INTRODUÇÃO À TEORIA DA REPRESENTAÇÃO.

1. Palestra 1. Fatos básicos e álgebras e suas representações.

1.1. **Qual é a teoria das representações?** Teoria das representações estuda estruturas abstratas algébricas representando seus elementos como estruturas em álgebras lineares, como vetores espaços e transformações lineares entre eles.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{estruturas abstractas} \\ \text{algébricas} \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{objetos concretos na álgebra linear} \\ \text{que "respeitam" estrutura abstrata} \end{array} \right\}$$

Estruturas algébricas podem ser muito diferentes. Nos vamos estudar em nossos seminários:

- grupos;
- álgebras associativas;
- álgebras de Lie;
- quivers;
- posets.

Por outro lado, os objetos em álgebra linear geralmente são:

- espaços vetoriais (unitário);
- transformações entre eles.

Por que é interessante?

Existem basicamente várias razões. A representação faz um objeto abstrato algébrico mais concreto, descrevendo os seus elementos como as matrizes e as operações algébricas em termos de adição de matrizes e multiplicação de matrizes. Daí a teoria da representação é uma poderosa ferramenta para reduzir os problemas de álgebra abstrata para problemas de álgebra linear. Se um espaço vetorial de dimensão infinita (espaço de Hilbert por examplo), a teoria da representação injeta métodos de análise funcional para a teoria do grupo (por exemplo). Assim, essa teoria fornece os pontes entre diferentes áreas da matemática.

Quais são problemas típicos?

O problema típico é:

classificar todas as representações de uma dada estrutura algébrica.

Para este definimos *simples* representações e *isomorfismos* entre representações. Em alguns casos é possível mostrar que qualquer representação é uma soma de simples. Daí o problema principal se reduz à seguinte classificar todos representações *simples* (salvo *isomorfismos*).

Quais são os métodos típicos?

Grosseiramente falando, estudando as representações de "qualquer" estrutura algébrica pode ser reduzido a estudar as representações da álgebra associativa. Por exemplo

- repr. de grupos $\Longleftrightarrow$ repr. de álgebras de grupo;
- repr. de álgebras de Lie $\Longleftrightarrow$ repr. de álgebra envelopante;
- repr. de quivers $\Longleftrightarrow$ repr. de álgebras de caminhos;
- repr. de posets $\Longleftrightarrow$ repr. de álgebras de incidência.

Assim, teoria das representações estuda representaçãos de álgebras associativas.

Estudar as representações de uma álgebra, é mais ou menos, o mesmo que estudar os módulos sobre esta álgebra. Assim, a teoria de módulos é importante na teoria da representação.

Hoje vou relembrar fatos básicos sobre álgebras associativas e irei introduzir conceitos básicos sobre suas representações.

1.2. **Fatos básicos sobre álgebras associativas.** Seja k um corpo. Nós sempre assumimos que k é algebricamente fechado. Nosso corpo básico é o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

Definição 1. Algebra associativa sobre k é um espaço vetorial A sobre k juntamente com uma aplicação bilinear $A \times A \to A, (a, b) \to ab$, tal que $(ab)c = a(bc)$.

Definição 2. Uma unidade em uma álgebra associativa A é um elemento $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$ para todos $a \in A$.

Proposição 1. Se uma unidade existe, ela é única.

Demonstração. Sejam $1, 1'$ duas unidades. Então $1 = 11' = 1'$. □

Exemplo 1. Alguns exemplos de álgebras sobre k:

(1) $A = k$;
(2) $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ — a álgebra de polinômios em variáveis $x_1, \ldots, x_n$;
(3) $A = \mathrm{End}V$ — a álgebra de endomorfismos de um espaço vetorial V sobre k (ou mapas lineares de V em V). A multiplicação é composição dos operadores;
(4) A álgebra livre $A = k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. A base desta álgebra consiste de palavras em letras $x_1, \ldots, x_n$, e multiplicação nesta base é simplesmente a concatenação de palavras;
(5) A álgebra de grupo $A = k[G]$ de um grupo G. Sua base é $\{a_g, g \in G\}$, com a multiplicação $a_g a_h = a_{gh}$.

Uma álgebra A é *comutativa* se $ab = ba$ para todos $a, b \in A$.

Pergunta 1. Que álgebras em exemplos anteriores são comutativas?

Definição 3. Um homomorfismo de álgebras $f : A \to B$ é uma aplicação linear tal que $f(xy) = f(x)f(y)$ para todos $x, y \in A$ e $f(1) = 1$.

1.2.1. *Ideal e Quocientes.* A *esquerda* ideal de uma álgebra A é um subespaço $I \subseteq A$ tal que $aI \subseteq I$ para todos $a \in A$. Da mesma forma, um ideal *direito* de uma álgebra A é um subespaço $I \subseteq A$ tais que $Ia \subseteq I$ para todos $a \in A$. Um ideal de dois lados é um subespaço que seja ideal à esquerda e um ideal à direita.

Exemplo 2. Alguns exemplos de ideais

(1) Se A é qualquer álgebra, 0 e A são ideais de dois lados. Uma álgebra A é chamada de *simples* se 0 e A são seus únicos ideais de dois lados;
(2) Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras, então $\ker\varphi$ ideal de dois lados de A.
(3) Se S é qualquer subconjunto de uma álgebra A, então o ideal *gerado* por S é denotado $\langle S\rangle$ é o conjunto de elementos do formulário asb, onde $a, b \in A$ e $s \in S$. Da mesma forma podemos definir $\langle S\rangle_l = \mathrm{span}\{as\}$ e $\langle S\rangle_r = \mathrm{span}\{sb\}$ a esquerda e direito ideais gerado por S.

Seja A uma álgebra e I a ideal de dois lados em A. Então A/I é grupo quociente de I. Seja $\pi : A \to A/I$ a aplicação quociente. Podemos definir a multiplicação em A/I, $\pi(a)\pi(b) := \pi(ab)$. Este está bem definida. De fato, se $\pi(a) = \pi(a')$, em seguida,

$$\pi(a'b) = \pi(ab + (a' - a)b) = \pi(ab) + \pi((a' - a)b) = \pi(ab),$$

porque $(a' - a)b \in Ib \subseteq I = \ker\pi$, pois I é um ideal à direita. Se $\pi(b) = \pi(b')$, em seguida,

$$\pi(ab') = \pi(ab + a(b' - b)) = \pi(ab) + \pi(a(b' - b)) = \pi(ab),$$

porque $a(b' - b) \in aI \subseteq I = \ker\pi$, pois I é também um ideal esquerdo. Assim, A/I é uma álgebra.

1.3. **Representações.**

Definição 4. Uma representação de uma álgebra A é um espaço vetorial V com um homomorfismo de álgebras $\rho : A \to \mathrm{End}V$.

Exemplo 3. Alguns exemplos de representações:

(1) $V = 0$.
(2) $V = A$, e $\rho : A \to \mathrm{End}A$ é definido da seguinte forma: $\rho(a)$ é o operador de multiplicação à esquerda por a: $\rho(a)b = ab$ (o produto usual). Esta representação é chamada de *representação regular* de A.
(3) $A = k$. Neste caso, uma representação de A é simplesmente um espaço vetorial sobre k.
(4) $A = k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Neste caso, uma representação de A é apenas um espaço vetorial V sobre k com uma coleção arbitrária de operadores lineares $\rho(x_1), \ldots, \rho(x_n) : V \to V$.

Definição 5. Uma subrepresentação de uma representação V de uma álgebra A é um subespaço $W \subset V$ que é invariante sobre todos os operadores $\rho(a) : V \to V$, $a \in A$. $\rho(a)(w) \in W$ para todos $w \in W$ e $a \in A$.

Exemplo 4. 0 e V são sempre subrepresentaçãoes.

Definição 6. Uma representação $V \neq 0$ de A é irredutível (ou simples), se as subrepresentaçãoes dele são somente 0 e V.

Definição 7. Seja V_1, V_2 duas representações de uma álgebra A. Um homomorfismo $\varphi : V_1 \to V_2$ é um operador linear que comuta com a ação de A, ou $\varphi(av) = a\varphi(v)$ para qualquer $v \in V_1$. Um homomorfismo φ é isomorfismo de representações se é um isomorfismo de espaços vetoriais. O conjunto (espaço) de todos os homomorfismos de representações $V_1 \to V_2$ é denotada por $\mathrm{Hom}_A(V_1, V_2)$.

Vamos agora provar o nosso primeiro resultado - lema de Schur. Embora seja muito fácil de provar, é fundamental em todo o assunto da teoria da representação.

Proposição 2. (lemma de Schur) Sejam V_1, V_2 representações de uma álgebra A em qualquer corpo k (que não precisa ser algebricamente fechado). Seja $\varphi : V_1 \to V_2$ um homomorfismo não nulo de representações. Então:

(i) Se V_1 é simple então φ é injetora;
(ii) Se V_2 é simple então φ é sobrejetora.

Assim, se V_1 e V_2 são simples, então φ é um isomorfismo.

Demonstração. (i) O kernel de φ é uma subrepresentação K de V_1. $\varphi \neq 0$, então este subrepresentação não pode ser V_1. Então, pela simplicidade de V_1 temos que $K = 0$. (ii) A imagem I de φ é uma subrepresentação de V_2. $\varphi \neq 0$, este subrepresentação não pode ser 0. Então, pela simplicidade de V_2 temos que $I = V_2$. $\square$

Corollary 3. *(Lema de Schur para corpos algebricamente fechado) Seja V é um representação simples de dimensão finita de uma álgebra A sobre um corpo algebricamente fechado k e $\varphi : V \to V$ é um homomorphismo. Então $\varphi = \lambda I$ para algum $\lambda \in k$ (um operador escalar).*

Corollary 4. *Seja A uma álgebra comutativa. Então, cada representação simples de dimensâo finita V de A é 1-dimensional.*

Exemplo 5. Alguns exemplos básicos

- $A = k$. As representações de A são simplesmente espaços vetoriais, então $V = A$ irredutível.
- $A = k[x]$. Esta álgebra é comutativa, então as representações irredutíveis de A são sempre representações 1-dimensional. Elas são definidas por um único operador $\rho(x)$. No caso 1-dimensional, este é um número de k. Assim, todas as representações irredutíveis de A são $V_\lambda = k, \lambda \in k$. A ação de A é definida por $\rho(x) = \lambda$. Claramente, estas representações são não-isomorfas.
- A álgebra de group $A = k[G]$, onde G é um grupo. Uma representação de A é a mesma coisa que uma representação de G, ou seja, um espaço vetorial V junto com um homomorfismo $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$.