $A = \oplus_{i=1}^r \mathrm{Mat}_{d_i}(k)$. *Então as representações irredutíveis de* A *são* $V_1 = k^{d_1}, \ldots, V_r = k^{d_r}$ *e qualquer representação de dimensão finita de* A *é uma soma direta de copias de* $V_1, \ldots, V_r$.

Demonstração. Primeiro, as representações dadas são claramente irredutíveis, porque para qualquer $v \neq 0$, $w \in V_i$, existe $a \in A$ tal que $av = w$. Seja X uma n-dimensional representação de A. Então, X^* é uma representação n-dimensional de A^{op}. Mas $(\mathrm{Mat}_{d_i}(k))^{op} \cong \mathrm{Mat}_{d_i}(k)$ com isomorfismo $\varphi(X) = X^T$, $(BC)^T = C^T B^T$. Assim, $A \cong A^{op}$ e X^* pode ser como uma representação n-dimensional de A. Defina

$$\varphi : \oplus_{i=1}^n A \mapsto X^*$$

pelo

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) = a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n,$$

onde $\{y_i\}$ é uma base de X^*. φ é claramente sobrejetora, porque $k \subset A$. Assim, a aplicação dual $\varphi^* : X \to A^{n*}$ é injetora. Mas $A^{n*} \cong A^n$ como representaçoes de A. Assim, $\mathrm{Im}\varphi^* \cong X$ é uma subrepresentação de A^n. Também, $\mathrm{Mat}_{d_i}(k) = d_i V_i$, assim $A = \oplus_{i=1}^r d_i V_i$, $A^n = \oplus_{i=1}^r n d_i V_i$, como uma representação de A. Então $X = \oplus_{i=1}^r m_i V_i$. □

Trabalho de casa.

(1) Seja $A = \mathbb{C}[G]$ uma álgebra de grupo finito G. Mostra que uma representaçao V de A é indecomponível se, e somente se, é irredutível.