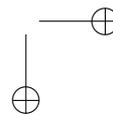
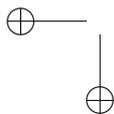
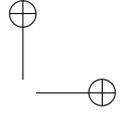
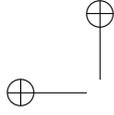


# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>v</b>
<b>1 Métricas Finsler</b>	<b>1</b>
1.1 Métricas . . . . .	1
1.1.1 A métrica Funk . . . . .	2
1.2 Espaços de Minkowski . . . . .	3
1.2.1 Normas do tipo Randers . . . . .	6
1.3 Métricas Finsler . . . . .	6
1.3.1 Métricas Riemannianas . . . . .	7
1.3.2 Métricas Finsler do tipo Randers . . . . .	8
1.3.3 Métricas Finsler do tipo Zermelo . . . . .	8
1.3.4 Métricas Finsler do tipo $(\alpha, \beta)$ . . . . .	9
1.4 Geodésicas - Um princípio variacional . . . . .	10
1.5 Outros exemplos de métricas Finsler . . . . .	13
1.5.1 A métrica de Katok: apenas 2 geodésicas fe- chadas em $S^2$ . . . . .	13
1.5.2 As métricas de Shen: a lagoa e o tanque de peixes	14
1.5.3 A métrica de Matsumoto: inclinação da montanha . . . . .	15
<b>2 Conexões e Curvaturas</b>	<b>17</b>
2.1 Distribuições horizontais e a conexão de Grifone . . . .	17
2.2 <i>Sprays</i> . . . . .	22
2.3 Métricas Finsler . . . . .	24
2.4 Conexões . . . . .	32
2.5 Conexões Finslerianas . . . . .	36



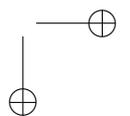
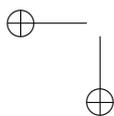
2.5.1	Torção de uma conexão . . . . .	37
2.5.2	A conexão de Berwald . . . . .	38
2.5.3	A conexão de Cartan . . . . .	41
2.5.4	A conexão de Chern-Rund . . . . .	45
2.5.5	A conexão de Hashiguchi . . . . .	46
2.5.6	Conexões Finslerianas simétricas . . . . .	47
2.5.7	Levantamentos regulares da conexão de Grifone . . . . .	48
2.5.8	Derivadas covariantes e transporte paralelo . . . . .	49
2.6	O tensor de Curvatura de uma conexão de Finsler . . . . .	52
2.6.1	A curvatura de Riemann . . . . .	53
2.6.2	A curvatura bandeira . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Teoria de Morse e algumas aplicações</b> . . . . .	<b>60</b>
3.1	Rudimentos em teoria de Morse . . . . .	60
3.2	Geometria Finsler: uma rápida revisão . . . . .	63
3.3	Derivada covariante ao longo de uma geodésica . . . . .	65
3.4	Campos de Jacobi e o fluxo geodésico linearizado . . . . .	66
3.5	Aplicação exponencial . . . . .	70
3.6	Espaços de caminhos . . . . .	73
3.7	Primeira variação da energia . . . . .	75
3.8	Segunda variação da energia . . . . .	75
3.9	Teoria de Morse para a energia . . . . .	86
3.10	Aplicações . . . . .	88
3.10.1	Geodésicas em esferas . . . . .	88
3.10.2	Teorema de Auslander: uma versão Finsler para o teorema de Bonnet-Myers . . . . .	89
3.10.3	Uma versão Finsler para o teorema de Cartan-Hadamard . . . . .	90
3.10.4	O teorema da esfera de Rademacher . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Variedades simpléticas e de contato</b> . . . . .	<b>96</b>
4.1	Álgebra linear simplética rudimentar . . . . .	96
4.2	Variedades simpléticas e sistemas Hamiltonianos . . . . .	104
4.3	Equações de Euler-Lagrange . . . . .	109
4.3.1	Transformada de Legendre . . . . .	110
4.3.2	O fluxo de Euler-Lagrange . . . . .	111
4.3.3	O caso Finsler: $L = \frac{1}{2}F^2$ . . . . .	113
4.3.4	$N$ -corpos celestes . . . . .	114

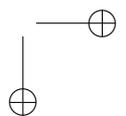
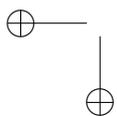
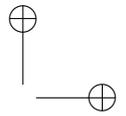
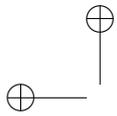


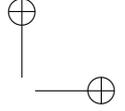
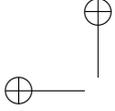
CONTEÚDO

iii

4.3.5	Princípios variacionais . . . . .	116
4.3.6	O caso homogêneo . . . . .	117
4.4	Noções em geometria de contato . . . . .	122
4.4.1	Hipersuperfícies com tipo de contato . . . . .	122
4.4.2	Formas de contato e o campo de Reeb . . . . .	123
4.4.3	Estruturas de contato . . . . .	128
4.4.4	EDPs e geometria Finsler: cáusticas e pontos mínimos . . . . .	143
<b>5</b>	<b>Dinâmica simplética</b> . . . . .	<b>155</b>
5.1	Índice de Conley-Zehnder . . . . .	155
5.2	Convexidade dinâmica . . . . .	165
5.2.1	Níveis convexos . . . . .	166
5.2.2	A definição de convexidade dinâmica . . . . .	167
5.2.3	Topologia e convexidade dinâmica . . . . .	173
5.2.4	Convexidade dinâmica e fluxos geodésicos em $S^2$ . . . . .	175
5.2.5	Seções globais para formas não-dinamicamente convexas . . . . .	188
5.3	O Teorema de Poincaré-Birkhoff . . . . .	188
5.3.1	A versão clássica . . . . .	189
5.3.2	Fluxos de Reeb e o link de Hopf . . . . .	190
5.3.3	O Número de rotação . . . . .	193
5.3.4	A versão para fluxos de Reeb . . . . .	194
5.3.5	O fibrado unitário de $S^2$ . . . . .	195
5.3.6	$(p, q)$ -satélites . . . . .	197





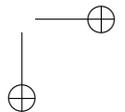
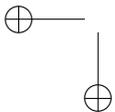


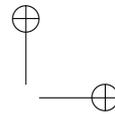
# Prefácio

Pode-se dizer que o que se conhece hoje por Geometria Finsler tem suas origens nos trabalhos de B. Riemann a partir de 1854, porém seu nome se deve ao matemático alemão Paul Finsler (1894-1970), que estudou diversos fundamentos dessa geometria em cálculo das variações, publicando sua tese em 1918. Variedades Finsler generalizam variedades Riemannianas onde a norma de uma forma quadrática positiva definida é substituída por uma norma com propriedades mais fracas, a chamada norma de Minkowski. Modelos dinâmicos descritos pela Geometria Finsler aparecem naturalmente em diversas áreas como mecânica clássica, ótica geométrica, mecânica quântica etc. A partir de Finsler, diversos matemáticos tiveram importância central para o desenvolvimento desta teoria no século XX, como L. Berwald, E. Cartan, S-S. Chern e outros.

Nestas notas fazemos uma breve introdução à Geometria Finsler e estudamos alguns aspectos dinâmicos de seus fluxos geodésicos. Em particular, descrevemos algumas aplicações da teoria moderna de dinâmica simplética ao estudo dos fluxos geodésicos.

No capítulo 1 apresentamos alguns exemplos clássicos de métricas Finsler, e descrevemos o princípio variacional que determina o fluxo geodésico. O exemplo de Katok em  $S^2$  possui apenas duas geodésicas fechadas e mostra como a dinâmica do fluxo geodésico no caso Finsler pode diferir do caso Riemanniano. No capítulo 2, estudamos estruturas geométricas associadas a métricas Finsler como conexões e curvaturas. Nossa abordagem é totalmente intrínseca e segue o formalismo de J. Grifone. A curvatura bandeira, que generaliza a curvatura seccional em geometria Riemanniana, tem papel central para o entendimento dos campos de Jacobi, ou mais precisamente, para

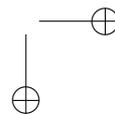
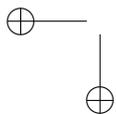


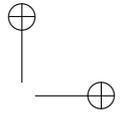
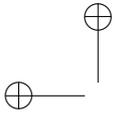


o estudo do fluxo geodésico linearizado. No capítulo 3, adaptamos para o caso Finsler os fundamentos da teoria de Morse clássica para geodésicas de métricas Riemannianas. Aqui o leitor deve estar atento para algumas diferenças sutis entre os casos Riemanniano e Finsleriano relacionadas com a falta de reversibilidade. No capítulo 4, fazemos uma rápida introdução aos conceitos mais básicos em geometria simplética e de contato, e exploramos algumas conexões com a geometria Finsler. Finalmente, no capítulo 5 estudamos o fluxo geodésico do ponto de vista da dinâmica simplética. Várias aplicações são apresentadas, destacando um teorema de Poincaré-Birkhoff para fluxos de Reeb em  $S^3$ .

Algumas referências foram fundamentais para a elaboração deste texto: os livros de S-S.Chern e Z. Shen [6], de Z. Shen [36] e de V. I. Arnold [2], os artigos de J.Grifone [10, 11] e o artigo de J. Szilasi [37].

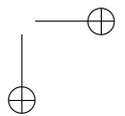
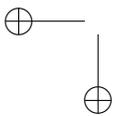
Esta é uma versão revisada daquela publicada pelo IMPA pelo XXIX Colóquio Brasileiro de Matemática, realizado em 2013. Agradecemos Diego Sandoval Salazar pela leitura cuidadosa dos capítulos 1 e 2, e pela sugestão de diversas pequenas correções e melhoramentos.

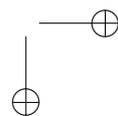
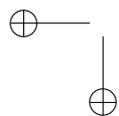
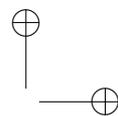
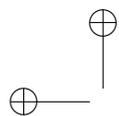




*Dedicado à memória de*

Fernando Pinto Peixoto  
Elza de Faria Peixoto





## Capítulo 1

# Métricas Finsler

Métricas Finsler são generalizações naturais de normas Riemannianas onde a norma de um produto interno positivo-definido é substituída por uma norma de Minkowski. Vários fenômenos dinâmicos, que podem ser modelados pelo fluxo geodésico de uma métrica Finsler, não são contemplados pelo caso Riemanniano. Uma característica peculiar é a não-reversibilidade do fluxo geodésico. Como consequência, a questão da existência e multiplicidade de geodésicas fechadas pode ser bastante distinta do caso Riemanniano. Neste capítulo, apresentamos alguns exemplos de métricas Finsler bastante conhecidas na literatura.

### 1.1 Métricas

Seja  $M$  um conjunto qualquer.

**Definição 1.1.1.** Dizemos que  $d : M \times M \rightarrow [0, +\infty)$  é uma métrica em  $M$  se

$$(i) \quad d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q, \forall p, q \in M.$$

$$(ii) \quad d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q), \forall p, q, r \in M.$$

Se  $d$  ainda satisfizer

$$(iii) \quad d(p, q) = d(q, p), \forall p, q \in M,$$

então dizemos que  $d$  é reversível. Caso contrário, dizemos que  $d$  é não-reversível.

**Exercício 1.1.2.** *Seja  $V$  um espaço vetorial munido de um produto interno positivo definido  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Mostre que  $d(p, q) := \sqrt{\langle p - q, p - q \rangle}$  é uma métrica reversível em  $V$ .*

### 1.1.1 A métrica Funk

Em [36], encontramos o seguinte exemplo. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um aberto limitado e convexo cujo bordo topológico  $\partial\Omega$  é a imagem de uma curva suave fechada simples com curvatura não-nula. Dados  $p \neq q \in \Omega$ , seja  $z_{pq}$  a intersecção de  $\partial\Omega$  com a semi-reta por  $p$  que passa em  $q$ . Definimos

$$d_F(p, q) := \ln \frac{|z_{pq} - p|}{|z_{pq} - q|} \geq 0.$$

Definimos também  $d_F(p, p) = 0, \forall p \in \Omega$ .

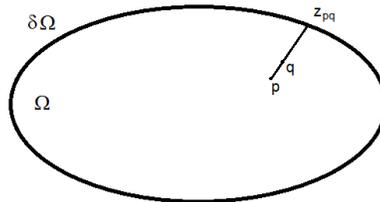


Figura 1.1: A métrica Funk em  $\Omega$ .

**Exercício 1.1.3.** *Mostre que  $d_F$  satisfaz a desigualdade triangular.*

É sempre possível encontrar  $p \neq q$  tais que  $d(p, q) \neq d(q, p)$ , veja Figura 1.1. Portanto,  $d_F$  é uma métrica não-reversível em  $\Omega$ , chamada de métrica Funk em  $\Omega$ .

## 1.2 Espaços de Minkowski

Seja  $V$  um espaço linear real de dimensão finita.

**Definição 1.2.1.** Dizemos que a função contínua  $F : V \rightarrow [0, +\infty)$  é uma norma de Minkowski em  $V$  se

- (i)  $F$  é  $C^\infty$  em  $V \setminus \{0\}$ .
- (ii)  $F(\lambda y) = \lambda F(y), \forall y \in V, \lambda \geq 0$ . Diz-se que  $F$  é positivamente homogênea de grau 1.
- (iii)  $\forall y \in V \setminus \{0\}$ , a forma bilinear simétrica

$$g_y(u, v) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(y + su + tv)|_{s=t=0} \quad (1.1)$$

é positiva-definida. Diz-se que  $F^2$  é estritamente convexa.

O par  $(V, F)$  é chamado de espaço de Minkowski.

Em coordenadas  $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n \simeq V$ , usamos a notação

$$g_{ij}(y) := g_y(\partial_{y^i}, \partial_{y^j}) = \frac{1}{2} \partial_{y^i} \partial_{y^j} F^2(y).$$

**Exemplo 1.2.2.** Um produto interno positivo definido  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $V$  induz uma norma de Minkowski  $F(y) := \sqrt{\langle y, y \rangle}$ .

**Exemplo 1.2.3.** Considere a métrica Funk vista na seção anterior. Vamos construir uma norma de Minkowski em cada espaço tangente  $T_p\Omega$ . Dados  $p \in \Omega$  e  $y \in T_p\Omega \simeq \mathbb{R}^2$ , nada mais natural do que definirmos a norma de  $y$  por

$$\begin{aligned} \|y\|_F &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{d_F(p, p + \varepsilon y)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \frac{\ln |z_{py} - (p + \varepsilon y)|^2 - \ln |z_{py} - p|^2}{\varepsilon} \\ &= -\frac{1}{2} d(\ln(\langle z_{py} - x, z_{py} - x \rangle))_p \cdot y \\ &= \frac{\langle y, z_{py} - p \rangle}{|z_{py} - p|^2} = \frac{|y|}{|z_{py} - p|} \end{aligned}$$

onde  $z_{py}$  é a intersecção da semi-reta por  $p$  que passa em  $p+\varepsilon y$ ,  $\varepsilon > 0$ , com o bordo  $\partial\Omega$ . Note que  $z_{py}$  não depende de  $\varepsilon > 0$ . Segue que para todo  $p \in \Omega$ , o conjunto

$$S_p := \{y \in T_p\Omega \simeq \mathbb{R}^2 : \|y\|_F = 1\}$$

coincide geometricamente com  $\partial\Omega$ .

**Teorema 1.2.4** (Euler). *Seja  $h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e positivamente homogênea de grau  $\alpha \geq 0$ , ou seja,  $h(\lambda y) = \lambda^\alpha h(y)$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $\lambda > 0$ . Então*

$$h_{y^i}(y)y^i = \alpha h(y), \quad \forall y \neq 0. \quad (1.2)$$

**Demonstração.** Basta derivar a igualdade  $h(\lambda y) = \lambda^\alpha h(y)$  em relação a  $\lambda$  e fazer  $\lambda = 1$ .  $\square$

Usamos sempre a notação de Einstein. Por exemplo, em (1.2), está subentendida a soma em  $i$ .

**Exercício 1.2.5.** *Seja  $h$  como no Teorema de Euler, onde  $\alpha > 1$ . Definindo-se  $h(0) = 0$ , mostre que  $h$  é de classe  $C^k$  em 0 e  $h'(0) = \dots = h^{(k)}(0) = 0$  para todo inteiro  $0 \leq k < \alpha$ .*

Como  $F^2$  é homogênea de grau 2,  $\partial_{y^i} F^2$  é homogênea de grau 1. Usando o Teorema de Euler, obtemos

$$\begin{aligned} g_{ij}y^j &= \frac{1}{2}(\partial_{y^i y^j}^2 F^2)y^j \\ &= \frac{1}{2}(\partial_{y^j y^i}^2 F^2)y^j \\ &= \frac{1}{2}(\partial_{y^j}(\partial_{y^i} F^2))y^j \\ &= \frac{1}{2}\partial_{y^i} F^2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Concluimos que

$$g_y(y, v) = \frac{1}{2}dF^2(y) \cdot v. \quad (1.4)$$

**Exercício 1.2.6.** *Use a homogeneidade de  $F$  para mostrar que*

$$g_y(y, y) = F^2(y), \quad \forall y \in V. \quad (1.5)$$

**Exercício 1.2.7.** *Mostre que  $g_{ij}$  é positivamente homogênea de grau 0, ou seja  $g_{ij}(\lambda y) = g_{ij}(y)$ ,  $\forall y \neq 0$ ,  $\lambda > 0$ . Conclua que se  $F$  é uma norma de Minkowski em  $V$  e  $F^2$  é  $C^2$ , então  $F^2$  é uma forma quadrática, ou seja,*

$$F^2 = g_{ij}y^i y^j,$$

onde  $g_{ij}$  não depende de  $y$  e, portanto,  $F^2$  é  $C^\infty$ .

**Exercício 1.2.8.** *Mostre que*

(i)  $F(y + v) \leq F(y) + F(v)$ ,  $\forall y, v \in V$ . Segue que  $d$  definida por  $d(p, q) := F(p - q)$ ,  $\forall p, q \in V$ , é uma métrica em  $V$ .

(ii) Vale a seguinte desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$g_y(y, v) \leq F(y)F(v) \quad \forall y, v \in V.$$

**Exercício 1.2.9.** *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$  dada por*

$$F(y_1, y_2) := \{y_1^4 + 3cy_1^2y_2^2 + y_2^4\}^{1/4}.$$

*Mostre que  $F$  é uma norma de Minkowski em  $\mathbb{R}^2$  se e somente se  $0 < c < 2$ .*

Chamamos o conjunto  $S := F^{-1}(1) \subset V \simeq \mathbb{R}^n$  de indicatriz de  $F$ . Pela definição de  $F$ ,  $S$  deve ser uma hipersuperfície suave difeomorfa a  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  e estritamente convexa, ou seja, todo hiperplano  $H_p$  tangente a  $S$  num ponto  $p \in S$  é um hiperplano suporte singular com contato de ordem 1 com  $S$ . Isso quer dizer que  $H_p \cap S = \{p\}$  e para toda curva  $\alpha(t)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ , satisfazendo  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) \neq 0$ , temos que  $\alpha''(0) \notin H_p - p$ . Mais ainda, denotando por  $N : S \rightarrow S^{n-1}$  a aplicação de Gauss dada pela normal exterior unitária a  $S$ , temos que  $N$  é um difeomorfismo. O leitor está convidado a verificar todas estas afirmações, veja mais detalhes em § 4.3.6.

Seja  $S \hookrightarrow V$  uma hipersuperfície suave estritamente convexa, difeomorfa à esfera  $S^{n-1}$  e tal que a origem  $0 \in V$  esteja contida na parte limitada de  $V \setminus S$ . Então  $S$  induz uma norma de Minkowski  $F$  em  $V$ , definindo-se  $F(0) = 0$  e  $F(x) = c > 0$  se e somente se  $\frac{x}{c} \in S$ .

**Exercício 1.2.10.** *Mostre que  $F$  assim definida é uma norma de Minkowski em  $V$ .*

Dado  $y \in V \setminus \{0\}$ , seja  $S_y = F^{-1}(F(y))$ . Então  $S_y = F(y)S$  e note que, por (1.4),

$$T_y S_y = \{w \in V : g_y(y, w) = 0\}.$$

Como  $S_y$  é uma hipersuperfície estritamente convexa e as funções  $g_{ij}$  são homogêneas de grau zero, temos que a aplicação

$$\begin{aligned} L : V \setminus \{0\} &\rightarrow V^* \setminus \{0\} \\ y &\mapsto g_y(y, \cdot), \end{aligned} \tag{1.6}$$

é um difeomorfismo, que pode ser estendido a um homeomorfismo  $V \simeq V^*$  definindo-se  $L(0) = 0$ . Acima, denotamos por  $V^*$  o espaço dual de  $V$ .

**Exercício 1.2.11.** *Mostre esta última afirmação.*

### 1.2.1 Normas do tipo Randers

Seja  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz simétrica e positiva definida, e seja  $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear. Seja  $\{e_i\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^n$  de forma que  $\beta(y) = \sum_{i=1}^n \beta_i y^i$  para únicos  $\beta_i$ , para todo vetor  $y = \sum_{i=1}^n y^i e_i \in \mathbb{R}^n$ . Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(y) = \sqrt{a_{ij} y^i y^j} + \beta(y).$$

Denotemos a norma de  $\beta$  com respeito à matriz  $A$  por

$$\|\beta\|_A = \sup \left\{ \beta(y) : \sqrt{a_{ij} y^i y^j} = 1 \right\}.$$

**Exercício 1.2.12.** *Mostre que  $F$  é norma de Minkowski em  $V$  se e somente se  $\|\beta\|_A < 1$ . Nesse caso,  $F$  é chamada de norma de Minkowski do tipo Randers.*

## 1.3 Métricas Finsler

**Definição 1.3.1.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Chamamos uma função contínua*

$$F : TM \rightarrow [0, +\infty)$$

*de métrica Finsler em  $M$  se  $F$  satisfaz*

- (i)  $F$  é  $C^\infty$  em  $TM_0$ , o fibrado tangente com a seção nula removida.
- (ii)  $F(\lambda v) = \lambda F(v), \forall v = (x, y) \in TM, \lambda > 0$ , onde estamos denotando  $\lambda v = (x, \lambda y)$ .
- (iii) A forma bi-linear simétrica  $g_v : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$g_v(u, w) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} F^2(x, y + su + tw)|_{s=t=0}, \quad \forall u, w \in T_x M,$$

é positiva-definida  $\forall v = (x, y) \in TM_0$ .

O par  $(M, F)$  é chamado de variedade Finsler.

Note que se  $F$  é uma métrica Finsler em  $M$ , então  $F|_{T_x M}$  é uma norma de Minkowski em  $T_x M, \forall x \in M$ .

**Definição 1.3.2.** A reversibilidade de  $F$  é definida por

$$r := \sup \{ F(-v) \mid v \in F^{-1}(1) \}.$$

Dizemos que uma métrica Finsler é reversível se  $r = 1$ , ou seja, se  $F(v) = F(-v), \forall v \in TM$ .

**Exercício 1.3.3.** Mostre que sempre vale  $r \geq 1$ .

**Definição 1.3.4.** O conjunto  $T_F^1 M := \{v \in TM \mid F(v) = 1\}$  é chamado de fibrado unitário da métrica Finsler  $F$ .

**Exercício 1.3.5.** Mostre que  $T_F^1 M$  é uma hipersuperfície regular de  $TM_0$  e que, para todo  $x \in M$ ,  $T_F^1 M \cap T_x M$  é uma hipersuperfície estritamente convexa  $S_x \subset T_x M$  contendo a origem no interior da componente limitada de seu complementar.

Veremos a seguir alguns exemplos de métricas Finsler.

### 1.3.1 Métricas Riemannianas

O exemplo mais simples de métrica Finsler é a norma de uma métrica Riemanniana  $g$  numa variedade  $M$ . Nesse caso,  $F(v) := \sqrt{g(v, v)}$  é uma métrica Finsler reversível.

### 1.3.2 Métricas Finsler do tipo Randers

Seja  $g$  uma métrica Riemanniana em  $M$  e  $\beta$  uma 1-forma em  $M$ . Denote por  $\|\beta\|_g = \sup\{\beta(v) \mid g(v, v) = 1, v \in TM\}$ .

**Exercício 1.3.6.** *Mostre que  $F(v) := \sqrt{g(v, v)} + \beta(v)$  é uma métrica Finsler em  $M$  se e somente se  $\|\beta\|_g < 1$ .*

**Definição 1.3.7.** *Uma métrica Finsler como no Exercício 1.3.6 é chamada de métrica Finsler do tipo Randers. Usamos também a notação  $(M, g, \beta)$  para a variedade Finsler  $(M, F)$ .*

Denote por  $\mathcal{X}(M)$  o espaço dos campos de vetores em  $M$  e seja  $\zeta \in \mathcal{X}(M)$  o único campo de vetores em  $M$  satisfazendo  $\beta = g(\zeta, \cdot)$ .

**Exercício 1.3.8.** *Mostre que a reversibilidade da métrica Finsler do tipo Randers  $(M, g, \beta)$  é dada por*

$$r = \sup_{x \in M} \frac{1 + \|\zeta(x)\|_g}{1 - \|\zeta(x)\|_g}.$$

### 1.3.3 Métricas Finsler do tipo Zermelo

Sejam  $h$  uma métrica Riemanniana e  $W \in \mathcal{X}(M)$ . Suponha que

$$\sup\{\|W(x)\|_h : x \in M\} < 1.$$

Para todo  $x \in M$ , seja  $S_x := \{y \in T_x M : h(y, y) = 1\}$ . Então

$$\bar{S}_x := S_x + W(x), x \in M,$$

induz uma métrica Finsler  $F$  em  $M$  definindo-se  $F(\bar{S}_x) = 1, \forall x \in M$ , ou seja, a indicatriz de  $F$  em  $T_x M$  coincide com  $\bar{S}_x$  para todo  $x \in M$ . Chamamos a tripla  $(M, h, W)$  de dados de navegação de Zermelo.

Um fato interessante é que o conjunto de métricas Finsler do tipo Randers coincide com as do tipo Zermelo. No entanto, as métricas Riemannianas associadas não coincidem.

Sejam  $(M, h, W)$  os dados de navegação de Zermelo induzindo uma métrica Finsler  $F$  em  $M$ . Em coordenadas tangentes naturais

$$p \simeq (x^1, \dots, x^n),$$

$$\sum_{i=1}^n y^i \partial_{x^i} \Big|_p \simeq (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n), \quad (1.7)$$

temos  $h_{ij} = h(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})$  e  $W = W^j \partial_{x^j}$ . A correspondência entre Zermelo  $(M, h, W)$  e Randers  $(M, g, \beta)$  é a seguinte: a métrica Riemanniana  $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$  e a 1-forma  $\beta = \beta_i dx^i$  em  $M$  são dadas por  $g_{ij} = \frac{1}{\lambda}(h_{ij} + \frac{1}{\lambda} W_i W_j)$  e  $\beta_i = -\frac{W_i}{\lambda}$ , onde  $W_i = h_{ij} W^j$  e  $\lambda = 1 - h(W, W)$ .

**Exercício 1.3.9.** *Deduzas as fórmulas acima para  $g_{ij}$  e  $\beta_i$ .*

O campo de vetores  $W$  pode ser interpretado como um ‘vento’ que interfere no fluxo geodésico original de  $g$  contribuindo ora a favor, ora contra o movimento. Por exemplo, o movimento de um navio na esfera terrestre é influenciado pelo vento e sua velocidade é maior quando viaja a favor do vento e é menor quando viaja contra o vento. Mais adiante discutiremos o exemplo de Katok onde ficará mais claro o papel do campo  $W$ .

### 1.3.4 Métricas Finsler do tipo $(\alpha, \beta)$

Sejam  $(M, \alpha)$  uma variedade Riemanniana e  $\beta$  uma 1-forma em  $M$ . Denote por  $\|y\|_\alpha = \sqrt{\alpha_x(y, y)}$  a norma de  $y \in T_x M$ , para todo  $x \in M$ .

Assuma que

$$\|\beta_x\|_\alpha := \sup \{ \beta_x(y) \mid \|y\|_\alpha = 1 \} < \epsilon, \quad (1.8)$$

para algum  $\epsilon > 0$  e seja  $\phi := (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow (0, \infty)$ , uma função suave satisfazendo

$$\phi(s) - s\phi'(s) + (b^2 - s^2)\phi''(s) > 0,$$

para todo  $|s| \leq b < \epsilon$ . Seja

$$F(x, y) := \phi\left(\frac{\beta_x(y)}{\|y\|_\alpha}\right) \|y\|_\alpha, \forall (x, y) \in TM_0. \quad (1.9)$$

**Proposição 1.3.10.** *A função  $F : TM \rightarrow [0, \infty)$  definida em (1.9) determina uma métrica Finsler em  $M$ , chamada de métrica Finsler do tipo  $(\alpha, \beta)$ .*

Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em [6].

**Exercício 1.3.11.** *Fixe  $\phi(s) = s + 1$  e  $\epsilon = 1$ , e assumas que  $\|\beta_x\|_\alpha < 1$ ,  $\forall x \in M$ . Mostre que a métrica  $(\alpha, \beta)$  coincide com a métrica Randers associada a  $\alpha$  e  $\beta$ .*

## 1.4 Geodésicas - Um princípio variacional

Sejam  $F : TM \rightarrow [0, +\infty)$  uma métrica Finsler em  $M$ ,  $E = \frac{1}{2}F^2$  e

$$\gamma : [a, b] \rightarrow M$$

uma curva que é  $C^\infty$  por partes com relação à partição

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\},$$

isto é,  $\gamma$  é contínua e  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  é  $C^\infty \forall i = 0, \dots, N-1$ . Assuma também que  $\gamma$  satisfaz  $F(\gamma, \dot{\gamma}) = 1$ .

Consideramos variações de  $\gamma$  que respeitam a partição  $P$  e mantêm os extremos fixos, ou seja, funções contínuas

$$H : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$$

satisfazendo

- (i)  $H$  é  $C^\infty$  em  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$ .
- (ii)  $\gamma(t) = H(0, t)$ ,  $H(u, a) = \gamma(a)$  e  $H(u, b) = \gamma(b)$ ,  $\forall t, u$ .

Denote por

$$V := \frac{\partial H}{\partial u}(0, \cdot)$$

o campo “variação infinitesimal” induzido por  $H$ , e por  $\gamma_u := H(u, \cdot)$ . Seja

$$\ell(u) := \int_a^b F(\gamma_u, \dot{\gamma}_u) dt = \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\gamma_u, \dot{\gamma}_u) dt$$

o comprimento da curva  $\gamma_u$ . Podemos assumir, por simplicidade, que cada  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$  é mapeado por  $H$  no domínio de um sistema de coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$ , e fazemos a análise do termo correspondente em coordenadas tangentes naturais

$$(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$$

dadas em (1.7). Como  $dE = FdF$  e  $E_{y^k} = g_{kj}y^j$ , temos

$$\begin{aligned}
 \ell'(0) &= \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( E_{x^k} V^k + E_{y^k} \dot{V}^k \right) dt \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( E_{x^k} - \dot{E}_{y^k} \right) V^k dt + E_{y^k} V^k \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( E_{x^k} - E_{y^k x^j} \dot{\gamma}^j - E_{y^k y^j} \ddot{\gamma}^j \right) V^k dt + g_{jk} \dot{\gamma}^j V^k \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \\
 &= - \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_{jk} (\ddot{\gamma}^j + 2G^j(\gamma, \dot{\gamma})) V^k dt + g_{jk} \dot{\gamma}^j V^k \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \\
 &= - \int_a^b g_{\dot{\gamma}}(W, V) dt \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{N-1} (g_{\dot{\gamma}(t_i^-)}(\dot{\gamma}(t_i^-), V(t_i)) - g_{\dot{\gamma}(t_i^+)}(\dot{\gamma}(t_i^+), V(t_i))),
 \end{aligned}$$

onde  $\gamma = \gamma^j \partial_{x^j}$ ,  $W = W^j \partial_{x^j} = (\ddot{\gamma}^j + 2G^j(\gamma, \dot{\gamma})) \partial_{x^j}$  com

$$\begin{aligned}
 G^j(x, y) &= \frac{1}{2} g^{jl} (E_{x^k y^l} y^k - E_{x^l}) \\
 &= \frac{1}{4} g^{jl} (2\partial_{x^k} g_{rl} - \partial_{x^i} g_{rk}) y^r y^k
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

e  $(g^{jl}) = (g_{jl})^{-1}$ . Na última igualdade usamos (1.3) e (1.4). Temos que  $\ell'(0) = 0$  para todo campo variação  $V$  que se anula nos extremos se e somente se

$$\ddot{\gamma}^j + 2G^j(\gamma, \dot{\gamma}) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n \tag{1.11}$$

$$\dot{\gamma}(t_i^-) = \dot{\gamma}(t_i^+), \quad \forall i = 1, \dots, k-1. \tag{1.12}$$

A igualdade (1.12) decorre do homeomorfismo (1.6). Segue que  $\gamma$  é de classe  $C^1$ . Por (1.11), obtemos que  $\gamma$  é  $C^\infty$ .

Definimos o campo geodésico  $S$  em  $TM$  dado em coordenadas naturais por

$$S(x, y) = y^j \partial_{x^j} - 2G^j(x, y) \partial_{y^j}, \quad (1.13)$$

onde  $G^j$  é definido em (1.10). Embora não seja evidente neste momento, tal campo fica bem definido globalmente, independentemente do sistema de coordenadas. Isso ficará claro no Capítulo 2, onde  $S$  será definido intrinsecamente. Segue que  $S$  é  $C^1$  em  $TM$  e é  $C^\infty$  em  $TM_0$ , veja o Exercício 1.4.2.

**Definição 1.4.1.** *Uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  da forma  $\gamma(t) = \pi(\Gamma(t))$ , onde  $\pi : TM \rightarrow M$  é a projeção no ponto base e  $t \mapsto \Gamma(t)$  é trajetória do campo  $S$  é chamada de **geodésica**.*

A forma do campo  $S$  implica que  $\Gamma = (\gamma, \dot{\gamma})$ , como o leitor facilmente verificará.

Os argumentos acima nos mostram que uma curva suave por partes  $\gamma$  satisfazendo  $F(\gamma, \dot{\gamma}) \equiv 1$  é geodésica se, e somente se,  $\ell'(0) = 0$  para toda variação de  $\gamma$ . Na verdade, como o comprimento é invariante por reparametrizações, as mesmas conclusões são obtidas apenas assumindo que a velocidade de  $\gamma$  nunca se anula.

O fluxo de  $\dot{z} = S \circ z$  em  $TM_0$  é chamado de fluxo geodésico e suas soluções se projetam em  $M$  nas geodésicas, por definição.

**Exercício 1.4.2.** *Mostre que as funções  $G^j$  são positivamente homogêneas de grau 2 em  $y$ . Conclua que  $S$  se estende a um campo de classe  $C^1$  em  $TM$ .*

**Definição 1.4.3.** *Uma métrica Finsler é chamada de métrica de Berwald se  $G^i(x, y)$  é quadrática em  $y$  para todo  $x \in M$ , ou seja,*

$$G^i(x, y) = \frac{1}{2} G_{jk}^i(x) y^j y^k, \forall (x, y) \in TM_0.$$

**Exercício 1.4.4.** *Mostre que métricas Riemannianas são de Berwald.*

Nem toda métrica de Berwald é Riemanniana.

## 1.5 Outros exemplos de métricas Finsler

### 1.5.1 A métrica de Katok: apenas 2 geodésicas fechadas em $S^2$

Considere a esfera unitária  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  com a métrica  $h$  induzida pela métrica Euclidiana em  $\mathbb{R}^3$ . Em  $S^2$ , considere o vento

$$W := \varepsilon \partial_\theta = \varepsilon(-y\partial_x + x\partial_y), |\varepsilon| < 1,$$

onde  $(x, y, z)$  são coordenadas em  $\mathbb{R}^3$  e  $(r, \theta)$  são as coordenadas polares  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Seja  $F$  a métrica Finsler em  $S^2$  associada aos dados de navegação de Zermelo  $(S^2, h, W)$ .

As geodésicas de  $h$  são curvas em  $S^2$  que percorrem os grandes círculos com velocidade constante. Assumimos que esta velocidade seja igual a 1.

Para descrevermos uma geodésica da métrica Finsler  $F$ , considere o fluxo em  $S^2$  associado ao campo de vetores  $W$ . Em coordenadas  $(x, y, z)$ , temos

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon t & -\sin \varepsilon t & 0 \\ \sin \varepsilon t & \cos \varepsilon t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}.$$

Dados  $p_0 \in S^2$  e  $v_0 \in \bar{S}_{p_0} := \{W(p_0) + v : h(v, v) = 1\}$ , é possível mostrar que a geodésica  $\gamma(t)$  de  $F$  com as condições iniciais  $(p_0, v_0)$  é dada por

$$\gamma(t) = \psi_t(\gamma_0(t)), \tag{1.14}$$

onde  $\gamma_0(t)$  é a geodésica de  $h$  com condições iniciais  $p_0 \in S^2$  e  $v_0 - W(p_0) \in T_{p_0}S^2$ . Note que as geodésicas de  $F$  são, portanto, as geodésicas de  $h$  ‘arrastadas’ pelo vento  $W$ .

Existem 2 geodésicas de  $F$  que percorrem o equador  $\{z = 0\} \cap S^2$  em sentidos opostos e com períodos distintos (a geodésica que percorre o equador no mesmo sentido do vento tem período menor do que a que percorre o equador no sentido oposto ao vento). Segue também de (1.14) que todas as outras geodésicas intersectam o equador infinitas vezes. A variação angular  $\Delta\theta$  entre dois cruzamentos consecutivos de uma geodésica com o equador é igual a

$$\Delta\theta = \pi + \varepsilon\pi.$$

Concluimos que se  $\varepsilon$  é racional, todas as geodésicas são fechadas. Se  $\varepsilon$  é irracional, apenas as duas geodésicas que percorrem o equador são fechadas. Este fato mostra um contraste com fluxos geodésicos de métricas Riemannianas em  $S^2$ . Estes últimos admitem sempre infinitas geodésicas fechadas.

### 1.5.2 As métricas de Shen: a lagoa e o tanque de peixes

Considere o disco unitário  $D := \{x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$  munido da métrica Euclidiana  $g$ . O vento em  $D$  é dado pelo campo de vetores

$$W := -x^2 \partial_{x^1} + x^1 \partial_{x^2}. \quad (1.15)$$

Os dados de navegação de Zermelo  $(D, g, W)$  determinam a métrica Finsler  $F$  em  $D$  dada por

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{(-x^2 y^1 + x^1 y^2)^2 + |y|^2 (1 - |x|^2)}}{1 - |x|^2} - \frac{x^2 y^1 - x^1 y^2}{1 - |x|^2},$$

onde  $x \in D$ ,  $y = \sum y^i \partial_{x^i}$  e  $|\cdot|$  denota a norma Euclidiana em  $\mathbb{R}^2$ . Essa é a chamada lagoa de peixes de Shen. Um peixe partindo da origem e que deseja atingir a comida localizada no bordo  $\partial D$  no menor tempo possível deve percorrer uma geodésica, que é uma espiral. Suponha um polvo percorrendo essa espiral e deixando um rastro de tinta por onde passa. Se o rastro de tinta continuar a se mover com o vento, então o rastro será sempre um segmento de reta que gira junto com o movimento do polvo.

Considerando  $T := D \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$  com a métrica Euclidiana  $g$  e o mesmo vento (1.15), obtemos uma métrica Finsler em  $T$  com dados de navegação de Zermelo  $(T, g, W)$ . É o chamado tanque de peixes de Shen. Similarmente um peixe que sai de  $(0, 0, 0)$  e deseja atingir os mosquitos em algum ponto  $(x, y, 1)$  no menor tempo possível, deve percorrer uma geodésica, que se projeta em  $D$  numa espiral.

Assim como no exemplo de Katok, as geodésicas de ambos os modelos acima correspondem às geodésicas de  $g$  arrastadas pelo vento  $W$ .

### 1.5.3 A métrica de Matsumoto: inclinação da montanha

Considere  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  o gráfico de  $f$ . A métrica Riemanniana em  $\Omega$  induzida por  $S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  é dada por

$$h = (1+f_{x^1}^2)dx^1 \otimes dx^1 + f_{x^1} f_{x^2} (dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1) + (1+f_{x^2}^2)dx^2 \otimes dx^2,$$

onde  $(x^1, x^2)$  são coordenadas em  $\mathbb{R}^2$ .

Considere agora uma pessoa caminhando na superfície  $S$  sob o efeito da força da gravidade  $-k\partial_{x^3}$ , onde  $k > 0$  é alguma constante e  $(x^1, x^2, x^3)$  são coordenadas de  $\mathbb{R}^3$ . Para cada ponto  $p \in S$ , considere o plano tangente  $\pi_p$  a  $S$  no ponto  $p$ . Se não houvesse a influência da gravidade então a indicatriz em  $\pi_p$  seria dada pelo círculo unitário centrado em  $p$ , que corresponde aos pontos alcançados a partir de  $p$  em tempo 1 (em termos infinitesimais). A força da gravidade em  $p$  se projeta em  $\pi_p$  ao longo de sua normal num vetor  $g_p \in \pi_p$  cuja norma Euclidiana é dada por

$$k \sin \alpha = k \sqrt{\frac{f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2}{1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2}},$$

onde  $\alpha$  é o ângulo entre  $\pi_p$  e o plano  $x^1x^2$ . Seja  $\theta$  o ângulo que um vetor  $v \in \pi_p$  faz com  $g_p$ , com orientação dada pela normal superior a  $S$ . Se no ponto  $p \in S$  a pessoa caminha no sentido de  $\theta$ , então a força da gravidade contribui para seu movimento naquele sentido com uma aceleração de  $k \sin \alpha \cos \theta$ . A componente da força da gravidade na direção perpendicular ao movimento é anulada pelo atrito entre a pessoa e a superfície. Dessa forma considera-se que a quantidade percorrida em tempo 1 (em termos infinitesimais) seja de  $1 + \frac{1}{2}k \sin \alpha \cos \theta$ . Em coordenadas polares em  $\pi_p$ , obtemos desta forma uma nova indicatriz em  $\pi_p$  dada por

$$r = 1 + c \cos \theta, \tag{1.16}$$

onde  $c = \frac{1}{2}k \sin \alpha$ . Note que a curva (1.16), chamada de *limaçon*, é estritamente convexa se e somente se  $|c| < 1/2$ . Nessas condições, obtemos uma métrica Finsler em  $S$  que por sua vez induz uma métrica

Finsler em  $\Omega$ . Supondo  $k = 2$ , obtemos uma restrição na inclinação da superfície  $S$  dada por

$$f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2 < \frac{1}{3}.$$

As geodésicas dessa métrica Finsler não tem uma relação simples com as geodésicas da métrica Riemanniana  $h$ . Veja mais detalhes em [28].

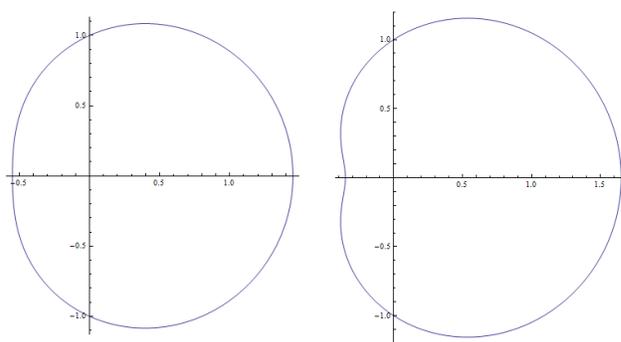


Figura 1.2: As curvas *limaçon*  $r = 1 + c \cos \theta$ , com  $c = 0.45$  (estritamente convexo) e  $c = 0.65$  (não estritamente convexo), respectivamente.

## Capítulo 2

# Conexões e Curvaturas

Neste capítulo apresentamos as principais estruturas geométricas associadas a uma métrica Finsler. Inicialmente estudamos conexões de Grifone e suas diversas propriedades como tensão, torção e curvatura. Apresentamos uma conexão de Grifone canonicamente associada a um *spray*, em particular a uma métrica Finsler. Feito isso, definimos as chamadas conexões de Finsler, que são conexões no fibrado bi-tangente, sendo as mais conhecidas as conexões de Berwald, Cartan, Chern-Rund e Hashiguchi. Finalmente, discutimos a curvatura de Riemann e a curvatura bandeira, importantes para o estudo de fluxos geodésicos.

Todas as construções a seguir são feitas de forma intrínseca. No entanto, apresentamos também suas representações em coordenadas, pois estas muitas vezes facilitam as demonstrações. Para mais detalhes sobre estes tópicos, veja [7, 10, 11, 36, 37].

### 2.1 Distribuições horizontais e a conexão de Grifone

Seja  $M$  uma  $n$ -variedade diferenciável. Os fibrados tangente e cotangente

$$\begin{aligned}\pi_{TM} &: TM \rightarrow M, \\ \pi_{T^*M} &: T^*M \rightarrow M,\end{aligned}$$

são exemplos de fibrados vetoriais sobre  $M$  com postos iguais a  $n$ . O fibrado bi-tangente  $\pi_{TTM} : TTM \rightarrow TM$  admite naturalmente um subfibrado  $\mathcal{V} \rightarrow TM$ , chamado de distribuição vertical, definido por

$$\mathcal{V} = \ker(d\pi_{TM} : TTM \rightarrow TM).$$

**Definição 2.1.1.** Um subfibrado  $\mathcal{H} \subset TTM$  é chamado de distribuição horizontal se

$$TTM = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}. \tag{2.1}$$

Os postos de  $\mathcal{V}$  e de uma distribuição horizontal  $\mathcal{H}$  são iguais a  $n$ . Denotamos por

$$\begin{aligned} v : TTM &\rightarrow \mathcal{V}, \\ h : TTM &\rightarrow \mathcal{H}, \end{aligned}$$

as projeções induzidas pela decomposição (2.1), ou seja,  $v|_{\mathcal{V}} = I|_{\mathcal{V}}$ ,  $v|_{\mathcal{H}} = 0$ ,  $h|_{\mathcal{H}} = I|_{\mathcal{H}}$  e  $h|_{\mathcal{V}} = 0$ .

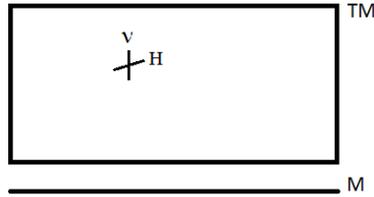


Figura 2.1:  $TTM = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$

**Definição 2.1.2.** Uma conexão de Grifone em  $M$  é uma aplicação de fibrado  $\Gamma : TTM \rightarrow TTM$  sobre a identidade tal que  $\Gamma^2 = I$  e  $\ker(\Gamma + I) = \mathcal{V}$ .

**Observação 2.1.3.** Uma conexão de Grifone  $\Gamma$  em  $M$  determina uma distribuição horizontal  $\mathcal{H} := \ker(\Gamma - I)$ . Reciprocamente, uma distribuição horizontal  $\mathcal{H}$  determina uma conexão de Grifone  $\Gamma$  declarando-se  $\Gamma|_{\mathcal{H}} = I|_{\mathcal{H}}$  e  $\Gamma|_{\mathcal{V}} = -I|_{\mathcal{V}}$ .

Por hora, não temos uma escolha canônica para a distribuição horizontal  $\mathcal{H}$  e apenas assumimos sua existência. Veremos mais adiante que estruturas adicionais em  $M$  induzem uma tal escolha.

Para cada  $w = (x, y) \in TM$ , temos o isomorfismo canônico

$$i_{\mathcal{V}} : T_x M \rightarrow \mathcal{V}_w : u \mapsto \frac{d}{dt}(x, y + ut)|_{t=0}.$$

A distribuição vertical  $\mathcal{V}$  admite uma seção natural  $C \in \Gamma(\mathcal{V})$  dada por

$$C(w) = i_{\mathcal{V}}(y), \forall w = (x, y) \in TM.$$

A aplicação

$$\mathcal{J} : TTM \rightarrow \mathcal{V}, \quad \zeta \mapsto i_{\mathcal{V}} \circ d\pi(\zeta) \quad (2.2)$$

é chamada de endomorfismo vertical, ou também de estrutura quase tangente. É imediato que  $\text{Im } \mathcal{J} = \ker \mathcal{J} = \mathcal{V}$  e, portanto,  $\mathcal{J}^2 = 0$ .

**Exercício 2.1.4.** *Mostre que se  $\Gamma$  é uma conexão de Grifone, então  $\mathcal{J}\Gamma = \mathcal{J}$  e  $\Gamma\mathcal{J} = -\mathcal{J}$ .*

**Definição 2.1.5.** *Uma  $k$ -forma  $L \in \Omega^k(TM, TTM)$  em  $TM$  com valores em  $TTM$  é chamada de semi-básica se*

(i)  $\mathcal{J} \circ L = 0$ , ou seja,  $L$  assume valores verticais.

(ii) Se  $X^i$  é vertical para algum  $i$ , então  $L(X^1, \dots, X^k) = 0$ .

**Exercício 2.1.6.** *Mostre que o tensor  $\mathcal{J} \in \Omega^1(TM, TTM)$  é semi-básico.*

Observe que a projeção  $\pi_{TM}$  induz um isomorfismo canônico

$$i_{\mathcal{H}} := (d\pi|_{\mathcal{H}_w})^{-1} : T_{\pi(w)}M \rightarrow \mathcal{H}_w, \forall w \in TM.$$

A projeção  $h : TTM \rightarrow \mathcal{H}$  satisfaz  $h(\zeta) = i_{\mathcal{H}} \circ d\pi(\zeta)$  e é chamada de endomorfismo horizontal. É imediato que  $h\mathcal{J} = 0$  e  $\mathcal{J}h = \mathcal{J}$ .

Sejam  $(x^1, \dots, x^n)$  coordenadas locais no aberto  $U \subset M$  e

$$(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$$

coordenadas naturais tangentes em  $TU$ . Então

$$\mathcal{V}_w = \text{span}\{\partial_{y^i}, i = 1, \dots, n\}, \forall w = (x, y) \in TU,$$

e existem funções  $\Gamma_k^i : TU \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i, k \in \{1, \dots, n\}$ , tais que

$$\mathcal{H}_w = \text{span}\{\delta_{x^i}, i = 1, \dots, n\}, \text{ onde } \delta_{x^i} := \partial_{x^i} - \Gamma_i^k(w)\partial_{y^k}. \quad (2.3)$$

Em (2.3), estamos usando a convenção de Einstein para a soma. Os coeficientes  $\Gamma_i^k$  são também chamados de coeficientes da conexão de Grifone  $\Gamma$  associada a  $\mathcal{H}$ . Temos então que

$$\begin{aligned} v(a^i \partial_{y^i} + b^i \partial_{x^i}) &= (a^i + \Gamma_k^i b^k) \partial_{y^i}, \\ h(a^i \partial_{y^i} + b^i \partial_{x^i}) &= b^i \delta_{x^i} = b^i (\partial_{x^i} - \Gamma_i^k \partial_{y^k}), \\ i_{\mathcal{V}}(a^i \partial_{x^i}) &= a^i \partial_{y^i}, \\ i_{\mathcal{H}}(a^i \partial_{x^i}) &= a^i \delta_{x^i} = a^i (\partial_{x^i} - \Gamma_i^k \partial_{y^k}), \\ C(x, y) &= y^i \partial_{y^i}. \end{aligned}$$

Seja

$$\delta y^i := dy^i + \Gamma_j^i dx^j \quad (2.4)$$

e note que  $\{dx^i, \delta y^i\}$  é a base dual de  $\{\delta_{x^i}, \partial_{y^i}\}$ .

**Definição 2.1.7.** *Seja  $X \in \mathcal{X}(M)$  um campo de vetores em  $M$ . Então a seção  $X^v \in \Gamma(\mathcal{V})$  dada por  $X^v(x, y) = i_{\mathcal{V}}(X(x)) \in \mathcal{V}_{(x,y)}$  é chamada de levantamento vertical de  $X$ . O levantamento horizontal  $X^h$  de  $X$  é definido de forma similar. Sejam  $\phi_t$  o fluxo em  $M$  de  $X$  e  $\psi_t(x, y) := (\phi_t(x), d\phi_t(x)(y))$  o fluxo linearizado em  $TM$  associado a  $\phi_t$ . Então  $\psi_t$  determina um campo de vetores  $X^c \in \mathcal{X}(TM)$ , chamado de levantamento completo de  $X$ .*

**Exercício 2.1.8.** *Dado  $X \in \mathcal{X}(M)$ , mostre que  $\mathcal{J}X^c = X^v$  e que  $[C, X^v] = -X^v$ , onde  $[\cdot, \cdot]$  denota o colchete de Lie em  $TM$ . Dica: use coordenadas.*

**Observação 2.1.9.** *Em coordenadas locais  $(x^1, \dots, x^n)$  de uma variedade, dados campos de vetores locais  $X = X^i \partial_{x^i}, Y = Y^i \partial_{x^i}$ , convencionamos que*

$$[X, Y] = (X^j \partial_{x^j} Y^i - Y^j \partial_{x^j} X^i) \partial_{x^i}.$$

Associados a uma distribuição horizontal  $\mathcal{H}$  (ou à uma conexão de Grifone, equivalentemente) temos intrinsecamente diversos outros objetos.

**Definição 2.1.10.**  $\tau_{\mathcal{H}} := [h, C] \in \Omega^1(TM, \mathcal{V})$  é chamada de tensão de  $\mathcal{H}$ . Aqui,  $[h, C]$  denota o colchete de Frölicher-Nijenhuis entre  $h$  e  $C$ , definido da seguinte forma: dado  $X \in \mathcal{X}(TM)$ , então

$$[h, C](X) = [hX, C] - h[X, C], \quad (2.5)$$

onde os últimos  $[\cdot, \cdot]$ 's denotam o colchete de Lie usual. Quando  $\tau_{\mathcal{H}} \equiv 0$ , dizemos que a distribuição horizontal  $\mathcal{H}$  é homogênea.

**Exercício 2.1.11.** Verifique que  $\tau_{\mathcal{H}}$  está bem definida. Dica: use  $h + v = I$  e a seguinte propriedade do colchete de Lie: se  $f, g \in C^\infty(TM)$ ,  $X, Y \in \mathcal{X}(TM)$ , então

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

**Exercício 2.1.12.** Mostre que  $\tau_{\mathcal{H}}$  é semi-básico. Dica: note que a distribuição vertical  $\mathcal{V} = \text{span}\{\partial_{y^i}\}$  é integrável, ou seja  $[Y_1, Y_2] \in \Gamma(\mathcal{V})$ ,  $\forall Y_1, Y_2 \in \Gamma(\mathcal{V})$ .

**Exercício 2.1.13.** Mostre que  $\tau_{\mathcal{H}} \equiv 0$  se e somente se, em coordenadas naturais, as funções  $\Gamma_i^k(x, y)$ , definidas em (2.3), são positivamente homogêneas de grau 1 em  $y$ .

**Definição 2.1.14.**  $t_{\mathcal{H}} := [\mathcal{J}, h] \in \Omega^2(TM, \mathcal{V})$  é chamada de torção fraca de  $\mathcal{H}$ . Novamente,  $[\mathcal{J}, h]$  é o colchete de Frölicher-Nijenhuis entre  $\mathcal{J}$  e  $h$ , e é definido da seguinte forma: dado  $X, Y \in \mathcal{X}(TM)$ , então

$$\begin{aligned} [\mathcal{J}, h](X, Y) = & [\mathcal{J}X, hY] + [hX, \mathcal{J}Y] + \mathcal{J} \circ h[X, Y] \\ & + h \circ \mathcal{J}[X, Y] - \mathcal{J}[X, hY] - \mathcal{J}[hX, Y] \\ & - h[X, \mathcal{J}Y] - h[\mathcal{J}X, Y]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

**Exercício 2.1.15.** Mostre que  $t_{\mathcal{H}}$  é semi-básico. Conclua que

$$t_{\mathcal{H}}(X, Y) = v[hX, \mathcal{J}Y] + v[\mathcal{J}X, hY] - \mathcal{J}[hX, hY]. \quad (2.7)$$

Veja a demonstração do Teorema 2.3.4 para uma expressão da torção fraca em coordenadas.

**Definição 2.1.16.**  $R_{\mathcal{H}} := -\frac{1}{2}[h, h] \in \Omega^2(TM, \mathcal{V})$  é chamada de forma de curvatura de  $\mathcal{H}$ . Aqui,  $[h, h]$  é definido como em (2.6) substituindo-se  $\mathcal{J}$  por  $h$ . Nesse caso, como  $h^2 = h$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[h, h](X, Y) = & [hX, hY] + h[X, Y] \\ & - h[X, hY] - h[hX, Y], \end{aligned} \quad (2.8)$$

$\forall X, Y \in \mathcal{X}(TM)$ .

**Exercício 2.1.17.** *Mostre que  $R_{\mathcal{H}}$  é semi-básico. Conclua que*

$$R_{\mathcal{H}}(X, Y) = -v[hX, hY].$$

**Exercício 2.1.18.** *Mostre que em coordenadas naturais temos*

$$R_{\mathcal{H}}(\delta_{x^i}, \delta_{x^j}) = -[\delta_{x^i}, \delta_{x^j}] = (\delta_{x^i}\Gamma_j^m - \delta_{x^j}\Gamma_i^m)\partial_{y^m},$$

onde  $\delta_{x^i}\Gamma_j^m = \partial_{x^i}\Gamma_j^m - \Gamma_i^k\partial_{y^k}\Gamma_j^m$ .

**Exercício 2.1.19.** *Mostre que  $[\mathcal{J}, C] = \mathcal{J}$  e  $[\mathcal{J}, \mathcal{J}] = 0$ , onde os colchetes de Frölicher-Nijenhuis são definidos como em (2.5) e (2.6), respectivamente. Dica: use coordenadas.*

**Definição 2.1.20.** *Definimos  $\mathcal{F} : TTM \rightarrow TTM$ ,  $\mathcal{F}^2 = -I$ , a estrutura quase-complexa em  $TM$  determinada por  $\mathcal{F}h = -\mathcal{J}$  e  $\mathcal{F}\mathcal{J} = h$ .*

**Exercício 2.1.21.** *Mostre que  $\mathcal{J}\mathcal{F} = v$ ,  $\mathcal{F}v = h\mathcal{F}$  e que, em coordenadas naturais, temos*

$$\mathcal{F}\delta_{x^i} = -\partial_{y^i} \text{ e } \mathcal{F}\partial_{y^i} = \delta_{x^i}.$$

## 2.2 Sprays

Nesta seção vemos que *sprays* determinam uma conexão de Grifone cuja distribuição horizontal é livre de tensão e de torção.

Seja  $TM_0 = \{(x, y) \in TM : x \in M, T_xM \ni y \neq 0\}$  o fibrado tangente de  $M$  com a seção nula removida. Sabemos que  $TM_0$  tem estrutura de variedade suave e denotamos por  $\pi_{TM_0}$  a restrição de  $\pi_{TM}$  a  $TM_0$ . Naturalmente, temos a decomposição  $TTM_0 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$  induzida pela restrição. Muitos dos objetos a seguir são definidos em  $TM_0$  porém, na maioria dos casos, estes podem ser estendidos a  $TM$  possivelmente com um ordem de diferenciabilidade menor.

**Definição 2.2.1.** *Um semi-spray numa variedade  $M$  é um campo de vetores  $S \in \mathcal{X}(TM)$  de classe  $C^1$ , suave em  $TM_0$ , que satisfaz*

$$\mathcal{J}S = C. \tag{2.9}$$

Se  $S$  ainda satisfizer

$$[C, S] = S, \tag{2.10}$$

então dizemos que  $S$  é um *spray*.

**Exercício 2.2.2.** Em coordenadas naturais  $(x, y)$  seja

$$S(x, y) = \alpha^i(x, y)\partial_{x^i} - 2G^i(x, y)\partial_{y^i},$$

um campo de vetores, onde  $\alpha^i, G^i, i = 1 \dots n$ , são funções de classe  $C^1$ . Mostre que as condições (2.9) e (2.10) são equivalentes, respectivamente, a

$$\alpha^i(x, y) = y^i$$

e

$$G^i(x, \lambda y) = \lambda^2 G^i(x, y),$$

$\forall(x, y), \lambda > 0, i = 1 \dots, n$ .

**Teorema 2.2.3.** Seja  $S$  um semi-spray em  $M$ . Então  $\Gamma := [\mathcal{J}, S]$  é uma conexão de Grifone em  $M$  e a projeção

$$h := \frac{1}{2}(I + \Gamma)$$

determina uma distribuição horizontal  $\mathcal{H} = \ker(\Gamma - I)$  cuja torção fraca se anula. Mais ainda, se  $S$  é um spray, então a tensão de  $\mathcal{H}$  também se anula.

**Demonstração.** Seja  $X \in \mathcal{X}(TM)$ . Então em coordenadas naturais  $(x, y), y \neq 0$ , temos  $X = X^i\partial_{x^i} + Y^i\partial_{y^i}$  e  $S = y^i\partial_{x^i} - 2G^i\partial_{y^i}$ . Logo  $\mathcal{J}X = X^i\partial_{y^i}$  e

$$\begin{aligned} [X, S] &= (Y^i - y^j\partial_{x^j}X^i + 2G^j\partial_{y^j}X^i)\partial_{x^i} + (*)\partial_{y^i}, \\ [\mathcal{J}X, S] &= X^i\partial_{x^i} + (-2X^j\partial_{y^j}G^i - y^j\partial_{x^j}X^i + 2G^j\partial_{y^j}X^i)\partial_{y^i}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \Gamma(X) &= [\mathcal{J}, S](X) = [\mathcal{J}X, S] - \mathcal{J}[X, S] \\ &= X^i\partial_{x^i} + (-Y^i - 2X^j\partial_{y^j}G^i)\partial_{y^i}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Segue que  $\ker(\Gamma + I) = \text{span}\{\partial_{y^i}\} = \mathcal{V}$  e

$$\Gamma^2(X) = X^i\partial_{x^i} + (-(-Y^i - 2X^j\partial_{y^j}G^i) - 2X^j\partial_{y^j}G^i)\partial_{y^i} = X.$$

De (2.11), temos

$$\begin{aligned}
 h(X) &= \frac{1}{2}(I + \Gamma(X)) \\
 &= X^i \partial_{x^i} - X^j \partial_{y^j} G^i \partial_{y^i} \\
 &= X^i \partial_{x^i} - X^i \partial_{y^i} G^j \partial_{y^j} \\
 &= X^i (\partial_{x^i} - \Gamma_i^j \partial_{y^j}) \\
 &= X^i \delta_{x^i},
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde  $\Gamma_i^j = \partial_{y^i} G^j$  são os coeficientes da conexão de Grifone e  $\delta_{x^i} := \partial_{x^i} - \Gamma_i^j \partial_{y^j}$ . Fica a cargo do leitor verificar que a torção fraca de  $\mathcal{H}$  se anula.

Assuma agora que  $S$  é um *spray*. Pelo Exercício 2.2.2,  $G^i$  é positivamente homogênea de grau 2 em  $y$ , o que implica que  $\Gamma_j^i$  é positivamente homogênea de grau 1 em  $y$ , o que por sua vez implica que  $y^k \partial_{y^k} \Gamma_j^i = \Gamma_j^i$ , pelo Teorema de Euler. Usando (2.12) e que  $C = y^j \partial_{y^j}$ , encontramos

$$\begin{aligned}
 [X, C] &= -y^j \partial_{y^j} X^i \partial_{x^i} + (Y^i - y^j \partial_{y^j} Y^i) \partial_{y^i}, \\
 h[X, C] &= -y^j \partial_{y^j} X^i (\partial_{x^i} - \Gamma_i^k \partial_{y^k}) \\
 &= -y^j \partial_{y^j} X^i \partial_{x^i} + y^k \Gamma_j^i \partial_{y^k} X^j \partial_{y^i} \\
 [hX, C] &= -y^j \partial_{y^j} X^i \partial_{x^i} + (-X^j \Gamma_j^i + y^k \partial_{y^k} (X^j \Gamma_j^i)) \partial_{y^i} \\
 &= -y^j \partial_{y^j} X^i \partial_{x^i} + (-X^j \Gamma_j^i + X^j \Gamma_j^i + y^k \Gamma_j^i \partial_{y^k} X^j) \partial_{y^i} \\
 &= -y^j \partial_{y^j} X^i \partial_{x^i} + y^k \Gamma_j^i \partial_{y^k} X^j \partial_{y^i},
 \end{aligned}$$

Concluimos que  $\tau_{\mathcal{H}}(X) = [h, C](X) = [hX, C] - h[X, C] = 0$ .  $\square$

## 2.3 Métricas Finsler

Uma métrica Finsler determina várias estruturas na variedade, em particular, determina um *spray* munido de propriedades adicionais. Sejam  $F$  uma métrica Finsler em  $M$  e  $E := \frac{1}{2}F^2$  a energia associada.

**Exercício 2.3.1.** *Mostre que  $C \cdot E = 2E$ , ou seja,  $E$  é positivamente homogênea de grau 2 na fibra.*

**Definição 2.3.2.**  $\omega := d(dE \circ \mathcal{J}) \in \Omega^2(TM_0)$  é chamada de forma fundamental da variedade Finsler  $(M, F)$ .

**Proposição 2.3.3.** A 2-forma  $\omega$  é uma forma simplética (exata) em  $TM_0$ . Mais ainda, valem

$$(i) \quad i_C \omega = dE \circ \mathcal{J}.$$

$$(ii) \quad \mathcal{L}_C \omega = \omega.$$

$$(iii) \quad \omega(\mathcal{J}X, Y) = \omega(\mathcal{J}Y, X), \forall X, Y.$$

**Demonstração.**  $\omega$  é fechada pois é exata, bastando mostrar que é não-degenerada. Em coordenadas naturais  $(x, y), y \neq 0$ , temos

$$\begin{aligned} dE &= E_{x^i} dx^i + E_{y^i} dy^i, \\ dE \circ \mathcal{J} &= E_{y^i} dx^i, \\ \omega &= d(dE \circ \mathcal{J}) = E_{y^i x^j} dx^j \wedge dx^i + E_{y^i y^j} dy^j \wedge dx^i. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Segue que

$$\omega^n = (-1)^n n! \det(E_{y^i y^j}) dx^1 \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dy^n.$$

Como  $\det(E_{y^i y^j}) \neq 0$ , temos que  $\omega^n$  é uma forma de volume em  $TM_0$  e, portanto,  $\omega$  é não-degenerada.

Como  $E$  é positivamente homogênea de grau 2 em  $y$ , temos que  $E_{y^i}$  é positivamente homogênea de grau 1 em  $y$  e, portanto,  $y^j E_{y^i y^j} = E_{y^i}$ . Usando que  $C = y^j \partial_{y^j}$ , temos de (2.13) que  $i_C \omega = y^j E_{y^i y^j} dx^i = E_{y^i} dx^i = dE \circ \mathcal{J}$ . As propriedades (ii) e (iii) são deixadas a cargo do leitor.  $\square$

Pela Proposição 2.3.3, existe um único campo de vetores  $S \in \mathcal{X}(TM)$  determinado por

$$i_S \omega = -dE. \quad (2.14)$$

**Teorema 2.3.4.** Seja  $(M, F)$  uma variedade Finsler e  $S$  o campo de vetores definido em (2.14), onde  $E = \frac{1}{2}F^2$  é a energia e  $\omega$  é a forma fundamental de  $(M, F)$ . Então  $S$  é um spray e coincide com o campo geodésico definido em (1.13). Seja  $\mathcal{H}$  a distribuição horizontal determinada por  $S$  como no Teorema 2.2.3. Então  $t_{\mathcal{H}} = 0$  e  $\tau_{\mathcal{H}} = 0$ , onde  $t_{\mathcal{H}}$  e  $\tau_{\mathcal{H}}$  são a torção fraca e a tensão de  $\mathcal{H}$ , respectivamente. Além disso,  $\mathcal{H}$  é conservativa, ou seja,  $dE \circ h = 0$ .

**Demonstração.** Em coordenadas naturais  $(x, y)$ ,  $y \neq 0$ , seja  $S = X^i \partial_{x^i} - 2G^i \partial_{y^i}$ . Usando (2.13) e (2.14), obtemos

$$((E_{y^i x^j} - E_{y^j x^i})X^j - 2E_{y^i y^j} G^j) dx^i - E_{y^j y^i} X^j dy^i = -E_{x^i} dx^i - E_{y^i} dy^i.$$

Segue que para todo  $i$  fixo vale

$$E_{y^j y^i} X^j = E_{y^i} = E_{y^i y^j} y^j = E_{y^j y^i} y^j, \quad (2.15)$$

sendo a penúltima igualdade válida pois  $E_{y^i}$  é positivamente homogênea de grau 1 em  $y$ . Como  $\det(E_{y^j y^i}) \neq 0$ , obtemos  $X^j = y^j, \forall j$ , o que prova que  $S$  é um *semi-spray*. Segue também que para todo  $i$  fixo vale

$$\begin{aligned} 2E_{y^i y^j} G^j &= E_{x^i} + (E_{y^i x^j} - E_{y^j x^i})X^j \\ &= E_{x^i} + (E_{y^i x^j} - E_{y^j x^i})y^j \\ &= E_{x^i} - 2E_{x^i} + E_{y^i x^j} y^j \\ &= -E_{x^i} + E_{y^i x^j} y^j. \end{aligned} \quad (2.16)$$

A penúltima igualdade segue de  $E_{x^i}$  ser positivamente homogênea de grau 2 em  $y$ . Como  $\det(E_{y^j y^i}) \neq 0$ ,  $E_{y^i y^j}$  é positivamente homogênea de grau 0 em  $y$  e o lado direito de (2.16) é positivamente homogêneo de grau 2 em  $y$ , podemos resolver o sistema (2.16), obtendo funções  $G^j$  positivamente homogêneas de grau 2 em  $y$ . Isso mostra que  $S$  é um *spray*. Sejam  $g_{ij} := E_{y^i y^j}$  e  $(g^{ij})$  a matriz inversa de  $(g_{ij})$ . Multiplicando ambos os lados de (2.16) por  $g^{ji}$ , obtemos

$$G^j = \frac{1}{2} g^{ji} (-E_{x^i} + E_{y^i x^k} y^k). \quad (2.17)$$

Concluimos que  $S$  coincide com o campo geodésico definido em (1.13).

Pela definição de  $S$  em (2.14), temos  $dE \cdot S = -\omega(S, S) = 0$ , ou seja,  $E_{x^j} y^j - 2G^j E_{y^j} = 0$ . Derivando esta expressão em relação a  $y^i$ ,  $i$  fixo, obtemos

$$E_{y^i x^j} y^j + E_{x^i} - 2E_{y^j y^i} G^j - 2E_{y^i} \partial_{y^i} G^j = 0. \quad (2.18)$$

De (2.16) e (2.18), obtemos

$$E_{x^i} = E_{y^j} G^j, \forall i \text{ fixo}, \quad (2.19)$$

onde  $G_i^j = \partial_{y^i} G^j$ . Se  $X = X^i \partial_{x^i} + Y^i \partial_{y^i}$ , então de (2.12) temos

$$hX = X^i (\partial_{x^i} - G_i^j \partial_{y^j}).$$

Logo, usando (2.19), obtemos

$$dE \cdot hX = X^i (E_{x^i} - E_{y^j} G_i^j) = 0.$$

Como  $G^i$  é positivamente homogênea de grau 2 em  $y$ , temos que  $\Gamma_j^i = G_j^i$  é positivamente homogênea de grau 1 em  $y$ . Pelo Exercício 2.1.13, a tensão  $\tau_{\mathcal{H}}$  de  $\mathcal{H}$  é nula.

A torção fraca é dada por  $t_{\mathcal{H}} = [\mathcal{J}, h]$ , onde  $h = \frac{1}{2}(I + \Gamma)$  e  $\Gamma = [\mathcal{J}, S]$  é a conexão de Grifone associada a  $S$ . Como  $[\mathcal{J}, h]$  é semi-básico, vamos assumir que  $X, Y$  são campos horizontais quaisquer. Usando (2.6) e que  $\mathcal{J}h = \mathcal{J}$ , obtemos

$$\begin{aligned} t_{\mathcal{H}}(X, Y) &= [\mathcal{J}X, Y] + [X, \mathcal{J}Y] + \mathcal{J}h[X, Y] \\ &\quad - \mathcal{J}[X, Y] - \mathcal{J}[X, Y] - h[X, \mathcal{J}Y] - h[\mathcal{J}X, Y] \quad (2.20) \\ &= v[\mathcal{J}X, Y] + v[X, \mathcal{J}Y] - \mathcal{J}[X, Y]. \end{aligned}$$

Em coordenadas locais, temos

$$\begin{aligned} X &= X^i \partial_{x^i} - X^k \Gamma_k^i \partial_{y^i} \Rightarrow \mathcal{J}X = X^i \partial_{y^i}, \\ Y &= Y^i \partial_{x^i} - Y^j \Gamma_j^i \partial_{y^i} \Rightarrow \mathcal{J}Y = Y^i \partial_{y^i}, \end{aligned}$$

onde  $\Gamma_j^i = \partial_{y^j} G^i$ . Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[X, Y] &= (X^j \partial_{x^j} Y^i - X^k \Gamma_k^j \partial_{y^j} Y^i - Y^j \partial_{x^j} X^i + Y^k \Gamma_k^j \partial_{y^j} X^i) \partial_{x^i}, \\ [\mathcal{J}X, Y] &= X^j \partial_{y^j} Y^i \partial_{x^i} \\ &\quad + (-X^k \partial_{y^k} (Y^j \Gamma_j^i) - Y^j \partial_{x^j} X^i + Y^k \Gamma_k^j \partial_{y^j} X^i) \partial_{y^i} \\ v[\mathcal{J}X, Y] &= (-X^k Y^j \partial_{y^k} \Gamma_j^i - Y^j \partial_{x^j} X^i + Y^k \Gamma_k^j \partial_{y^j} X^i) \partial_{y^i}, \\ [X, \mathcal{J}Y] &= -Y^j \partial_{y^j} X^i \partial_{x^i} \\ &\quad + (X^j \partial_{x^j} Y^i - X^k \Gamma_k^j \partial_{y^j} Y^i + Y^j \partial_{y^j} (X^k \Gamma_k^i)) \partial_{y^i}, \\ v[X, \mathcal{J}Y] &= (X^j \partial_{x^j} Y^i - X^k \Gamma_k^j \partial_{y^j} Y^i + Y^j X^k \partial_{y^j} \Gamma_k^i) \partial_{y^i} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Usando (2.20) e (2.21), obtemos

$$t_{\mathcal{H}}(X, Y) = (\partial_{y^j} \Gamma_k^i - \partial_{y^k} \Gamma_j^i) X^k Y^j \partial_{y^i} = 0,$$

pois  $\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^k \partial y^j} = \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k}$ . □

**Exercício 2.3.5.** *Mostre que em coordenadas naturais temos*

$$\omega = g_{ij} \delta y^j \wedge dx^i,$$

onde  $\delta y^j = dy^j + G_k^j dx^k$  e  $g_{ij} = E_{y^i y^j}$ . *Conclua que as distribuições horizontal e vertical são distribuições Lagrangeanas, ou seja,  $\omega|_{\mathcal{H}} = \omega|_{\mathcal{V}} = 0$ .*

**Definição 2.3.6.** *Seja  $(M, F)$  uma variedade Finsler com forma fundamental  $\omega$  e distribuição horizontal  $\mathcal{H}$  como no Teorema 2.3.4. Definimos uma métrica Riemanniana  $g$  em  $TM_0$  da seguinte forma: dados  $X, Y \in \mathcal{X}(TM_0)$ , seja*

$$g(X, Y) := \omega(\mathcal{J}X, Y) + \omega(vX, hFY).$$

*A métrica  $g$  é chamada de métrica prolongada em  $TM_0$ .*

**Exercício 2.3.7.** *Mostre que em coordenadas naturais*

$$g = g_{ij} (dx^i \otimes dx^j + \delta y^i \otimes \delta y^j), \quad (2.22)$$

onde  $g_{ij} = E_{y^i y^j}$  e  $\delta y^i = dy^i + G_j^i dx^j$ . *Conclua que  $g$  é de fato uma métrica Riemanniana em  $TM_0$  e que  $g(C, C) = 2E$ .*

### O Tensor de Cartan

**Definição 2.3.8.** *Seja  $(M, F)$  uma variedade Finsler com métrica prolongada  $g$ . Definimos o tensor de Cartan  $C_b$  de  $(M, F)$  por*

$$C_b(X, Y, Z) := \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{\mathcal{J}X} \mathcal{J}^* g)(Y, Z), \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(TM_0) \quad (2.23)$$

onde  $\mathcal{L}$  denota a derivada de Lie usual.

**Proposição 2.3.9.** *Em coordenadas naturais, temos*

$$C_b = C_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k, \quad (2.24)$$

onde  $C_{ijk} := \frac{1}{2} \partial_{y^k} g_{ij}$ . *Em particular,  $C_b$  é totalmente simétrico.*

**Demonstração.** Sejam  $X = X^i \partial_{x^i} + U^i \partial_{y^i}$ ,  $Y = Y^i \partial_{x^i} + W^i \partial_{y^i}$  e  $Z = Z^i \partial_{x^i} + S^i \partial_{y^i}$ . Pelo Exercício 2.3.7, temos  $\mathcal{J}^*g(X, Y) = g(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y) = g(X^i \partial_{y^i}, Y^i \partial_{y^i}) = g_{ij} X^i Y^j$ , e, portanto,  $\mathcal{J}^*g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ . Temos então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{J}X} \mathcal{J}^*g &= (\mathcal{L}_{\mathcal{J}X} g_{ij}) dx^i \otimes dx^j + g_{ij} \mathcal{L}_{\mathcal{J}X} dx^i \otimes dx^j \\ &\quad + g_{ij} dx^i \otimes \mathcal{L}_{\mathcal{J}X} dx^j. \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{L}_{\mathcal{J}X} dx^i = i_{\mathcal{J}X} ddx^i + di_{\mathcal{J}X} dx^i = 0 = \mathcal{L}_{\mathcal{J}X} dx^j$  e

$$\mathcal{L}_{\mathcal{J}X} g_{ij} = i_{\mathcal{J}X} dg_{ij} = \partial_{y^k} g_{ij} X^k = 2\mathcal{C}_{ijk} X^k,$$

concluimos que  $\mathcal{C}_b(X, Y, Z) = \mathcal{C}_{ijk} X^k Y^i Z^j = \mathcal{C}_{ijk} X^i Y^j Z^k$ . Portanto,  $\mathcal{C}_b = \mathcal{C}_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$ .  $\square$

**Definição 2.3.10.** *Seja  $\mathcal{C} : \mathcal{X}(TM_0) \times \mathcal{X}(TM_0) \rightarrow \mathcal{X}(TM_0)$  o único tensor satisfazendo*

(i)  $\mathcal{C}$  é simétrico e semi-básico.

(ii)  $g(\mathcal{C}(X, Y), \mathcal{J}Z) = \mathcal{C}_b(X, Y, Z), \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(TM_0)$ .

O tensor  $\mathcal{C}$  também é chamado de tensor de Cartan.

Em coordenadas naturais,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{ij}^k dx^i \otimes dx^j \otimes \partial_{y^k}$ . Se  $X = X^i \delta_{x^i} + U^i \partial_{y^i}$ ,  $Y = Y^i \delta_{x^i} + V^i \partial_{y^i}$  e  $Z = Z^i \delta_{x^i} + W^i \partial_{y^i}$ , temos  $\mathcal{C}(X, Y) = \mathcal{C}_{ij}^k X^i Y^j \partial_{y^k}$ . Logo

$$g(\mathcal{C}_{ij}^k X^i Y^j \partial_{y^k}, Z^m \partial_{y^m}) = g_{km} \mathcal{C}_{ij}^k X^i Y^j Z^m = \mathcal{C}_{ijm} X^i Y^j Z^m.$$

Segue que os coeficientes de  $\mathcal{C}$  são dados por

$$\mathcal{C}_{ij}^k = g^{km} \mathcal{C}_{ijm}.$$

### O tensor de Landsberg

**Definição 2.3.11.** *Seja  $(M, F)$  uma variedade Finsler com métrica prolongada  $g$ . O tensor  $L_b$  em  $TM_0$  definido por*

$$L_b(X, Y, Z) := \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{hX} g)(\mathcal{J}Y, \mathcal{J}Z), \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(TM_0), \quad (2.25)$$

é chamado de tensor de curvatura de Landsberg de  $(M, F)$ .

**Definição 2.3.12.** *Uma métrica Finsler é chamada de métrica de Landsberg se  $L_{\flat} \equiv 0$ .*

O tensor de Landsberg é também chamado de segundo tensor de Cartan.

**Proposição 2.3.13.** *Em coordenadas naturais, temos*

$$L_{\flat} = L_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k, \quad (2.26)$$

onde  $L_{ijk} := \frac{1}{2} g_{ms} y^s \frac{\partial^3 G^m}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k}$ . Em particular,  $L_{\flat}$  é totalmente simétrico.

**Demonstração.** Sejam  $X = X^i \delta_{x^i} + U^i \partial_{y^i}$ ,  $Y = Y^i \delta_{x^i} + W^i \partial_{y^i}$  e  $Z = Z^i \delta_{x^i} + S^i \partial_{y^i}$ . Então  $hX = X^i \delta_{x^i}$ ,  $\mathcal{J}Y = Y^i \partial_{y^i}$  e  $\mathcal{J}Z = Z^i \partial_{y^i}$ . Pelo Exercício 2.3.7, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{hX} g(\mathcal{J}Y, \mathcal{J}Z) &= \mathcal{L}_{hX} (g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} \delta y^i \otimes \delta y^j)(\mathcal{J}Y, \mathcal{J}Z) \\ &= \mathcal{L}_{hX} (g_{ij} \delta y^i \otimes \delta y^j)(\mathcal{J}Y, \mathcal{J}Z), \end{aligned}$$

pois  $\mathcal{L}_{hX} (g_{ij} dx^i \otimes dx^j)(\mathcal{J}Y, \mathcal{J}Z) = 0$  (verifique!). Temos

$$(\mathcal{L}_{hX} g_{ij}) \delta y^i \otimes \delta y^j = (\partial_{x^k} g_{ij} X^k + g_{ijk} (-G_l^k X^l)) \delta y^i \otimes \delta y^j,$$

onde  $g_{ijk} := \partial_{y^k} g_{ij}$ . Portanto,

$$(\mathcal{L}_{hX} g_{ij}) \delta y^i \otimes \delta y^j (\mathcal{J}Y, \mathcal{J}Z) = (\partial_{x^k} g_{ij} X^k + g_{ijk} (-G_l^k X^l)) Y^i Z^j.$$

Temos ainda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{hX} \delta y^i &= (i_{hX} d(\delta y^i) + d(i_{hX} \delta y^i)) \\ &= i_{hX} d(\delta y^i) \\ &= i_{hX} (\partial_{x^k} G_l^i dx^k \wedge dx^l + \partial_{y^k} G_l^i dy^k \wedge dx^l) \\ &= \partial_{x^k} G_l^i (X^k dx^l - X^l dx^k) + \partial_{y^k} G_l^i (-G_m^k X^m dx^l - X^l dy^k) \end{aligned}$$

Denotando  $G_{lk}^i := \partial_{y^k} G_l^i = \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^l \partial y^k}$ , temos

$$\begin{aligned} g_{ij} \mathcal{L}_{hX} \delta y^i \otimes \delta y^j (\mathcal{J}Y, \mathcal{J}Z) &= -g_{ij} G_{lk}^i X^l Y^k Z^j \\ g_{ij} \delta y^i \otimes \mathcal{L}_{hX} \delta y^j (\mathcal{J}Y, \mathcal{J}Z) &= -g_{ij} G_{lk}^j X^l Y^i Z^k \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{hX}(g_{ij}\delta y^i \otimes \delta y^j)(\mathcal{J}Y, \mathcal{J}Z) &= (\mathcal{L}_{hX}g_{ij})\delta y^i \otimes \delta y^j(\mathcal{J}Y, \mathcal{J}Z) \\ &+ g_{ij} \mathcal{L}_{hX}\delta y^i \otimes \delta y^j(\mathcal{J}Y, \mathcal{J}Z) + g_{ij} \delta y^i \otimes \mathcal{L}_{hX}\delta y^j(\mathcal{J}Y, \mathcal{J}Z) \\ &= (\partial_{x^k}g_{ij} - g_{ijm}G_k^m - g_{mj}G_{ki}^m - g_{im}G_{kj}^m)X^kY^iZ^j \end{aligned}$$

Por (2.19), sabemos que para todo  $k$  fixo, vale

$$E_{x^k} = E_{y^m}G_k^m. \quad (2.27)$$

Derivando (2.27) em relação a  $y^i$  e depois em relação a  $y^j$ , obtemos

$$\partial_{x^k}g_{ij} = g_{ijm}G_k^m + g_{mj}G_{ki}^m + g_{im}G_{kj}^m + E_{y^m}G_{kij}^m, \quad (2.28)$$

onde  $G_{kij}^m := \partial_{y^j}G_{ki}^m = \frac{\partial^3 G^m}{\partial y^k \partial y^i \partial y^j}$ . Segue que

$$\begin{aligned} L_b(X, Y, Z) &= \frac{1}{2}E_{y^m}G_{kij}^m X^k Y^i Z^j \\ &= \frac{1}{2}g_{ms}y^s G_{ijk}^m X^i Y^j Z^k. \end{aligned}$$

Logo

$$L_b = L_{ijk}dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k,$$

onde  $L_{ijk} = \frac{1}{2}g_{ms}y^s G_{ijk}^m$ .  $\square$

**Corolário 2.3.14.** *Toda métrica de Berwald é de Landsberg.*

**Demonstração.** Se  $F$  é de Berwald, então, por definição,  $G^m$  é quadrática em  $y$  e, portanto,  $G_{ijk}^m = 0$ . Segue que  $L_b \equiv 0$ .  $\square$

**Exercício 2.3.15.** *Mostre que*

$$L_{ijk} = -y^m \partial_{x^m} C_{ijk} + 2\partial_{y^m} C_{ijk} G^m + C_{mjk} G_i^m + C_{imk} G_j^m + C_{ijm} G_k^m.$$

**Definição 2.3.16.** *Seja  $L : \mathcal{X}(TM_0) \times \mathcal{X}(TM_0) \rightarrow \mathcal{X}(TM_0)$  o único tensor satisfazendo*

(i)  $L$  é simétrico e semi-básico.

(ii)  $g(L(X, Y), \mathcal{J}Z) = L(X, Y, Z), \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(TM_0)$ .

O tensor  $L$  é também chamado de tensor de Landsberg.

Em coordenadas,

$$L = L_{ij}^k dx^i \otimes dx^j \otimes \partial_{y^k}.$$

Se  $X = X^i \delta_{x^i} + U^i \partial_{y^i}$ ,  $Y = Y^i \delta_{x^i} + V^i \partial_{y^i}$  e  $Z = Z^i \delta_{x^i} + W^i \partial_{y^i}$ , temos  $L(X, Y) = L_{ij}^k X^i Y^j \partial_{y^k}$ . Logo

$$g(L_{ij}^k X^i Y^j \partial_{y^k}, Z^m \partial_{y^m}) = g_{km} L_{ij}^k X^i Y^j Z^m = L_{ijm} X^i Y^j Z^m.$$

Segue que os coeficientes de  $L$  são dados por

$$L_{ij}^k = g^{km} L_{ijm}.$$

## 2.4 Conexões

Nesta seção apresentamos algumas conexões associadas a uma variedade Finsler  $(M, F)$ , conhecidas como conexões de Berwald, Cartan, Chern e Hashiguchi. Fixamos a distribuição horizontal associada a  $(M, F)$  como na Proposição 2.3.4 e definimos axiomáticamente todas estas conexões no fibrado bi-tangente  $TTM_0 \rightarrow TM_0$ . Continuamos a usar as definições e notações das seções anteriores.

### Conexões em fibrados vetoriais

Conexões generalizam a derivada direcional de funções reais em  $\mathbb{R}^n$  para fibrados quaisquer, permitindo construir uma noção de paralelismo. Para cada seção  $X$  de um fibrado  $E \rightarrow B$  e cada  $Z \in T_x B$ ,  $x \in B$ , desejamos associar um elemento  $D_Z X \in E_x$  tal que esta associação satisfaça propriedades usuais de derivação. Definimos uma conexão linear da seguinte forma.

**Definição 2.4.1.** *Seja  $E \rightarrow B$  um fibrado vetorial. Uma conexão linear em  $E$  é uma aplicação  $D : \mathcal{X}(B) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ ,  $(Z, X) \mapsto D_Z X$  satisfazendo as seguintes propriedades*

- (i)  $D_Z(X + Y) = D_Z X + D_Z Y$ ,
- (ii)  $D_Z(fX) = f D_Z X + Z \cdot f X$  (Regra de Leibniz),

$$(iii) D_{fZ_1+Z_2}X = fD_{Z_1}X + D_{Z_2}X,$$

$\forall Z, Z_1, Z_2 \in \mathcal{X}(B), f \in C^\infty(B), X, Y \in \Gamma(E)$ . Se  $Z \in \mathcal{X}(B)$ , então a aplicação  $D_Z : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) : X \mapsto D_Z X$  é chamada de derivada covariante ao longo de  $Z$ .

Se  $D$  é uma conexão linear no fibrado tangente  $TW \rightarrow W$ , podemos definir para cada  $Z \in \mathcal{X}(W)$  e  $\mathcal{T}$  um tensor qualquer em  $W$ , uma derivada covariante  $D_Z \mathcal{T}$  ao longo de  $Z$ , com mesmo tipo de  $\mathcal{T}$ , da seguinte forma: se  $f \in C^\infty(W)$ , então

$$D_Z f := df \cdot Z = Z \cdot f.$$

Se  $\alpha$  é uma 1-forma em  $W$ , definimos

$$(D_Z \alpha)(Y) := D_Z(\alpha(Y)) - \alpha(D_Z Y).$$

Indutivamente, se  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$  são tensores quaisquer em  $W$ , definimos

$$D_Z(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) := (D_Z \mathcal{T}_1) \otimes \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_1 \otimes (D_Z \mathcal{T}_2). \quad (2.29)$$

**Exercício 2.4.2.** *Seja  $\mathcal{T}$  um tensor de tipo  $(1, 1)$  em  $W$ . Mostre que*

$$D_Z \mathcal{T}(Y) = D_Z(\mathcal{T}(Y)) - \mathcal{T}(D_Z Y). \quad (2.30)$$

### Derivadas covariantes e conexões não-lineares numa variedade Finsler

Vimos que uma métrica Finsler  $F$  em  $M$  determina uma distribuição horizontal  $\mathcal{H} \subset TTM$  que, em coordenadas naturais, é dada por  $\mathcal{H} = \text{span}\{\delta_{x^i}\}$ , onde  $\delta_{x^i} = \partial_{x^i} - G_i^j \partial_{y^j}$  e  $G_i^j = G_i^j(x, y)$  são funções positivamente homogêneas de grau 1 em  $y$ , definidas em (2.17).

Se  $\gamma(t) : [0, 1] \rightarrow M$  é uma curva regular e  $v \in T_{\gamma(0)}M$ , então seja  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow TM$  o único levantamento de  $\gamma$  tal que  $\tilde{\gamma}(0) = (\gamma(0), v)$  e

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) \in \mathcal{H}_{\tilde{\gamma}(t)}, \forall t. \quad (2.31)$$

Em coordenadas naturais temos  $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), v(t))$ . A restrição (2.31) impõe que  $\delta y^k(\dot{\tilde{\gamma}}) = 0$ , onde  $\delta y^k = dy^k + G_i^k dx^i$ . Portanto,

$$\dot{v}^k(t) + G_i^k(\gamma(t), v(t))\dot{\gamma}^i(t) = 0, \forall t. \quad (2.32)$$

Teoremas de existência e unicidade de soluções de E.D.O's como (2.32) garantem uma única solução

$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), v(t)), t \in [0, 1], v(0) = v,$$

e definimos dessa forma o transporte paralelo de  $v$  ao longo de  $\gamma$  como o vetor  $v(1) \in T_{\gamma(1)}M$ .

Essa construção induz uma noção de derivada covariante ao longo de uma curva: se  $U$  é uma campo de vetores ao longo de uma curva regular  $\gamma(t)$ , definimos a derivada covariante  $\tilde{D}_{\dot{\gamma}}U(t)$  de  $U$  ao longo de  $\gamma$  por

$$\tilde{D}_{\dot{\gamma}}U(t) = (\dot{U}^k(t) + G_i^k(\gamma(t), U(t))\dot{\gamma}^i(t))\partial_{x^k},$$

de modo que  $U$  é chamado de campo paralelo ao longo de  $\gamma$  se  $\tilde{D}_{\dot{\gamma}(t)}U(t) = 0, \forall t$ .

Se tentarmos encontrar uma conexão  $\tilde{D}$  em  $TM \rightarrow M$  a partir dessa derivada covariante, obtemos

$$\tilde{D}_ZX = (dX^k \cdot Z + G_i^k(X)Z^i)\partial_{x^k},$$

onde  $X, Z \in \mathcal{X}(M)$ . É imediato verificar a seguinte linearidade de  $\tilde{D}$

$$\tilde{D}_{Z_1+fZ_2}X = \tilde{D}_{Z_1}X + f\tilde{D}_{Z_2}X,$$

$\forall Z_1, Z_2, X \in \mathcal{X}(M), f \in C^\infty(M)$ . No entanto, não valem em geral as propriedades (i) e (ii) na Definição 2.4.1 e, portanto,  $\tilde{D}$  não é uma conexão linear.

**Exercício 2.4.3.** *Mostre que se  $U(t)$  é um campo paralelo ao longo de  $\gamma = \gamma(t)$ , então  $\frac{d}{dt}F(\gamma(t), U(t)) = 0, \forall t$ .*

Vamos tentar novamente construir uma conexão linear em  $\pi : TM \rightarrow M$ , agora usando uma outra noção de paralelismo. Como antes, seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  uma curva regular sem auto-interseções e  $v \in T_{\gamma(0)}M$ . Para todo  $t \in [0, 1]$  e todo  $w \in T_{\gamma(t)}M$ , seja  $X_0(\gamma(t), w) \in \mathcal{H}_{(\gamma(t), w)}$  o levantamento de  $\dot{\gamma}(t)$ , ou seja,  $X_0(\gamma(t), w)$  é o único vetor horizontal em  $(\gamma(t), w)$  tal que  $d\pi_{(\gamma(t), w)} \cdot X_0(\gamma(t), w) = \dot{\gamma}(t)$ . Podemos estender  $X_0$  a um campo de vetores em  $TM_0$ , também denotado por  $X_0$ , que define um fluxo  $\phi_t$  em  $TM_0$ . Escolha  $w \in T_{\gamma(0)}M$  e

seja  $\bar{v} = i_{\mathcal{V}}(v) \in \mathcal{V}_{(\gamma(0), w)}$ . Seja  $\bar{v}(t) := d\phi_t(\gamma(0), w) \cdot \bar{v}$ . O transporte paralelo linearizado de  $v$  ao longo de  $\gamma$  é então definido por  $v(1) := i_{\mathcal{V}}^{-1}(\bar{v}(1)) \in T_{\gamma(1)}M$ . Note que  $v(1)$  não depende da extensão de  $X_0$  e é necessariamente vertical, já que o campo  $X_0(\gamma(t), w)$  se projeta em  $\dot{\gamma}$ ,  $\forall w \in T_{\gamma(t)}M$ .

Essa construção também induz uma noção de derivada covariante ao longo de uma curva: se  $U$  é uma campo de vetores ao longo de uma curva regular  $\gamma(t)$ , definimos a derivada covariante  $\hat{D}_{\dot{\gamma}}U(t)$  de  $U$  ao longo de  $\gamma$  por

$$\hat{D}_{\dot{\gamma}}U(t) = (\dot{U}^k(t) + G_i^k(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))U^i(t))\partial_{x^k},$$

de modo que  $U$  é chamado de campo linearmente paralelo ao longo de  $\gamma$  se  $\hat{D}_{\dot{\gamma}(t)}U(t) = 0, \forall t$ .

**Exercício 2.4.4.** *Sejam  $U_1(t)$  e  $U_2(t)$  campos de vetores linearmente paralelos ao longo de uma geodésica  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ . Mostre que  $\frac{d}{dt}g_{\dot{\gamma}(t)}(U_1(t), U_2(t)) = 0, \forall t$ .*

Como antes, podemos tentar construir uma conexão a partir da derivada covariante  $\hat{D}$  por

$$\hat{D}_Z X = (dX^k \cdot Z + G_i^k(Z)X^i)\partial_{x^k},$$

onde  $X, Z \in \mathcal{X}(M)$ . É imediato verificar que

$$\begin{aligned} \hat{D}_Z(X_1 + X_2) &= \hat{D}_Z X_1 + \hat{D}_Z X_2, \\ \hat{D}_Z(fX_1) &= (df \cdot Z)X_1 + f\hat{D}_Z X_1, \\ \hat{D}_{\lambda Z} X_1 &= \lambda\hat{D}_Z X_1, \end{aligned}$$

$\forall Z, X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M), f \in C^\infty(M), \lambda > 0$ . No entanto, a igualdade  $\hat{D}_{Z_1 + \lambda Z_2} X = \hat{D}_{Z_1} X + \lambda\hat{D}_{Z_2} X, \lambda \in \mathbb{R}$ , nem sempre é satisfeita e, novamente,  $\hat{D}$  não é uma conexão linear.

**Exercício 2.4.5.** *Mostre que  $\hat{D}$  é uma conexão linear se e somente se  $F$  é uma métrica de Berwald. Nesse caso, mostre que  $\hat{D} = \tilde{D}$ .*

**Exercício 2.4.6.** *Verifique que*

$$(\hat{D}_Z X)^v = [Z^h, X^v], \forall X, Z \in \mathcal{X}(M), \quad (2.33)$$

onde  $Z^h, X^v$  são os levantamentos horizontal e vertical de  $X$  e  $Z$ , respectivamente.

O transporte paralelo de  $\hat{D}$  construído acima claramente depende da escolha de  $w$ . Porém, antes de projetarmos de volta a  $M$ , temos uma correspondência linear entre as fibras verticais  $\mathcal{V}_w$  e  $\mathcal{V}_{\phi_1(w)}$ . Isso motiva considerarmos o fibrado  $\mathcal{V} \rightarrow TM_0$  ou, equivalentemente, o fibrado tangente *pull-back*

$$\pi_{TM_0}^* TM = \{(v, w) : v \in TM_0, w \in T_{\pi(v)}M\},$$

e tentarmos encontrar conexões lineares nesses fibrados que de alguma forma se projetem em  $M$  com propriedades razoáveis. Note que  $\pi^* TM$  está naturalmente identificado com  $\mathcal{V}$  via  $i_{\mathcal{V}}$ . Mais geralmente, construiremos nas próximas seções conexões lineares no fibrado bi-tangente  $TTM_0 \rightarrow TM_0$  que naturalmente induzem conexões lineares em  $\mathcal{V} \rightarrow TM_0$ .

## 2.5 Conexões Finslerianas

**Definição 2.5.1.** *Seja  $(M, F)$  uma variedade Finsler. Uma conexão de Finsler em  $M$  é uma conexão no fibrado bi-tangente  $\pi : TTM_0 \rightarrow TM_0$ ,  $D : \mathcal{X}(TM_0) \times \mathcal{X}(TM_0) \rightarrow \mathcal{X}(TM_0)$  satisfazendo:*

- (i)  $D$  é redutível, ou seja,  $Dh = 0$ .
- (ii)  $D$  é quase-complexa, ou seja,  $D\mathcal{F} = 0$ .

As derivadas covariantes  $Dh$  e  $D\mathcal{F}$  nas condições (i) e (ii), respectivamente, são definidas como no Exercício 2.4.2, ou seja,  $Dh(Y) = D(hY) - hDY$  e  $D\mathcal{F}(Y) = D(\mathcal{F}Y) - \mathcal{F}DY$ . Segue que

$$\begin{aligned} D(hY) &= hDY \\ D(\mathcal{F}Y) &= \mathcal{F}DY, \end{aligned}$$

$\forall Y \in \mathcal{X}(TM_0)$ .

**Exercício 2.5.2.** *Sejam  $X, Y$  seções horizontal e vertical, respectivamente, ou seja,  $X \in \Gamma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{X}(TM_0)$  e  $Y \in \Gamma(\mathcal{V}) \subset \mathcal{X}(TM_0)$ . Mostre que  $D_Z X \in \Gamma(\mathcal{H})$  e  $D_Z Y \in \Gamma(\mathcal{V}), \forall Z \in \mathcal{X}(TM_0)$ , ou seja, a derivada covariante de uma seção horizontal é horizontal e a derivada covariante de uma seção vertical é vertical. Dica: use (i).*

**Exercício 2.5.3.** *Mostre que  $D\mathcal{J} = 0$ . Dica: use o Exercício 2.4.2 e as relações  $h = \mathcal{F} \circ \mathcal{J}$  e  $\mathcal{F} \circ h = -\mathcal{J}$  para mostrar que  $-(D\mathcal{J})(X) = \mathcal{F}(Dh)(X) + (D\mathcal{F})(hX)$ . Conclua que*

$$D(\mathcal{J}X) = \mathcal{J}DX, \forall X \in \mathcal{X}(TM_0).$$

**Proposição 2.5.4.** *Para todo  $X, Y \in \mathcal{X}(TM_0)$  valem*

$$\begin{aligned} D_{vX}(hY) &= \mathcal{F}D_{vX}(\mathcal{J}Y) \\ D_{hX}(hY) &= \mathcal{F}D_{hX}(\mathcal{J}Y). \end{aligned} \tag{2.34}$$

*Em particular, a conexão  $D$  está determinada por sua ação em  $\mathcal{V}$ .*

**Demonstração.** Como  $D\mathcal{F} = 0$  e  $h = \mathcal{F} \circ \mathcal{J}$ , segue que  $D(hY) = D(\mathcal{F}\mathcal{J}Y) = \mathcal{F}D(\mathcal{J}Y)$ .  $\square$

### 2.5.1 Torção de uma conexão

Seja  $D$  uma conexão de Finsler. Definimos o tensor de torção

$$\mathcal{T} : \mathcal{X}(TM_0) \times \mathcal{X}(TM_0) \rightarrow \mathcal{X}(TM_0)$$

associado a  $D$  por

$$\mathcal{T}(X, Y) := D_X Y - D_Y X - [X, Y].$$

**Exercício 2.5.5.** *Mostre a propriedade tensorial de  $\mathcal{T}$ , ou seja,*

$$\mathcal{T}(fX, gY) = fg\mathcal{T}(X, Y), \forall X, Y \in \mathcal{X}(TM_0), f, g \in C^\infty(TM_0).$$

Denotamos as seguintes componentes de  $\mathcal{T}$  por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(X, Y) &:= h\mathcal{T}(hX, hY), \\ \mathcal{B}(X, Y) &:= h\mathcal{T}(hX, vY), \\ \mathcal{R}^1(X, Y) &:= v\mathcal{T}(hX, hY), \\ \mathcal{P}^1(X, Y) &:= v\mathcal{T}(hX, vY), \\ \mathcal{S}^1(X, Y) &:= v\mathcal{T}(vX, vY), \end{aligned}$$

onde  $X, Y \in \mathcal{X}(TM_0)$ .

**Proposição 2.5.6.** *A torção  $\mathcal{T}$  está completamente determinada pelas aplicações  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{R}^1, \mathcal{P}^1, \mathcal{S}^1$ .*

**Demonstração.** Temos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(X, Y) &= \mathcal{T}(hX + vX, hY + vY) \\ &= \mathcal{T}(hX, hY) + \mathcal{T}(hX, vY) + \mathcal{T}(vX, hY) + \mathcal{T}(vX, vY) \\ &= \mathcal{A}(X, Y) + \mathcal{R}^1(X, Y) + \mathcal{B}(X, Y) + \mathcal{P}^1(X, Y) \\ &\quad - \mathcal{B}(Y, X) - \mathcal{P}^1(Y, X) + \mathcal{S}^1(X, Y), \end{aligned}$$

$\forall X, Y \in \mathcal{X}(TM_0)$ , onde usamos a anti-simetria de  $\mathcal{T}$  e que  $\mathcal{T}(vX, vY)$  é necessariamente vertical.  $\square$

## 2.5.2 A conexão de Berwald

**Definição 2.5.7.** *Definimos a conexão de Berwald  $\overset{\circ}{D}$  como a conexão de Finsler em  $(M, F)$  determinada por*

$$\overset{\circ}{D}_{\mathcal{J}X} \mathcal{J}Y = \mathcal{J}[\mathcal{J}X, Y], \quad (2.35)$$

$$\overset{\circ}{D}_{hX} \mathcal{J}Y = v[hX, \mathcal{J}Y], \quad (2.36)$$

$\forall X, Y \in \mathcal{X}(TM_0)$ . A torção de  $\overset{\circ}{D}$  e suas componentes também são denotadas acrescentando-se o símbolo  $\circ$  acima.

Em coordenadas naturais temos

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{D}_{\partial_{y^j}} \partial_{y^i} &= \mathcal{J} [\partial_{y^j}, \partial_{x^i}] = 0, \\ \overset{\circ}{D}_{\partial_{x^j}} \partial_{y^i} &= \overset{\circ}{D}_{\delta_{x^j} + G_j^k \partial_{y^k}} \partial_{y^i} \\ &= \overset{\circ}{D}_{\delta_{x^j}} \partial_{y^i} + G_j^k \overset{\circ}{D}_{\partial_{y^k}} \partial_{y^i} \\ &= \overset{\circ}{D}_{\delta_{x^j}} \partial_{y^i} \\ &= v [\delta_{x^j}, \partial_{y^i}] \\ &= v [\partial_{x^j} - G_j^k \partial_{y^k}, \partial_{y^i}] \\ &= [-G_j^k \partial_{y^k}, \partial_{y^i}] \\ &= G_{ji}^m \partial_{y^m}. \end{aligned}$$

**Proposição 2.5.8.** *A torção  $\overset{\circ}{\mathcal{T}}$  da conexão de Berwald satisfaz*

$$\overset{\circ}{\mathcal{T}}(X, Y) = R_{\mathcal{H}}(X, Y), \forall X, Y \in \mathcal{X}(TM_0),$$

onde  $R_{\mathcal{H}}$  é a forma de curvatura da distribuição horizontal  $\mathcal{H}$ . Em particular,  $\overset{\circ}{\mathcal{R}}^1 = R_{\mathcal{H}}$  e  $\overset{\circ}{\mathcal{A}} = \overset{\circ}{\mathcal{B}} = \overset{\circ}{\mathcal{P}}^1 = \overset{\circ}{\mathcal{S}}^1 = 0$ .

**Demonstração.** Temos

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathcal{T}}(X, Y) &= \overset{\circ}{D}_{hX}hY + \overset{\circ}{D}_{vX}hY + \overset{\circ}{D}_{hX}vY + \overset{\circ}{D}_{vX}vY \\ &\quad - \overset{\circ}{D}_{hY}hX - \overset{\circ}{D}_{vY}hX - \overset{\circ}{D}_{hY}vX - \overset{\circ}{D}_{vY}vX - [X, Y] \\ &= \mathcal{F}\overset{\circ}{D}_{hX}\mathcal{J}Y + \mathcal{F}\overset{\circ}{D}_{vX}\mathcal{J}Y + \overset{\circ}{D}_{hX}vY + \overset{\circ}{D}_{vX}vY \\ &\quad - \mathcal{F}\overset{\circ}{D}_{hY}\mathcal{J}X - \mathcal{F}\overset{\circ}{D}_{vY}\mathcal{J}X - \overset{\circ}{D}_{hY}vX - \overset{\circ}{D}_{vY}vX - [X, Y] \\ &= \mathcal{F}v[hX, \mathcal{J}Y] + \mathcal{F}\mathcal{J}[vX, Y] + v[hX, vY] + \mathcal{J}[vX, \tilde{Y}] \\ &\quad - \mathcal{F}v[hY, \mathcal{J}X] - \mathcal{F}\mathcal{J}[vY, X] - v[hY, vX] \\ &\quad - \mathcal{J}[vY, \tilde{X}] - [X, Y], \end{aligned} \tag{2.37}$$

onde  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  são campos horizontais tais que  $vX = \mathcal{J}\tilde{X}$  e  $vY = \mathcal{J}\tilde{Y}$ , respectivamente. Como a torção fraca  $t_{\mathcal{H}}$  se anula, sabemos por (2.7), que

$$v[hX, \mathcal{J}Y] + v[\mathcal{J}X, hY] = \mathcal{J}[hX, hY]. \tag{2.38}$$

Como  $[J, J] = 0$ , temos

$$\begin{aligned} [vX, vY] &= [\mathcal{J}\tilde{X}, \mathcal{J}\tilde{Y}] = \mathcal{J}[\mathcal{J}\tilde{X}, \tilde{Y}] + \mathcal{J}[\tilde{X}, \mathcal{J}\tilde{Y}] \\ &= \mathcal{J}[vX, \tilde{Y}] - \mathcal{J}[vY, \tilde{X}]. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Temos ainda que

$$[X, Y] = [hX, hY] + [hX, vY] + [vX, hY] + [vX, vY]. \tag{2.40}$$

Como  $\mathcal{F}\mathcal{J} = h$ , usamos (2.38), (2.39) e (2.40) em (2.37) para concluir

que

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\mathcal{T}}(X, Y) &= h[hX, hY] + h[vX, Y] + h[X, vY] + v[hX, vY] \\
 &\quad + v[vX, hY] + [vX, vY] - [X, Y] \\
 &= h[hX, hY] + h[vX, hY] + h[hX, vY] + v[hX, vY] \\
 &\quad + v[vX, hY] + [vX, vY] - [X, Y] \\
 &= h[hX, hY] + [vX, hY] + [hX, vY] + [vX, vY] - [X, Y] \\
 &= -v[hX, hY] \\
 &= R_{\mathcal{H}}(X, Y).
 \end{aligned}$$

Como  $R_{\mathcal{H}}$  é semi-básica, segue que  $\overset{\circ}{\mathcal{A}} = \overset{\circ}{\mathcal{B}} = \overset{\circ}{\mathcal{P}}^1 = \overset{\circ}{\mathcal{S}}^1 = 0$  e

$$\overset{\circ}{\mathcal{R}}^1(X, Y) = v\overset{\circ}{\mathcal{T}}[hX, hY] = vR_{\mathcal{H}}(hX, hY) = R_{\mathcal{H}}(X, Y),$$

$\forall X, Y \in \mathcal{X}(TM_0)$ . □

**Teorema 2.5.9.** *A conexão de Berwald é a única conexão de Finsler  $D$  em  $(M, F)$  cujas componentes de torção  $\mathcal{P}^1$  e  $\mathcal{B}$  são identicamente nulas.*

**Demonstração.** Pela Proposição 2.5.8, sabemos que as componentes  $\overset{\circ}{\mathcal{P}}^1$  e  $\overset{\circ}{\mathcal{B}}$  da torção de  $\overset{\circ}{D}$  se anulam, bastando provar a unicidade. Seja  $D$  uma conexão Finsler em  $(M, F)$ . Se sua componente de torção  $\mathcal{B} = 0$ , então  $h\mathcal{T}(hX, vY') = 0, \forall X, Y'$ . Isso implica que

$$h(D_{hX}vY' - D_{vY'}hX - [hX, vY']) = 0. \quad (2.41)$$

Como o primeiro termo de (2.41) é vertical e o segundo é horizontal, concluímos que  $D_{vY'}hX = \mathcal{F}D_{vY'}\mathcal{J}X = -h[hX, vY']$ . Multiplicando por  $\mathcal{F}$  e usando que  $\mathcal{F}^2 = -I$  e  $\mathcal{F}h = -\mathcal{J}$ , obtemos  $D_{vY'}\mathcal{J}X = \mathcal{J}[vY', hX]$ . Como  $v = \mathcal{J}\mathcal{F}$  e  $\mathcal{J}$  é semi-básica, obtemos  $D_{\mathcal{J}\mathcal{F}Y'}\mathcal{J}X = \mathcal{J}[\mathcal{J}\mathcal{F}Y', hX] = \mathcal{J}[\mathcal{J}\mathcal{F}Y', X]$ . Como  $\mathcal{F}$  é isomorfismo, qualquer campo  $Y$  é da forma  $Y = \mathcal{F}Y'$  e, portanto,  $D_{\mathcal{J}Y}\mathcal{J}X = \mathcal{J}[\mathcal{J}Y, X], \forall X, Y$  e (2.35) é satisfeita.

Se a componente de torção  $\mathcal{P}^1$  também se anula, então

$$v\mathcal{T}(hX, vY') = 0 \Rightarrow v(D_{hX}vY' - D_{vY'}hX - [hX, vY']) = 0, \forall X, Y'. \quad (2.42)$$

Como o primeiro termo do lado direito de (2.42) é vertical e o segundo é horizontal, obtemos

$$D_{hX}vY' = v[hX, vY'] \Rightarrow D_{hX}\mathcal{J}FY' = v[hX, \mathcal{J}FY'].$$

Como  $\mathcal{F}$  é isomorfismo, qualquer campo  $Y$  é da forma  $Y = \mathcal{F}Y'$ . Logo  $D_{hX}\mathcal{J}Y = v[hX, \mathcal{J}Y], \forall X, Y$ , e (2.36) é satisfeita. Concluimos que  $D = \overset{\circ}{D}$ .  $\square$

### 2.5.3 A conexão de Cartan

**Definição 2.5.10.** Definimos a conexão de Cartan  $\overset{Ca}{D}$  como a conexão de Finsler em  $(M, F)$  determinada por

$$\overset{Ca}{D}_{\mathcal{J}X} \mathcal{J}Y = \mathcal{J}[\mathcal{J}X, Y] + \mathcal{C}(X, Y), \quad (2.43)$$

$$\overset{Ca}{D}_{hX} \mathcal{J}Y = v[hX, \mathcal{J}Y] + L(X, Y), \quad (2.44)$$

$\forall X, Y \in \mathcal{X}(TM_0)$ , onde  $\mathcal{C}$  é o tensor de Cartan e  $L$  é o tensor de Landsberg.

Em coordenadas naturais temos

$$\begin{aligned} \overset{Ca}{D}_{\partial_{y^j}} \partial_{y^i} &= \mathcal{J}[\partial_{y^j}, \delta_{x^i}] + \mathcal{C}(\delta_{x^i}, \delta_{x^j}) \\ &= \mathcal{C}_{ij}^k \partial_{y^k}, \\ \overset{Ca}{D}_{\delta_{x^i}} \partial_{y^j} &= v[\delta_{x^i}, \partial_{y^j}] + L(\delta_{x^i}, \delta_{x^j}) \\ &= v[\partial_{x^i} - G_i^k \partial_{y^k}, \partial_{y^j}] + L(\delta_{x^i}, \delta_{x^j}) \\ &= (G_{ij}^k + L_{ij}^k) \partial_{y^k}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

**Teorema 2.5.11.** Seja  $(M, F)$  uma variedade Finsler. Então a conexão de Cartan é a única conexão de Finsler  $D$  em  $(M, F)$  tal que

(i)  $D$  é métrica, ou seja  $Dg = 0$  onde  $g$  é a métrica prolongada em  $TM_0$ .

(ii) As componentes de torção  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{S}^1$  são identicamente nulas.

**Demonstração.** Em coordenadas naturais, seja  $D$  uma conexão de Finsler como no enunciado e determinada por

$$\begin{aligned} D_{\delta_{x^i}} \partial_{y^j} &= \Lambda_{ij}^m \partial_{y^m} \\ D_{\partial_{y^i}} \partial_{y^j} &= \bar{\Lambda}_{ij}^m \partial_{y^m}. \end{aligned}$$

Então sua componente de torção  $\mathcal{A}$  se anula se e somente se

$$\begin{aligned} 0 &= h(D_{\delta_{x^i}} \delta_{x^j} - D_{\delta_{x^j}} \delta_{x^i} - [\delta_{x^i}, \delta_{x^j}]) \\ &= h(\mathcal{F}D_{\delta_{x^i}} \partial_{y^j} - \mathcal{F}D_{\delta_{x^j}} \partial_{y^i} - [\partial_{x^i} - G_i^k \partial_{y^k}, \partial_{x^j} - G_j^m \partial_{y^m}]) \\ &= h(\Lambda_{ij}^k \delta_{x^k} - \Lambda_{ji}^k \delta_{x^k} + \text{termo vertical}) \\ &= \Lambda_{ij}^k \delta_{x^k} - \Lambda_{ji}^k \delta_{x^k}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow \Lambda_{ij}^k = \Lambda_{ji}^k, \forall i, j, k. \quad (2.46)$$

Da mesma forma,  $\mathcal{S}^1 = 0$  se e somente se

$$\begin{aligned} 0 &= v(D_{\partial_{y^i}} \partial_{y^j} - D_{\partial_{y^j}} \partial_{y^i} - [\partial_{y^i}, \partial_{y^j}]) \\ &= v(\bar{\Lambda}_{ij}^k \partial_{y^k} - \bar{\Lambda}_{ji}^k \partial_{y^k}) \\ &= \bar{\Lambda}_{ij}^k \partial_{y^k} - \bar{\Lambda}_{ji}^k \partial_{y^k}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{S}^1 = 0 \Leftrightarrow \bar{\Lambda}_{ij}^k = \bar{\Lambda}_{ji}^k, \forall i, j, k. \quad (2.47)$$

Pela simetria dos tensores  $\mathcal{C}$  e  $L$ , a conexão de Cartan  $\overset{Ca}{D}$ , determinada por (2.45), satisfaz (2.46) e (2.47).

Como  $g = g_{ij}(dx^i \otimes dx^j + \delta y^i \otimes \delta y^j)$ , temos

$$\begin{aligned} Dg &= Dg_{ij}(dx^i \otimes dx^j + \delta y^i \otimes \delta y^j) \\ &\quad + g_{ij}(D(dx^i) \otimes dx^j + dx^i \otimes D(dx^j)) \\ &\quad + D(\delta y^i) \otimes \delta y^j + \delta y^i \otimes D(\delta y^j). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Temos

$$D.g_{ij} = \partial_{x^k} g_{ij} dx^k \cdot + g_{ijk} dy^k \cdot \cdot \quad (2.49)$$

Se  $X = X^j \delta_{x^j} + Z^j \partial_{y^j}$ , então

$$\begin{aligned} D(dx^i)(X) &= d(dx^i(X)) - dx^i(D(X^j \delta_{x^j} + Z^j \partial_{y^j})) \\ &= dX^i - dx^i(X^j D\delta_{x^j} + dX^j \delta_{x^j} + Z^j D\partial_{y^j} + dZ^j \partial_{y^j}) \\ &= -X^j dx^i(D\delta_{x^j}) - Z^j dx^i(D\partial_{y^j}) \\ &= -X^j dx^i(D\delta_{x^j}). \end{aligned}$$

Logo

$$D.(dx^i) = -dx^i(D.\delta_{x^j})dx^j. \quad (2.50)$$

Também temos

$$\begin{aligned} D(\delta y^j)(X) &= d(\delta y^j(X)) - \delta y^j(DX) \\ &= dZ^j - \delta y^j(D(X^k \delta_{x^k} + Z^k \partial_{y^k})) \\ &= dZ^j - \delta y^j(dX^k \delta_{x^k} + X^k D\delta_{x^k} + dZ^k \partial_{y^k} + Z^k D\partial_{y^k}) \\ &= -X^k \delta y^j(D\delta_{x^k}) - Z^k \delta y^j(D\partial_{y^k}) \\ &= -Z^k \delta y^j(D\partial_{y^k}). \end{aligned}$$

Logo

$$D.(\delta y^j) = -\delta y^j(D.\partial_{y^k})\delta y^k. \quad (2.51)$$

Usando (2.49), (2.50) e (2.51) em (2.48), concluímos que  $Dg = 0$  se e somente se

$$\partial_{x^k} g_{ij} dx^k \cdot + g_{ijk} dy^k \cdot - g_{kj} dx^k (D.\delta_{x^i}) - g_{ik} dx^k (D.\delta_{x^j}) = 0, \quad (2.52)$$

$$\partial_{x^k} g_{ij} dx^k \cdot + g_{ijk} dy^k \cdot - g_{kj} \delta y^k (D.\partial_{y^i}) - g_{ik} \delta y^k (D.\partial_{y^j}) = 0, \quad (2.53)$$

para  $i, j$  fixados. Como  $D$  é uma conexão de Finsler, temos que  $D\delta_{x^j} = \mathcal{F}D\partial_{y^j}$  e, portanto,

$$dx^k(D\delta_{x^j}) = dx^k(\mathcal{F}D\partial_{y^j}) = \mathcal{F}^* dx^k(D\partial_{y^j}) = \delta y^k(D\partial_{y^j}).$$

Segue que  $Dg = 0$  se e somente se vale (2.53). Aplicando  $\delta_{x^m}$  e  $\partial_{y^m}$  em (2.53) temos que  $Dg = 0$  se e somente se

$$\partial_{x^m} g_{ij} - g_{ijk} G_m^k - g_{kj} \Lambda_{mi}^k - g_{ik} \Lambda_{mj}^k = 0, \quad (2.54)$$

$$g_{ijm} - g_{kj} \bar{\Lambda}_{mi}^k - g_{ik} \bar{\Lambda}_{mj}^k = 0, \quad (2.55)$$

$\forall i, j, m$  fixados. Rotacionando os índices  $i, j, m$ , em (2.55) e usando a simetria de  $g_{ijm}$  obtemos também

$$g_{ijm} - g_{ki}\bar{\Lambda}_{jm}^k - g_{mk}\bar{\Lambda}_{ji}^k = 0, \quad (2.56)$$

$$g_{ijm} - g_{km}\bar{\Lambda}_{ij}^k - g_{jk}\bar{\Lambda}_{im}^k = 0. \quad (2.57)$$

Usando a simetria (2.47) e fazendo (2.55)+(2.56)-(2.57), obtemos

$$g_{ijm} = 2g_{ik}\bar{\Lambda}_{jm}^k \Rightarrow \bar{\Lambda}_{jm}^k = \frac{1}{2}g^{ki}g_{jmi} = g^{ki}C_{jmi} = C_{jmk}^k. \quad (2.58)$$

Da mesma forma, rotacionando os índices  $i, j, m$ , em (2.54) obtemos

$$\partial_{x^i}g_{jm} - g_{jmk}G_i^k - g_{km}\Lambda_{ij}^k - g_{jk}\Lambda_{im}^k = 0, \quad (2.59)$$

$$\partial_{x^j}g_{mi} - g_{mik}G_j^k - g_{ki}\Lambda_{jm}^k - g_{mk}\Lambda_{ji}^k = 0. \quad (2.60)$$

Usando a simetria (2.46) e fazendo (2.54)+(2.59)-(2.60), obtemos

$$\begin{aligned} 2g_{kj}\Lambda_{im}^k &= \partial_{x^m}g_{ij} - g_{ijk}G_m^k + \partial_{x^i}g_{jm} - g_{jmk}G_i^k, \\ &\quad - \partial_{x^j}g_{mi} + g_{mik}G_j^k. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Por (2.28), sabemos que

$$\begin{aligned} \partial_{x^m}g_{ij} - g_{ijk}G_m^k &= g_{kj}G_{mi}^k + g_{ik}G_{mj}^k + E_{y^k}G_{mij}^k, \\ \partial_{x^i}g_{jm} - g_{jmk}G_i^k &= g_{km}G_{ij}^k + g_{jk}G_{im}^k + E_{y^k}G_{ijm}^k, \\ \partial_{x^j}g_{mi} - g_{mik}G_j^k &= g_{ki}G_{jm}^k + g_{mk}G_{ji}^k + E_{y^k}G_{jmi}^k. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Pela simetria de  $g_{ij}$ ,  $G_{ijm}^k$  etc, usamos (2.62) em (2.61) e chegamos a

$$2g_{kj}\Lambda_{mi}^k = 2g_{kj}G_{mi}^k + E_{y^k}G_{mij}^k, \quad (2.63)$$

$\forall i, j, m$  fixados. Segue que

$$\begin{aligned} \Lambda_{mi}^k &= G_{mi}^k + \frac{1}{2}g^{kj}E_{y^s}G_{mij}^s \\ &= G_{mi}^k + g^{kj}L_{mij} \\ &= G_{mi}^k + L_{mi}^k. \end{aligned} \quad (2.64)$$

As expressões de  $\Lambda_{ij}^k$  e  $\bar{\Lambda}_{ij}^k$  em (2.58) e (2.64) implicam que  $D$  coincide com a conexão de Cartan. Deixamos a cargo do leitor verificar

que (2.58) implica (2.55) e que as equações (2.62) e (2.64) implicam (2.54). Segue daí que a conexão de Cartan é métrica. Isso conclui a demonstração do teorema.  $\square$

**Exercício 2.5.12.** *Mostre que  $\mathcal{B}^{Ca}(X, \mathcal{J}Y) = -\mathcal{F}\mathcal{C}(X, Y)$  e também que  $\mathcal{P}^1^{Ca}(X, \mathcal{J}Y) = L(X, Y)$ , para todo  $X, Y \in \mathcal{X}(TM_0)$ .*

### 2.5.4 A conexão de Chern-Rund

**Definição 2.5.13.** *Definimos a conexão de Chern-Rund  $D^{CR}$  como a conexão de Finsler em  $(M, F)$  determinada por*

$$D^{CR}_{\mathcal{J}X} \mathcal{J}Y = \mathcal{J}[\mathcal{J}X, Y], \quad (2.65)$$

$$D^{CR}_{hX} \mathcal{J}Y = v[hX, \mathcal{J}Y] + L(X, Y), \quad (2.66)$$

$\forall X, Y \in \mathcal{X}(TM_0)$ . A torção de  $D^{CR}$  e suas componentes também são denotadas acrescentando-se  $CR$  acima.

Conforme calculado para as conexões de Berwald e de Cartan, temos em coordenadas naturais

$$D^{CR}_{\partial_{y^i}} \partial_{y^j} = \overset{\circ}{D}_{\partial_{y^i}} \partial_{y^j} = 0, \quad (2.67)$$

$$D^{CR}_{\delta_{x^i}} \partial_{y^j} = D^{Ca}_{\delta_{x^i}} \partial_{y^j} = (G^k_{ij} + L^k_{ij}) \partial_{y^k}.$$

**Teorema 2.5.14.** *A conexão de Chern-Rund é a única conexão de Finsler  $D$  em  $(M, F)$  tal que*

$$(i) \quad D_{\mathcal{J}X} \mathcal{J}Y = \mathcal{J}[\mathcal{J}X, Y].$$

$$(ii) \quad D \text{ é horizontalmente métrica, ou seja, } D_{hX} g = 0, \forall X \in \mathcal{X}(TM_0), \text{ onde } g \text{ é a métrica prolongada em } TM_0.$$

$$(iii) \quad \text{A componente de torção } \mathcal{A} \text{ é identicamente nula.}$$

**Demonstração.** Em coordenadas naturais, seja  $D$  uma conexão de Finsler como no enunciado, e determinada por

$$D_{\delta_{x^i}} \partial_{y^j} = \Lambda^m_{ij} \partial_{y^m}$$

$$D_{\partial_{y^i}} \partial_{y^j} = \bar{\Lambda}^m_{ij} \partial_{y^m}.$$

A condição (i) é equivalente a

$$\begin{aligned} D_{\partial_{y^i}} \partial_{y^j} &= \mathcal{J}[\partial_{y^i}, \delta_{x^j}] \\ &= \mathcal{J}[\partial_{y^i}, \partial_{x^j} - G_j^k \partial_{y^k}] \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, (i) é equivalente a

$$\bar{\Lambda}_{ij}^k = 0, \forall i, j, k. \quad (2.68)$$

Sabemos pela demonstração do Teorema 2.5.11 que a componente de torção  $\mathcal{A}$  se anula se e somente se

$$\Lambda_{ij}^k = \Lambda_{ji}^k, \forall i, j, k. \quad (2.69)$$

Aplicando  $\delta_{x^k}$  em (2.53) temos que  $D_{hX}g = 0$  se e somente se

$$\partial_{x^m} g_{ij} - g_{ijk} G_m^k - g_{kj} \Lambda_{mi}^k - g_{ik} \Lambda_{mj}^k = 0. \quad (2.70)$$

Usando (2.68) e (2.69), vimos também que (2.70) é equivalente a

$$\Lambda_{ij}^k = G_{ij}^k + L_{ij}^k.$$

Portanto,  $D$  deve ser a conexão de Chern-Rund que, por sua vez, deve satisfazer as condições (i), (ii) e (iii) do enunciado.  $\square$

**Exercício 2.5.15.** *Mostre que  $\overset{CR}{S^1} = \overset{CR}{\mathcal{B}} = 0$  e  $\overset{CR}{\mathcal{P}^1}(X, \mathcal{J}Y) = L(X, Y)$  para todo  $X, Y \in \mathcal{X}(TM_0)$ .*

Uma boa referência para mais detalhes sobre esta conexão é [26].

### 2.5.5 A conexão de Hashiguchi

**Definição 2.5.16.** *Definimos a conexão de Hashiguchi  $\overset{H}{D}$  como a conexão de Finsler em  $(M, F)$  determinada por*

$$\overset{H}{D}_{\mathcal{J}X} \mathcal{J}Y = \mathcal{J}[\mathcal{J}X, Y] + \mathcal{C}(X, Y), \quad (2.71)$$

$$\overset{H}{D}_{hX} \mathcal{J}Y = v[hX, \mathcal{J}Y], \quad (2.72)$$

$\forall X, Y \in \mathcal{X}(TM_0)$ . A torção de  $\overset{H}{D}$  e suas componentes também são denotadas acrescentando-se  $H$  acima.

Em coordenadas naturais

$$\begin{aligned} \overset{H}{D}_{\partial_{y^i}} \partial_{y^j} &= \overset{Ca}{D}_{\partial_{y^i}} \partial_{y^j} = C_{ij}^k \partial_{y^k}, \\ \overset{H}{D}_{\delta_{x^i}} \partial_{y^j} &= \overset{\circ}{D}_{\delta_{x^i}} \partial_{y^j} = G_{ij}^k \partial_{y^k}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

**Teorema 2.5.17.** *Seja  $(M, F)$  uma variedade Finsler. Então a conexão de Hashiguchi é a única conexão de Finsler  $D$  em  $(M, F)$  tal que*

- (i)  *$D$  é verticalmente métrica, ou seja,  $D_v X g = 0, \forall X \in \mathcal{X}(TM_0)$ , onde  $g$  é a métrica prolongada em  $TM_0$ .*
- (ii) *As componentes de torção  $\mathcal{S}^1$  e  $\mathcal{P}^1$  são identicamente nulas.*

Convidamos o leitor a demonstrar o Teorema 2.5.17, seguindo passos análogos aos das demonstrações dos Teoremas 2.5.9 e 2.5.11.

**Definição 2.5.18.** *Chamaremos de conexão de Finsler clássica qualquer uma das quatro conexões de Finsler vistas acima.*

### 2.5.6 Conexões Finslerianas simétricas

**Definição 2.5.19.** *Dizemos que uma conexão de Finsler  $D$  em  $(M, F)$  é simétrica se*

$$D_X \mathcal{J}Y - D_Y \mathcal{J}X = \mathcal{J}[X, Y], \quad (2.74)$$

$\forall X, Y \in \mathcal{X}(TM_0)$ .

Note que esta definição não coincide com o sentido clássico de conexão simétrica onde se exige que sua torção seja identicamente nula.

**Proposição 2.5.20.** *São equivalentes:*

- (i) *A conexão de Finsler  $D$  é simétrica.*
- (ii)  *$D_{\mathcal{J}X} \mathcal{J}Y = \mathcal{J}[\mathcal{J}X, Y], \forall X, Y \in \mathcal{X}(TM_0)$ . Em particular, em coordenadas naturais, vale  $D_{\partial_{y^i}} \partial_{y^j} = 0$ . Além disso,  $\Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ji}^m, \forall i, j, k$ , onde  $D_{\delta_{x^i}} \partial_{y^j} = \Gamma_{ij}^m \partial_{y^m}$ .*

**Demonstração.** Suponha que vale (2.74). Substituindo  $X$  por  $JX$  em (2.74), obtemos  $D_{\mathcal{J}X}\mathcal{J}Y = \mathcal{J}[\mathcal{J}X, Y]$ . Isso implica que para  $X = \delta_{x^i}, Y = \delta_{x^j}$ , temos  $D_{\partial_{y^i}}\partial_{y^j} = 0$ . Substituindo  $X = \delta_{x^i}$  e  $Y = \delta_{x^j}$  em (2.74), obtemos

$$\Gamma_{ij}^m \partial_{y^m} - \Gamma_{ji}^m \partial_{y^m} = D_{\delta_{x^i}}\partial_{y^j} - D_{\delta_{x^j}}\partial_{y^i} = \mathcal{J}[\delta_{x^i}, \delta_{x^j}] = 0$$

e, portanto,  $\Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ji}^m, \forall i, j, m$ . Logo (i) implica (ii). Fica como exercício provar que (ii) implica (i). Isso termina a demonstração.  $\square$

**Corolário 2.5.21.** *As conexões de Berwald e de Chern-Rund são simétricas.*

**Demonstração.** Ambas as conexões satisfazem a condição (ii).  $\square$

Note que em geral as conexões de Cartan e de Hashiguchi não são simétricas.

### 2.5.7 Levantamentos regulares da conexão de Grifone

Seja  $(M, F)$  uma variedade Finsler. A conexão de Grifone  $\Gamma$  associada a  $(M, F)$  está fixada conforme a Proposição 2.3.4, onde  $\Gamma = 2h - I$  e  $h$  é projeção horizontal. Lembre que  $C = y^j \partial_{y^j}$ .

**Definição 2.5.22.** *Uma conexão de Finsler  $D$  em  $(M, F)$  é chamada de levantamento regular de  $\Gamma$  se a aplicação  $DC : TTM_0 \rightarrow TTM_0 : Z \mapsto D_Z C$  é tal que*

(i)  $DC|_{\mathcal{V}}$  é um isomorfismo.

(ii)  $\ker DC = \mathcal{H}$ .

Em coordenadas naturais denotemos  $D_{\delta_{x^i}}\partial_{y^j} = \Gamma_{ij}^m \partial_{y^m}$ . Temos

$$\begin{aligned} D_{\partial_{y^i}}C &= D_{\partial_{y^i}}(y^j \partial_{y^j}) = \partial_{y^i} + y^j D_{\partial_{y^i}}\partial_{y^j} \\ D_{\delta_{x^i}}C &= D_{\delta_{x^i}}(y^j \partial_{y^j}) \\ &= \delta_{x^i} y^j \partial_{y^j} + y^j D_{\delta_{x^i}}\partial_{y^j} \\ &= -C_i^j \partial_{y^j} + y^j \Gamma_{ij}^m \partial_{y^m}. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Temos então a seguinte proposição.

**Proposição 2.5.23.** *Seja  $D$  uma conexão de Finsler clássica. Então  $DC = v$ . Em particular,  $D$  é um levantamento regular de  $\Gamma$ .*

**Demonstração.** Primeiramente, observe que  $y^j D_{\partial_{y^i}} \partial_{y^j} = 0$  para as quatro conexões de Finsler clássicas, já que vale um das possibilidades:  $D_{\partial_{y^i}} \partial_{y^j} = 0$  ou  $D_{\partial_{y^i}} \partial_{y^j} = C_{ij}^k \partial_{y^k}$ . Como  $y^j C_{ij}^k = 0$ , segue a afirmação. Por (2.75), isso implica que

$$D_{\partial_{y^i}} C = \partial_{y^i}. \quad (2.76)$$

Também por (2.75), segue que  $D_{\delta_{x^i}} C = y^j \Gamma_{ij}^m \partial_{y^m} - G_i^m \partial_{y^m}$ . Para as quatro conexões sabemos que vale uma das possibilidades:  $\Gamma_{ij}^m = G_{ij}^m$  ou  $\Gamma_{ij}^m = G_{ij}^m + L_{ij}^m$ . Como  $G$  é positivamente homogênea de grau 2 em  $y$ , temos que

$$y^j L_{ij}^m = y^j \frac{1}{2} g^{mk} E_{y^m} \frac{\partial^3 G^m}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k} = 0.$$

Concluimos que em todos os casos vale  $y^j \Gamma_{ij}^m = y^j G_{ij}^m = G_i^m$  e, portanto,

$$D_{\delta_{x^i}} C = 0. \quad (2.77)$$

Por (2.76) e (2.77), concluimos que  $DC = v$ .  $\square$

**Exercício 2.5.24.** *Seja  $D$  uma conexão de Finsler simétrica. Mostre que se  $D$  é um levantamento regular da conexão de Grifone, então  $DC = v$ .*

### 2.5.8 Derivadas covariantes e transporte paralelo

Sejam  $(M, F)$  uma variedade Finsler e  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  uma geodésica. Seja  $V(t)$  um campo de vetores ao longo de  $\gamma$ , ou seja  $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ ,  $\forall t$ . Vamos definir uma derivada covariante  $D_{\dot{\gamma}}V$  de  $V$  ao longo de  $\gamma$  utilizando uma conexão de Finsler em  $(M, F)$ . Seja  $\bar{V}$  uma extensão local de  $V$  e seja  $V^v = i_{\mathcal{V}}(\bar{V})$  o levantamento vertical de  $\bar{V}$ . Seja  $D$  uma conexão de Finsler em  $(M, F)$ . Definimos

$$D_{\dot{\gamma}}V(t) = i_{\mathcal{V}}^{-1}(D_S V^v)_{(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))} \quad \forall t,$$

onde  $S$  é o campo geodésico associado a  $(M, F)$ . Em coordenadas,  $S = y^j \delta_{x^j}$ .

**Proposição 2.5.25.** *Seja  $D$  uma conexão de Finsler clássica em  $(M, F)$ . Então, em coordenadas locais, temos*

$$D_{\dot{\gamma}}V = (\dot{V}^k + G_i^k(\gamma, \dot{\gamma})V^i)\partial_{x^k},$$

onde  $V(t) = V^k(t)\partial_{x^k}$  é um campo de vetores ao longo da geodésica  $\gamma(t)$ . Em particular,  $D_{\dot{\gamma}}V$  não depende da extensão  $\bar{V}$  e nem da escolha de  $D$ , entre uma das quatro conexões de Finsler clássicas.

**Demonstração.** Denote  $\bar{V} = \bar{V}^k\partial_{x^k}$  uma extensão local de  $V$  e  $V^v = \bar{V}^k(x)\partial_{y^k}$ . Denote também  $D_{\delta_{x^j}}\partial_{y^k} = \Gamma_{jk}^i\partial_{y^i}$ . Logo

$$\begin{aligned} D_S V^v &= D_{y^j\delta_{x^j}}\bar{V}^k\partial_{y^k} \\ &= y^j D_{\delta_{x^j}}\bar{V}^k\partial_{y^k} \\ &= y^j(\partial_{x^j}\bar{V}^k\partial_{y^k} + \bar{V}^k D_{\delta_{x^j}}\partial_{y^k}) \\ &= y^j\partial_{x^j}\bar{V}^k\partial_{y^k} + \bar{V}^k y^j\Gamma_{jk}^i\partial_{y^i}. \end{aligned}$$

Como  $y^j\Gamma_{jk}^i = G_k^i$  para qualquer uma das quatro conexões de Finsler clássicas, temos

$$\begin{aligned} D_{\dot{\gamma}}V &= i_{\dot{\gamma}}^{-1}((y^j\partial_{x^j}\bar{V}^k + G_i^k\bar{V}^i)\partial_{y^k})_{(\gamma, \dot{\gamma})} \\ &= (\dot{V}^k + G_i^k(\gamma, \dot{\gamma})V^i)\partial_{x^k} \end{aligned}$$

□

**Exercício 2.5.26.** *Mostre que para qualquer conexão de Finsler clássica, vale  $D_{\dot{\gamma}}V = i_{\dot{\gamma}}^{-1}(v[S, V^v])$ .*

**Proposição 2.5.27.** *Sejam  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  uma geodésica e  $V, W$  campos de vetores ao longo de  $\gamma$ . Seja  $D$  uma conexão de Finsler clássica. Então*

$$\frac{d}{dt}g_{\dot{\gamma}}(V(t), W(t)) = g_{\dot{\gamma}}(D_{\dot{\gamma}}V(t), W(t)) + g_{\dot{\gamma}}(V(t), D_{\dot{\gamma}}W(t)), \forall t.$$

**Demonstração.** Pela Proposição 2.5.25 podemos assumir que  $D$  é a conexão de Chern-Rund. Como  $D$  é horizontalmente métrica, temos que  $D_Sg = 0$ , pois o *spray*  $S$  é horizontal. Em coordenadas naturais,

$g = g_{ij}(dx^i \otimes dx^j + \delta y^i \otimes \delta y^j)$ . Sejam  $\bar{V} = \bar{V}^k \partial_{y^k}$ ,  $\bar{W} = \bar{W}^k \partial_{y^k}$  levantamentos verticais de extensões de  $V, W$  próximos a  $\gamma(t)$ , para todo  $t$ . Como  $\bar{V}, \bar{W}$  são verticais, temos

$$0 = D_S g(\bar{V}, \bar{W}) = ((D_S g_{ij}) \delta y^i \otimes \delta y^j + g_{ij} D_S \delta y^i \otimes \delta y^j + g_{ij} \delta y^i \otimes D_S \delta y^j)(\bar{V}, \bar{W}) \quad (2.78)$$

Pela demonstração da Proposição 2.5.11, sabemos que

$$\begin{aligned} D_S g_{ij} &= S \cdot g_{ij}, \\ D_S \delta y^i &= -\delta y^i (D_S \partial_{y^k}) \delta y^k. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Usando (2.79) em (2.78), chegamos a

$$\begin{aligned} 0 &= S \cdot g_{ij} \bar{V}^i \bar{W}^j - g_{ij} \delta y^i (D_S \partial_{y^k}) \bar{V}^k \bar{W}^j - g_{ij} \bar{V}^i \delta y^j (D_S \partial_{y^k}) \bar{W}^k \\ &= S \cdot g_{ij} \bar{V}^i \bar{W}^j - g_{ij} \delta y^i (\bar{V}^k D_S \partial_{y^k}) \bar{W}^j - g_{ij} \bar{V}^i \delta y^j (\bar{W}^k D_S \partial_{y^k}). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Por outro lado, sabemos que

$$D_S (\bar{V}^k \partial_{y^k}) = S \cdot \bar{V}^k \partial_{y^k} + \bar{V}^k D_S \partial_{y^k}. \quad (2.81)$$

Usando (2.81) em (2.80), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= S \cdot g_{ij} \bar{V}^i \bar{W}^j - g_{ij} \delta y^i (D_S (\bar{V}^k \partial_{y^k}) - S \cdot \bar{V}^k \partial_{y^k}) \bar{W}^j \\ &\quad - g_{ij} \bar{V}^i \delta y^j (D_S (\bar{W}^k \partial_{y^k}) - S \cdot \bar{W}^k \partial_{y^k}) \\ &= S \cdot g_{ij} \bar{V}^i \bar{W}^j + g_{ij} (S \cdot \bar{V}^i) \bar{W}^j + g_{ij} \bar{V}^i (S \cdot \bar{W}^j) \\ &\quad - g_{ij} \delta y^i (D_S (\bar{V}^k \partial_{y^k})) \bar{W}^j - g_{ij} \bar{V}^i \delta y^j (D_S (\bar{W}^k \partial_{y^k})) \end{aligned} \quad (2.82)$$

Calculando (2.82) em  $(\gamma, \dot{\gamma})$ , obtemos finalmente

$$0 = \frac{d}{dt} g_{\dot{\gamma}}(V(t), W(t)) - g_{\dot{\gamma}}(D_{\dot{\gamma}} V(t), W(t)) - g_{\dot{\gamma}}(V(t), D_{\dot{\gamma}} W(t)), \forall t,$$

finalizando a demonstração da proposição.  $\square$

Note que a derivada covariante  $D_{\dot{\gamma}} V$  definida acima coincide com a derivada covariante  $\hat{D}_{\dot{\gamma}} V$  definida no início da Seção 2.4 e, como antes, dizemos que um campo de vetores  $V$  ao longo da curva  $\gamma$  é

linearmente paralelo se  $D_{\dot{\gamma}}V(t) = 0, \forall t$ . Como a partir de agora utilizaremos apenas esta noção de paralelismo, omitiremos a palavra ‘linearmente’ para campos paralelos ao longo de geodésicas. Também usaremos a notação  $\frac{D_{\dot{\gamma}}V}{dt}$  para a derivada covariante de  $V$  ao longo de uma geodésica  $\gamma$ .

## 2.6 O tensor de Curvatura de uma conexão de Finsler

**Definição 2.6.1.** *Sejam  $(M, F)$  uma variedade Finsler e  $D$  uma conexão de Finsler em  $(M, F)$ , isto é, uma conexão linear em  $TTM_0 \rightarrow TM_0$  conforme a Definição 2.5.1. Definimos o tensor de curvatura  $\mathcal{K} : \mathcal{X}(TM_0) \times \mathcal{X}(TM_0) \times \mathcal{X}(TM_0) \rightarrow \mathcal{X}(TM_0)$  associado a  $D$  por*

$$\mathcal{K}(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]}Z,$$

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(TM_0)$ .

**Exercício 2.6.2.** *Mostre que  $\mathcal{K}$  é um tensor.*

**Proposição 2.6.3.** *A curvatura  $\mathcal{K}$  está determinada pelos seguintes tensores:*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(X, Y)Z &= \mathcal{K}(hX, hY)\mathcal{J}Z, \\ \mathcal{P}(X, Y)Z &= \mathcal{K}(hX, \mathcal{J}Y)\mathcal{J}Z, \\ \mathcal{Q}(X, Y)Z &= \mathcal{K}(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y)\mathcal{J}Z. \end{aligned}$$

**Demonstração.** Como  $D\mathcal{F} = 0$ , temos que  $D(\mathcal{F}X) = \mathcal{F}DX$ . Além disso, sabemos que  $DhZ = \mathcal{F}D(\mathcal{J}Z)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(X, Y)hZ &= D_X D_Y hZ - D_Y D_X hZ - D_{[X, Y]}hZ \\ &= D_X \mathcal{F}D_Y \mathcal{J}Z - D_Y \mathcal{F}D_X \mathcal{J}Z - \mathcal{F}D_{[X, Y]} \mathcal{J}Z \\ &= \mathcal{F}D_X D_Y \mathcal{J}Z - \mathcal{F}D_Y D_X \mathcal{J}Z - \mathcal{F}D_{[X, Y]} \mathcal{J}Z \\ &= \mathcal{F}\mathcal{K}(X, Y)\mathcal{J}Z. \end{aligned}$$

Usando a anti-simetria  $\mathcal{K}(Y, X)Z = -\mathcal{K}(X, Y)Z$  e que  $v = \mathcal{J}\mathcal{F}$ ,

obtemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}(X, Y)Z &= \mathcal{K}(hX, hY)hZ + \mathcal{K}(hX, hY)\mathcal{JFZ} + \mathcal{K}(hX, vY)hZ \\
 &\quad + \mathcal{K}(hX, vY)\mathcal{JFZ} + \mathcal{K}(vX, hY)hZ + \mathcal{K}(vX, hY)\mathcal{JFZ} \\
 &\quad + \mathcal{K}(vX, vY)hZ + \mathcal{K}(vX, vY)\mathcal{JFZ} \\
 &= \mathcal{FK}(hX, hY)\mathcal{JZ} + \mathcal{K}(hX, hY)\mathcal{JFZ} \\
 &\quad + \mathcal{FK}(hX, \mathcal{JFY})\mathcal{JZ} + \mathcal{K}(hX, \mathcal{JFY})\mathcal{JFZ} \\
 &\quad - \mathcal{FK}(hY, \mathcal{JFX})\mathcal{JZ} - \mathcal{K}(hY, \mathcal{JFX})\mathcal{JFZ} \\
 &\quad + \mathcal{FK}(\mathcal{JFX}, \mathcal{JFY})\mathcal{JZ} + \mathcal{K}(\mathcal{JFX}, \mathcal{JFY})\mathcal{JFZ} \\
 &= \mathcal{FR}(X, Y)Z + \mathcal{R}(X, Y)\mathcal{FZ} + \mathcal{FP}(X, \mathcal{FY})Z \\
 &\quad + \mathcal{P}(X, \mathcal{FY})\mathcal{FZ} - \mathcal{FP}(Y, \mathcal{FX})Z - \mathcal{P}(Y, \mathcal{FX})\mathcal{FZ} \\
 &\quad + \mathcal{FQ}(\mathcal{FX}, \mathcal{FY})Z + \mathcal{Q}(\mathcal{FX}, \mathcal{FY})\mathcal{FZ},
 \end{aligned}$$

o que termina a demonstração.  $\square$

**Exercício 2.6.4.** *Mostre que os tensores  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  são semi-básicos.*

**Exercício 2.6.5.** *Mostre que as componentes do tensor de curvatura da conexão de Berwald  $\overset{\circ}{D}$  satisfazem*

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\mathcal{R}}(\delta_{x^i}, \delta_{x^j})\delta_{x^k} &= (\delta_{x^i}G_{jk}^m + G_{jk}^s G_{is}^m - \delta_{x^j}G_{ik}^m - G_{ik}^s G_{js}^m)\partial_{y^m}, \\
 \overset{\circ}{\mathcal{P}}(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})\partial_{x^k} &= -G_{ijk}^m \partial_{y^m}, \\
 \overset{\circ}{\mathcal{Q}}(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})\partial_{x^k} &= 0,
 \end{aligned}$$

$\forall i, j, k$ .

### 2.6.1 A curvatura de Riemann

Seja  $D$  uma conexão de Finsler em  $(M, F)$ ,  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{K}$ , os tensores de torção e de curvatura associados. Para cada  $v = (x, y) \in TM_0$  definimos uma aplicação linear  $R^v : T_x M \rightarrow T_x M$  por

$$R^v(u) = i_{\mathcal{V}}^{-1}\mathcal{R}(y_h, u_h)y_h, \forall u \in T_x M,$$

onde  $y_h = i_{\mathcal{H}}(y)$ ,  $u_h = i_{\mathcal{H}}(u) \in \mathcal{H}_v$  são os levantamentos horizontais de  $y$  e  $u$  em  $\mathcal{H}_v$ , respectivamente. A família de aplicações  $\{R^v, v \in TM_0\}$  é chamada de curvatura de Riemann.

**Proposição 2.6.6.** *Seja  $D$  uma conexão de Finsler em  $(M, F)$ . Se  $D$  é um levantamento regular e simétrico da conexão de Grifone  $\Gamma$  associada a  $(M, F)$ , então, em coordenadas naturais, temos*

$$R^v(u) = u^j (y^i \partial_{x^i} G_j^m - 2 \partial_{x^j} G^m - 2 G^s G_{js}^m + G_j^s G_s^m) \partial_{x^m},$$

onde  $y = y^i \partial_{x^i}$ ,  $u = u^j \partial_{x^j} \in T_{\pi(v)}M$ . Em particular,  $R^v$  não depende do levantamento regular e simétrico de  $\Gamma$ .

**Demonstração.** Pela Proposição 2.5.20, vale  $D_{\partial_{y^i}} \partial_{y^j} = 0$  e  $\Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ji}^m$ , onde  $D_{\delta_{x^i}} \partial_{y^j} = \Gamma_{ij}^m \partial_{y^m}$ . Por (2.75), temos ainda  $y^k \Gamma_{ik}^m = G_i^m$ . Desta última igualdade, concluímos que

$$y^k \partial_{y^s} \Gamma_{ik}^m + \Gamma_{is}^m = G_{is}^m. \quad (2.83)$$

Observe que

$$[\delta_{x^i}, \delta_{x^j}] = [\partial_{x^i} - G_i^m \partial_{y^m}, \partial_{x^j} - G_j^k \partial_{y^k}] = [G_i^m \partial_{y^m}, G_j^k \partial_{y^k}],$$

e, portanto,  $[\delta_{x^i}, \delta_{x^j}]$  é vertical. Isso implica que

$$D_{[\delta_{x^i}, \delta_{x^j}]} \partial_{y^k} = 0, \forall i, j, k. \quad (2.84)$$

Temos

$$\begin{aligned} D_{\delta_{x^i}} D_{\delta_{x^j}} \partial_{y^k} &= D_{\delta_{x^i}} \Gamma_{jk}^m \partial_{y^m} \\ &= \delta_{x^i} \Gamma_{jk}^m \partial_{y^m} + \Gamma_{jk}^m D_{\delta_{x^i}} \partial_{y^m} \\ &= (\partial_{x^i} \Gamma_{jk}^m - G_i^s \partial_{y^s} \Gamma_{jk}^m + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^m) \partial_{y^m}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Usando (2.84) e (2.85), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\delta_{x^i}, \delta_{x^j}) \delta_{x^k} &= D_{\delta_{x^i}} D_{\delta_{x^j}} \partial_{y^k} - D_{\delta_{x^j}} D_{\delta_{x^i}} \partial_{y^k} - D_{[\delta_{x^i}, \delta_{x^j}]} \partial_{y^k} \\ &= (\partial_{x^i} \Gamma_{jk}^m - G_i^s \partial_{y^s} \Gamma_{jk}^m + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^m \\ &\quad - \partial_{x^j} \Gamma_{ik}^m + G_j^s \partial_{y^s} \Gamma_{ik}^m - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^m) \partial_{y^m}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Usando (2.83) e (2.86), concluímos que

$$\begin{aligned}
 R^v(u) &= i_V^{-1}(\mathcal{R}(y^i \delta_{x^i}, u^j \delta_{x^j}) y^k \delta_{x^k}) \\
 &= u^j y^i y^k i_V^{-1}(\mathcal{R}(\delta_{x^i}, \delta_{x^j}) \delta_{x^k}) \\
 &= u^j y^i (\partial_{x^i} G_j^m - G_i^s (G_{js}^m - \Gamma_{js}^m) + G_j^s \Gamma_{is}^m \\
 &\quad - \partial_{x^j} G_i^m + G_j^s (G_{is}^m - \Gamma_{is}^m) - G_i^s \Gamma_{js}^m) \partial_{x^m} \\
 &= u^j y^i (\partial_{x^i} G_j^m - \partial_{x^j} G_i^m - G_i^s G_{js}^m + G_j^s G_{si}^m) \partial_{x^m} \\
 &= u^j (y^i \partial_{x^i} G_j^m - 2\partial_{x^j} G^m - 2G^s G_{js}^m + G_j^s G_s^m) \partial_{x^m}
 \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.6.7.** *Nas condições da Proposição 2.6.6, valem as seguintes propriedades:*

$$(i) \quad R^{\lambda v} = \lambda^2 R^v, \forall v \in TM_0, \lambda > 0.$$

$$(ii) \quad R^v(y) = 0, \forall v = (x, y) \in TM_0.$$

**Demonstração.** A primeira afirmação é imediata a partir da Proposição 2.6.6 pois  $G^m$  é positivamente homogênea de grau 2 em  $y$ . Similarmente, temos

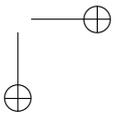
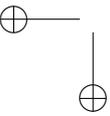
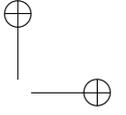
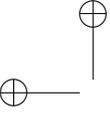
$$\begin{aligned}
 R^v(y) &= y^j (y^i \partial_{x^i} G_j^m - 2\partial_{x^j} G^m - 2G^s G_{js}^m + G_j^s G_s^m) \partial_{x^m} \\
 &= (2y^i \partial_{x^i} G^m - 2y^j \partial_{x^j} G^m - 2G^s G_s^m + 2G^s G_s^m) \partial_{x^m} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

**Exercício 2.6.8.** *Nas condições da Proposição 2.6.6, mostre que  $R^v(u) = i_V^{-1}(R_{\mathcal{H}}(S, u_h))$ ,  $\forall v \in TM_0, u \in T_x M$ , onde  $R_{\mathcal{H}}$  é a forma de curvatura de  $\Gamma$ ,  $S = y^i \partial_{x^i} - 2G^i \partial_{y^i}$  é o spray de  $(M, F)$  e  $u_h = i_{\mathcal{H}}(u) \in \mathcal{H}_v$  é o levantamento horizontal de  $u$  em  $\mathcal{H}_v$ .*

Pelo Corolário 2.5.21 e Proposições 2.5.23 e 2.6.6, podemos estudar as propriedades da curvatura de Riemann  $\{R^v, v \in TM_0\}$ , considerando a conexão de Berwald  $\overset{\circ}{D}$ . Seja  $R_k^m{}_{ij}$  definido por

$$\overset{\circ}{\mathcal{R}}(\delta_{x^i}, \delta_{x^j}) \delta_{x^k} = R_k^m{}_{ij} \partial_{y^m}.$$



**Exercício 2.6.9.** *Mostre que  $\forall i, j, k, m$  valem*

$$(i) R_k^m{}_{ij} = \partial_{x^i} G_{jk}^m - G_i^s G_{jks}^m + G_{jk}^s G_{is}^m - \partial_{x^j} G_{ik}^m + G_j^s G_{iks}^m - G_{ik}^s G_{js}^m.$$

$$(ii) R_k^m{}_{ji} = -R_k^m{}_{ij}.$$

$$(iii) R_k^m{}_{ij} + R_i^m{}_{jk} + R_j^m{}_{ki} = 0. \text{ (Identidade de Bianchi)}$$

Definimos

$$R^m{}_j := y^i \partial_{x^i} G_j^m - 2\partial_{x^j} G^m - 2G^s G_{js}^m + G_j^s G_s^m. \quad (2.87)$$

Note que

$$R^v(u) = R^m{}_j u^j \partial_{x^m}.$$

Definimos também as seguintes contrações:

$$\begin{aligned} R^m{}_{ij} &:= y^k R_k^m{}_{ij} = \partial_{x^i} G_j^m + G_j^s G_{is}^m - \partial_{x^j} G_i^m - G_i^s G_{js}^m, \\ R_k^m{}_{ij} y^j &:= R_k^m{}_{ij} y^j = \partial_{x^i} G_k^m + G_k^s G_{is}^m - y^j \partial_{x^j} G_{ik}^m \\ &\quad + 2G^s G_{iks}^m - G_{ik}^s G_s^m. \end{aligned} \quad (2.88)$$

**Exercício 2.6.10.** *Mostre que*

$$(i) R^m{}_i = -R^m{}_{ij} y^j.$$

$$(ii) R^m{}_{ij} = \frac{1}{3}(\partial_{y^i} R^m{}_j - \partial_{y^j} R^m{}_i)$$

**Lema 2.6.11.** *Valem as seguintes igualdades:*

$$(i) E_{y^m} R^m{}_{ij} = 0.$$

$$(ii) g_{pm} R^m{}_j = E_{y^m} R_p^m{}_j.$$

$$(iii) g_{pm} R^m{}_j = g_{jm} R^m{}_p.$$

**Demonstração.** Temos

$$\begin{aligned} R^m{}_{ij} &= y^k R_k^m{}_{ij} \\ &= \partial_{x^i} G_j^m + G_j^s G_{is}^m - \partial_{x^j} G_i^m - G_i^s G_{js}^m. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Por outro lado, sabemos que para todo  $i$  fixo, vale

$$E_{x^i} = E_{y^m} G_i^m. \quad (2.90)$$

Logo

$$\begin{aligned} E_{x^i x^j} &= E_{y^m x^j} G_i^m + E_{y^m} \partial_{x^j} G_i^m, \\ E_{x^j x^i} &= E_{y^m x^i} G_j^m + E_{y^m} \partial_{x^i} G_j^m, \end{aligned}$$

o que implica que

$$E_{y^m} \partial_{x^i} G_j^m - E_{y^m} \partial_{x^j} G_i^m + E_{y^m x^i} G_j^m - E_{y^m x^j} G_i^m = 0. \quad (2.91)$$

Da mesma forma, temos

$$E_{x^i y^m} = g_{sm} G_i^s + E_{y^s} G_{im}^s, \quad (2.92)$$

$$E_{x^j y^m} = g_{sm} G_j^s + E_{y^s} G_{jm}^s, \quad (2.93)$$

o que implica que

$$\begin{aligned} E_{y^m x^i} G_j^m - E_{y^m x^j} G_i^m &= g_{sm} G_i^s G_j^m + E_{y^s} G_{im}^s G_j^m \\ &\quad - g_{sm} G_j^s G_i^m - E_{y^s} G_{jm}^s G_i^m \\ &= E_{y^s} G_{im}^s G_j^m - E_{y^s} G_{jm}^s G_i^m. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Usando (2.89), (2.91) e (2.94), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= E_{y^m} (\partial_{x^i} G_j^m - \partial_{x^j} G_i^m + G_{is}^m G_j^s - G_{js}^m G_i^s) \\ &= E_{y^m} R^m{}_{ij}, \end{aligned}$$

o que prova (i).

Derivando (2.92) em relação a  $y^p$ , obtemos

$$\partial_{x^i} g_{mp} = g_{mps} G_i^s + g_{sm} G_{ip}^s + g_{sp} G_{im}^s + E_{y^s} G_{imp}^s. \quad (2.95)$$

Derivando (2.91) em relação a  $y^p$ , chegamos a

$$\begin{aligned} g_{mp} \partial_{x^i} G_j^m + E_{y^m} \partial_{x^i} G_{jp}^m - g_{mp} \partial_{x^j} G_i^m - E_{y^m} \partial_{x^j} G_{ip}^m \\ = \partial_{x^j} g_{mp} G_i^m + E_{y^m x^j} G_{ip}^m - \partial_{x^i} g_{mp} G_j^m - E_{y^m x^i} G_{jp}^m. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Contraindo (2.96) com  $y^i$  e depois usando (2.92) e (2.95), temos

$$\begin{aligned} g_{mp} y^i \partial_{x^i} G_j^m + E_{y^m} y^i \partial_{x^i} G_{jp}^m - 2g_{mp} \partial_{x^j} G^m - E_{y^m} \partial_{x^j} G_p^m \\ = 2(g_{mps} G_j^s + g_{sm} G_{jp}^s + g_{sp} G_{jm}^s + E_{y^s} G_{jmp}^s) G^m \\ + (g_{sm} G_j^s + E_{y^s} G_{jm}^s) G_p^m - (2g_{sm} G^s + E_{y^s} G_m^s) G_{jp}^m \\ - (2g_{mps} G^s + g_{sm} G_p^s + g_{sp} G_m^s) G_j^m. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Simplificando (2.97), chegamos a

$$\begin{aligned} & g_{mp}(y^i \partial_{x^i} G_j^m - 2\partial_{x^j} G^m - 2G^s G_{js}^m + G_j^s G_s^m) \\ &= E_{y^m}(-y^i \partial_{x^i} G_{jp}^m + \partial_{x^j} G_p^m + 2G_{jsp}^m G^s + G_{js}^m G_p^s - G_s^m G_{jp}^s). \end{aligned} \quad (2.98)$$

Comparando (2.98) com (2.87) e (2.88), concluímos que

$$g_{pm} R^m_j = E_{y^m} R_p^m_j.$$

Isso prova (ii).

Pela identidade de Bianchi (veja Exercício 2.6.9), temos

$$R_p^m_{jk} + R_j^m_{kp} + R_k^m_{pj} = 0. \quad (2.99)$$

Contraindo (2.99) com  $y^k$ , temos

$$\begin{aligned} R_p^m_j &= -R_j^m_{kp} y^k - y^k R_k^m_{pj} \\ &= R_j^m_{pk} y^k - R^m_{pj} \\ &= R_j^m_p - R^m_{pj}. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Usando (i), (ii) e (2.100), concluímos que

$$\begin{aligned} g_{pm} R^m_j &= E_{y^m} R_p^m_j \\ &= E_{y^m} (R_j^m_p - R^m_{pj}) \\ &= g_{jm} R^m_p, \end{aligned}$$

provando (iii).  $\square$

**Proposição 2.6.12.** *A curvatura de Riemann  $R^v$  é auto-adjunta com respeito a  $g_v$ , ou seja,*

$$g_v(R^v(u), w) = g_v(u, R^v(w)),$$

$\forall v = (x, y) \in TM_0, u, w \in T_x M$ .

**Demonstração.** Denote  $u = u^j \partial_{x^j}, w = w^j \partial_{x^j} \in T_x M$ . Pelo Lema 2.6.11-(iii), temos

$$\begin{aligned} g_v(R^v(u), w) &= g_v(R^m_j u^j \partial_{x^m}, w^p \partial_{x^p}) \\ &= g_{pm} R^m_j u^j w^p \\ &= g_{jm} R^m_p u^j w^p \\ &= g_v(u^j \partial_{x^j}, R^m_p w^p \partial_{x^m}) \\ &= g_v(u, R^v(w)). \end{aligned}$$

□

### 2.6.2 A curvatura bandeira

Seja  $F$  uma métrica Finsler em  $M$  e  $\{R^v, v \in TM_0\}$  a curvatura de Riemann. Dados  $v = (x, y) \in TM_0$  e  $P \subset T_xM$  um plano contendo  $y$ , seja  $u \in P$  tal que  $P = \text{span}\{y, u\}$ .

**Definição 2.6.13.** *Definimos a curvatura bandeira associada a  $v = (x, y) \in TM_0$  e ao plano  $P \subset T_xM, y \in P$ , por*

$$K(P, v) := \frac{g_v(R^v(u), u)}{g_v(y, y)g_v(u, u) - g_v(y, u)^2}.$$

**Exercício 2.6.14.** *Mostre que*

- (i)  $K(P, v)$  não depende de  $u$ .
- (ii)  $K(P, \lambda v) = K(P, v), \forall \lambda > 0$ .

#### A curvatura bandeira de uma superfície

No caso em que  $M$  é uma superfície, então a curvatura bandeira  $K(P, v)$  é uma função escalar  $K(v)$  em  $TM_0$  pois nesse caso  $P = T_xM$ . Dado  $v = (x, y) \in F^{-1}(1) \subset TM_0$ , seja  $0 \neq y^\perp \in T_xM$  um vetor tal que  $g_v(y, y^\perp) = 0$ . Pelo Corolário 2.6.7 e Proposição 2.6.12, temos

$$g_v(R^v(y^\perp), y) = g_v(y^\perp, R^v(y)) = g_v(y^\perp, 0) = 0.$$

Segue que

$$R^v(y^\perp) = \alpha y^\perp,$$

para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ou seja,  $y^\perp$  é um autovetor de  $R^v$  associado a  $\alpha$ . A seguir mostramos que  $\alpha$  coincide com a curvatura bandeira  $K(v)$ .

**Proposição 2.6.15.** *A curvatura flag  $K(v)$  é o autovalor de  $R^v$  associado ao autovetor  $y^\perp$ .*

*Demonstração.* Temos que

$$K(v) = \frac{g_v(R^v(y^\perp), y^\perp)}{g_v(y, y)g_v(y^\perp, y^\perp) - g_v(y, y^\perp)^2} = \frac{g_v(\alpha y^\perp, y^\perp)}{F^2(v)g_v(y^\perp, y^\perp)} = \alpha.$$

□

## Capítulo 3

# Teoria de Morse e algumas aplicações

Neste capítulo discutimos as aplicações mais rudimentares da teoria de Morse do funcional de energia ao estudo da topologia de uma variedade munida de uma métrica Finsler. Nosso intuito é dar um panorama rápido e intuitivo da teoria e, sendo assim, em diversos momentos apenas daremos um esboço das demonstrações.

### 3.1 Rudimentos em teoria de Morse

Sejam  $X$  uma variedade diferenciável e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Talvez possa ser dito que teoria de Morse está ocupada principalmente com dois tipos de questões:

- I) O que podemos concluir sobre a topologia de  $X$  se tivermos informação sobre a estrutura do conjunto dos pontos críticos de  $f$ ?
- II) O que podemos concluir sobre a estrutura do conjunto dos pontos críticos de  $f$  se tivermos informação sobre a topologia de  $X$ ?

Sob este ponto de vista se justifica pensar teoria de Morse como uma espécie de *cálculo variacional global*, termo este que foi usado originalmente por Morse [31].

Passemos agora às noções mais rudimentares da teoria. Denotemos  $n = \dim X$ .

**Definição 3.1.1.** Um ponto  $p \in X$  é dito um ponto crítico de  $f$  se  $df|_p = 0$ . Um número  $c \in \mathbb{R}$  é dito valor crítico de  $f$  se existe algum ponto crítico  $p$  de  $f$  tal que  $f(p) = c$ . Se  $c \in \mathbb{R}$  não é valor crítico então  $c$  é chamado de valor regular. O ponto crítico  $p$  é dito não-degenerado se a Hessiana

$$d^2f|_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$$

de  $f$  em  $p$  dada por

$$d^2f|_p = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_p dx^i \otimes dx^j$$

tiver núcleo trivial. Aqui as derivadas parciais são tomadas em relação a um sistema de coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  em torno de  $p$ . O índice de Morse de  $p$ , denotado por  $\mu(p)$ , é a dimensão do subespaço maximal de  $T_pM$  onde  $d^2f|_p$  é negativa-definida.

**Exercício 3.1.2.** Mostre que a definição da Hessiana de  $f$  em um ponto crítico dada acima não depende da escolha do sistema de coordenadas.

**Definição 3.1.3.**  $f$  é dita uma função de Morse se todos os seus pontos críticos são não-degenerados.

**Exercício 3.1.4.** Considere  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  e  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y, z) = z$ . Mostre que  $f$  é Morse e calcule o índice de Morse de seus pontos críticos.

Para cada  $a \in \mathbb{R}$  considere  $X^{\leq a} = \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ . A observação fundamental em teoria de Morse é a seguinte:

**Sob hipóteses razoáveis, a topologia de  $X^{\leq a}$  muda somente quando  $a$  passa por um valor crítico de  $f$  e, quando isto ocorre, existe uma boa descrição de como se dá esta mudança.**

O seguinte enunciado nos dá uma versão mais precisa deste fato fundamental.

**Teorema 3.1.5.** [29, teoremas 3.1, 3.2 e 3.5]

Seja  $X$  uma variedade sem bordo. São válidas as seguintes afirmações.

- Se  $f^{-1}([a, b])$  é compacto e livre de pontos críticos de  $f$  então existe uma aplicação suave  $h : [0, 1] \times X^{\leq b} \rightarrow X^{\leq b}$  tal que, denotando  $h_t(x) = h(t, x)$ , temos  $h_0(x) = x \forall x \in X^{\leq b}$ ,  $h_t(x) = x \forall (t, x) \in [0, 1] \times X^{\leq a}$ ,  $h_t$  é um mergulho para todo  $t < 1$ ,  $h_1(X^{\leq b}) = X^{\leq a}$ . Além disto,  $X^{\leq a}$  e  $X^{\leq b}$  são difeomorfos.
- Sejam  $c$  um valor crítico de  $f$  e  $\epsilon > 0$  tal que  $c$  é o único valor crítico de  $f$  em  $[c - \epsilon, c + \epsilon]$ . Se  $f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$  é compacto contendo somente pontos críticos não-degenerados, então  $X^{\leq c + \epsilon}$  é homotopicamente equivalente ao espaço obtido pela adição de uma  $\mu(p)$ -célula a  $X^{\leq c - \epsilon}$  para cada ponto crítico  $p \in f^{-1}(c)$ .
- Suponha que  $X^{\leq a}$  é compacto para todo  $a \in \mathbb{R}$ , e que  $f$  é Morse. Então  $X$  é homotopicamente equivalente a um CW-complexo com precisamente uma  $\mu(p)$ -célula para cada ponto crítico  $p$ .

Para uma definição precisa das noções de célula, CW-complexo etc referimos o leitor a [13]. O teorema acima nos dá os exemplos mais básicos de respostas para as questões I) e II) feitas acima.

**Exercício 3.1.6.** Use o teorema acima para provar que o número de pontos críticos de uma função de Morse em uma variedade compacta e sem bordo é pelo menos igual à soma dos seus números de Betti. (Dica: use o fato de que a homologia celular de um CW-complexo é isomorfa à sua homologia singular.) Esta cota mínima sempre pode ser atingida? (Não, dê um contra-exemplo.)

**Observação 3.1.7.** No estudo do funcional de energia associado a uma métrica Finsler faremos uso do fato que o teorema acima vale sob as seguintes hipóteses mais fracas:

- $f$  é de classe  $C^1$ , e todos os pontos críticos de  $f$  estão contidos em um aberto  $U \subset X$  tal que  $f|_U$  é de classe  $C^\infty$ .

Sob estas hipóteses, no item a) será apenas possível dizer que  $h$  e o difeomorfismo  $X^{\leq b} \simeq X^{\leq a}$  são de classe  $C^1$ , e no item c) precisamos pedir que  $f|_U$  seja Morse.

### 3.2 Geometria Finsler: uma rápida revisão

Para conveniência do leitor tomamos um momento para fixarmos a notação a ser utilizada neste capítulo, e revisar algumas definições discutidas nos capítulos anteriores.

Seja  $M$  uma  $n$ -variedade munida de uma métrica Finsler  $F$ , que será fixada pelo restante deste capítulo. Denotando por  $\pi : TM \rightarrow M$  a projeção no ponto base e por  $\mathcal{Z}$  a seção nula, para cada  $v \in TM_0 = TM \setminus \mathcal{Z}$  temos o produto interno  $g_v(\cdot, \cdot)$  em  $T_{\pi(v)}M$  dado por

$$g_v(w_1, w_2) = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \right|_{s=t=0} F^2(v + sw_1 + tw_2). \quad (3.1)$$

A forma de Hilbert  $\lambda_H \in \Omega^1(TM_0)$  é dada por

$$\lambda_H|_v \cdot \zeta = g_v(v, d\pi \cdot \zeta) \quad (3.2)$$

para todo  $v \in TM_0$  e  $\zeta \in T_v TM$ . Lembre que  $\omega = d\lambda_H$  é uma forma simplética em  $TM_0$  e associado à função energia cinética

$$E : TM_0 \rightarrow \mathbb{R} \quad E(v) = \frac{1}{2} F^2(v) \quad (3.3)$$

temos seu campo Hamiltoniano  $S$ , que é determinado pela equação

$$i_S d\lambda_H = -dE.$$

Relembremos o isomorfismo linear  $i_{\mathcal{V}}^v : T_{\pi(v)}M \rightarrow \mathcal{V}_v$  dado por

$$i_{\mathcal{V}}^v(w) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (v + tw). \quad (3.4)$$

Sabemos que  $S$  é um *spray*, isto é, satisfaz

$$\mathcal{J}S = C \quad \mathcal{L}_C S = S \quad (3.5)$$

onde  $\mathcal{J}$  denota a estrutura tangente canônica em  $TTM$  definida em (2.2), e  $C$  é o campo vertical em  $TM$  definido por  $C|_v = i_{\mathcal{V}}^v(v)$ .  $S$  é chamado de *spray* geodésico associado a  $F$ .

Lembremos que o *spray*  $S$  induz uma conexão de Grifone por

$$\Gamma_S = -\mathcal{L}_S \mathcal{J} \quad (3.6)$$

que pode ser vista como uma 1-forma tomando valores em  $TTM$  definida em  $TM_0$ . Isto segue do fato que as equações (3.5) implicam

$$(\Gamma_S)^2 = I \quad \ker(\Gamma_S + I) = \mathcal{V}. \quad (3.7)$$

Temos então a decomposição

$$TTM_0 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V} \quad \text{onde} \quad \mathcal{H} = \ker(\Gamma_S - I) \quad (3.8)$$

que determina projeções

$$P_{\mathcal{H}} : TTM_0 \rightarrow \mathcal{H} \quad P_{\mathcal{V}} : TTM_0 \rightarrow \mathcal{V} \quad (3.9)$$

que variam suavemente com o ponto base  $v \in TM_0$ .

Em coordenadas naturais  $(x, y) = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  de  $TM$  associadas a um sistema de coordenadas  $x = (x^1, \dots, x^n)$  em  $M$  os coeficientes de  $S$  são denotados por

$$S = y^i \partial_{x^i} - 2G^i \partial_{y^i} \quad (3.10)$$

e, como  $S$  é *spray*, vale que os  $G^i(x, y)$  são funções positivamente homogêneas em  $y$  de grau 2:  $G^i(x, ty) = t^2 G^i(x, y) \forall t > 0$ . Por conseguinte, a funções

$$\Gamma_j^i = \partial_{y^j} G^i \quad (3.11)$$

são positivamente homogêneas em  $y$  de grau 1. Também valem

$$\Gamma_S \cdot \partial_{y^i} = -\partial_{y^i} \quad \Gamma_S \cdot \partial_{x^i} = \partial_{x^i} - 2\Gamma_i^j \partial_{y^j} \quad (3.12)$$

e

$$P_{\mathcal{H}} \cdot \partial_{x^i} = \delta_{x^i} = \partial_{x^i} - \Gamma_i^j \partial_{y^j} \quad P_{\mathcal{V}} \cdot \partial_{x^i} = \Gamma_i^j \partial_{y^j}. \quad (3.13)$$

**Definição 3.2.1.** Se  $M$  é conexa então definimos a função distância associada a  $F$  por

$$\theta : M \times M \rightarrow [0, +\infty), \quad \theta(p, q) = \inf \int_0^1 F(\dot{\gamma}) dt \quad (3.14)$$

onde o ínfimo acima é tomado sobre todas as curvas diferenciáveis  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  satisfazendo  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$ . Se  $M$  não é conexa então  $\theta$  também assume o valor  $+\infty$ . Note que, em geral,  $\theta$  não é simétrica:  $\theta(p, q) \neq \theta(q, p)$ .

**Observação 3.2.2.** *No interessante trabalho [38] são estudadas extensões de resultados clássicos da teoria de submersões Riemannianas para o contexto de sistemas Hamiltonianos mais gerais através de curvas fanning. Em particular, são obtidas fórmulas de O’Neill neste contexto mais geral. Além disso, [38] também serve como uma boa e rápida introdução aos conceitos mais básicos em geometria Finsler.*

### 3.3 Derivada covariante ao longo de uma geodésica

Dado um campo de vetores  $Y$  em uma variedade  $Q$  qualquer, podemos definir a derivada de Lie de um campo de vetores  $W(t) \in T_{c(t)}M$  ao longo de uma trajetória  $c(t)$  de  $Y$  ( $\dot{c} = Y \circ c$ ) pela fórmula

$$\mathcal{L}_Y W(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{W(t) - d\phi_h \cdot W(t-h)}{h} \quad (3.15)$$

onde aqui denotamos por  $\phi_t$  o fluxo de  $Y$ .

Apliquemos esta definição à nossa situação. Se  $\gamma(t)$  é uma geodésica de  $F$  então podemos levantar um campo qualquer  $W(t)$  ao longo de  $\gamma$  para um campo vertical  $\tilde{W}(t) = i_{\dot{\gamma}}^*(W(t))$  ao longo da trajetória  $t \mapsto \dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$  do *spray* geodésico  $S$ . Deste modo definimos a derivada covariante de  $W$  ao longo de  $\gamma$  por

$$\frac{D_\gamma W}{dt} = (i_{\dot{\gamma}}^*)^{-1}(P_V \cdot \mathcal{L}_S \tilde{W}). \quad (3.16)$$

O seguinte lema nos será útil para cálculos explícitos em coordenadas.

**Lema 3.3.1.** *Em coordenadas naturais de  $TM$  associadas a um sistema de coordenadas de  $M$  temos*

$$\frac{D_\gamma W}{dt}(t) = (\dot{W}^i + \Gamma_j^i(x, \dot{x})W^j)\partial_{x^i}$$

onde  $x(t)$  são as coordenadas de  $\gamma(t)$ ,  $W(t) = W^i(t)\partial_{x^i}$  e  $\Gamma_j^i$  são os coeficientes da projeção vertical como em (3.13).

*Demonstração.* Em coordenadas naturais  $(x, y)$  o campo  $S$  é representado como  $S(x, y) = (y, -2G(x, y))$ . Denotando por  $\varphi_t^S$  o fluxo de

$S$ , o fluxo linearizado associado satisfaz

$$\frac{d}{dt}D\varphi_t^S = DS(\varphi_t^S)D\varphi_t^S = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -2D_xG & -2D_yG \end{pmatrix} D\varphi_t^S \quad (3.17)$$

onde as matrizes  $D_xG$  e  $D_yG$  são avaliadas em  $(x, \dot{x})$ . O campo vertical  $\tilde{W}(t) = i_{\mathcal{V}}^{\dot{}}(W(t))$  é representado nestas coordenadas por  $(0, \vec{W}(t))$  onde  $\vec{W}(t) = (W^1(t), \dots, W^n(t))$ . Derivando

$$h \mapsto D\varphi_{-h}^S \cdot (0, \vec{W}(t+h))$$

em  $h = 0$  e usando a EDO linear (3.17) satisfeita por  $D\varphi_t^S$  concluímos que o vetor  $\mathcal{L}_S\tilde{W}$  é representado nestas coordenadas por

$$\mathcal{L}_S\tilde{W} \simeq -W^i\partial_{x^i} + (\dot{W}^i + 2(\partial_{y^j}G^i)W^j)\partial_{y^i}.$$

De (3.11) e da fórmula (3.13) para  $P_{\mathcal{V}} \cdot \partial_{x^i}$  segue que

$$P_{\mathcal{V}} \cdot \mathcal{L}_S\tilde{W} = (\dot{W}^i + \Gamma_j^i W^j)\partial_{y^i}.$$

Pela definição de  $i_{\mathcal{V}}$  temos a conclusão desejada.  $\square$

### 3.4 Campos de Jacobi e o fluxo geodésico linearizado

Aqui estudamos as relações entre o endomorfismo de curvatura de uma métrica Finsler e o fluxo linearizado do *spray* geodésico. Associada à distribuição horizontal temos a forma de curvatura  $R$  dada pela fórmula

$$R(X, Y) = P_{\mathcal{V}}[P_{\mathcal{H}}X, P_{\mathcal{H}}Y] \quad (3.18)$$

onde  $X, Y$  são campos de vetores em  $TM_0$ . A expressão acima é  $C^\infty(TM_0)$ -linear e, conseqüentemente, define uma 2-forma em  $TM_0$  tomando valores em  $\mathcal{V}$ .

**Exercício 3.4.1.** *Mostre que  $\mathcal{H}$  é integrável se, e somente se,  $R \equiv 0$ .*

**Exercício 3.4.2.** *Suponha que  $F(v) = \sqrt{g(v, v)}$  onde  $g$  é uma métrica Riemanniana em  $M$ . Se  $R \equiv 0$  então numa vizinhança de todo ponto de  $M$  podemos encontrar coordenadas  $(u^1, \dots, u^n)$  tais que  $g = \sum_{i=1}^n du^i \otimes du^i$ .*

**Definição 3.4.3.** *O endomorfismo de curvatura de  $F$  na direção de  $v \in TM_0$  é o operador linear*

$$R^v : T_{\pi(v)}M \rightarrow T_{\pi(v)}M \quad \text{dado por} \quad i_v^v(R^v(u)) = R(S, u_h) \quad (3.19)$$

onde  $u_h \in \mathcal{H}_v$  é unicamente determinado por  $d\pi \cdot u_h = u$ .

O lema seguinte nos será bastante útil.

**Lema 3.4.4.** *Sejam  $v \in TM_0$  e  $u \in T_{\pi(v)}M$ , e tome coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  de  $M$  em torno de  $\pi(v)$ . Se  $v = y^i \partial_{x^i}$  e  $u = u^i \partial_{x^i}$  então vale*

$$R^v(u) = \{(2\partial_{x^k} G^r - y^i (\partial_{x^i} \Gamma_k^r) + 2G^s (\partial_{y^s} \Gamma_k^r) - \Gamma_k^s \Gamma_s^r) u^k\} \partial_{x^r}. \quad (3.20)$$

*Demonstração.* Sejam  $X = X^i \partial_{x^i} + Y^i \partial_{y^i}$  e  $J = J^i \partial_{x^i} + K^i \partial_{y^i}$  campos em  $TM_0$  representados em coordenadas naturais, de forma que temos  $P_{\mathcal{H}}X = X^i \delta_{x^i}$  e  $P_{\mathcal{H}}J = J^i \delta_{x^i}$ . Aqui  $\delta_{x^i}$  são os campos dados em (3.13). As propriedades do colchete de Lie nos dão

$$[P_{\mathcal{H}}X, P_{\mathcal{H}}J] = X^i (\delta_{x^i} J^k) \delta_{x^k} - J^k (\delta_{x^k} X^i) \delta_{x^i} + X^i J^k [\delta_{x^i}, \delta_{x^k}]$$

onde usamos a convenção de Einstein em cada termo separadamente. Segue imediatamente que

$$R(X, J) = X^i J^k R(\delta_{x^i}, \delta_{x^k}). \quad (3.21)$$

É claro que a identidade acima segue também do fato de  $R$  ser um tensor. O vetor  $[\delta_{x^i}, \delta_{x^k}]$  tem coordenadas

$$\begin{aligned} [\delta_{x^i}, \delta_{x^k}] &= [\partial_{x^i} - \Gamma_i^r \partial_{y^r}, \partial_{x^k} - \Gamma_k^s \partial_{y^s}] \\ &= [\partial_{x^i}, \partial_{x^k}] - [\partial_{x^i}, \Gamma_k^s \partial_{y^s}] - [\Gamma_i^r \partial_{y^r}, \partial_{x^k}] + [\Gamma_i^r \partial_{y^r}, \Gamma_k^s \partial_{y^s}] \\ &= -(\partial_{x^i} \Gamma_k^s) \partial_{y^s} - \Gamma_s^k [\partial_{x^i}, \partial_{y^s}] + (\partial_{x^k} \Gamma_i^r) \partial_{y^r} \\ &\quad + \Gamma_i^r [\partial_{x^k}, \partial_{y^r}] + \Gamma_i^r (\partial_{y^r} \Gamma_k^s) \partial_{y^s} - \Gamma_k^s (\partial_{y^s} \Gamma_i^r) \partial_{y^r} \\ &\quad - \Gamma_k^s \Gamma_i^r [\partial_{y^s}, \partial_{y^r}] \\ &= (\partial_{x^k} \Gamma_i^r - \partial_{x^i} \Gamma_k^r + \Gamma_i^s (\partial_{y^s} \Gamma_k^r) - \Gamma_k^s (\partial_{y^s} \Gamma_i^r)) \partial_{y^r} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Tomando  $X = S$  temos  $X^i = y^i$ . Plugando em (3.21) e usando (3.22) obtemos

$$R(S, J) = \{y^i J^k (\partial_{x^k} \Gamma_i^r - \partial_{x^i} \Gamma_k^r + \Gamma_i^s (\partial_{y^s} \Gamma_k^r) - \Gamma_k^s (\partial_{y^s} \Gamma_i^r))\} \partial_{y^r}.$$

Substituindo as identidades  $y^i \Gamma_i^m = 2G^m$  e  $y^i \partial_{y^s} \Gamma_i^r = \Gamma_s^r$  obtemos

$$R(S, J) = \{J^k (2\partial_{x^k} G^r - y^i \partial_{x^i} \Gamma_k^r + 2G^s (\partial_{y^s} \Gamma_k^r) - \Gamma_k^s \Gamma_s^r)\} \partial_{y^r} \quad (3.23)$$

como desejado.  $\square$

Seja  $\gamma(t)$  uma geodésica não-constante de  $F$ . Um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  é um campo de vetores  $J(t)$  ao longo de  $\gamma$  que satisfaz a EDO linear

$$\frac{D_\gamma^2 J}{dt^2} + R^\dot{\gamma}(J) = 0, \quad (3.24)$$

chamada de equação de Jacobi.

**Exercício 3.4.5.** *Dado  $v \in TM_0$ , seja  $v_h$  o único vetor em  $\mathcal{H}_v$  satisfazendo  $d\pi \cdot v_h = v$ . Mostre que  $v_h$  coincide com  $S$  avaliado em  $v$ . Conclua que  $R^v(v) = 0$ ,  $\forall v \in TM_0$  e que  $t \mapsto \dot{\gamma}(t)$  e  $t \mapsto t\dot{\gamma}(t)$  são campos de Jacobi ao longo da geodésica  $\gamma(t)$ .*

Usando as projeções (3.9), podemos definir um isomorfismo linear

$$\Theta_v : T_v TM_0 \rightarrow T_{\pi(v)} M \times T_{\pi(v)} M \quad (3.25)$$

para todo  $v \in TM_0$ , que é bastante conveniente para representar vetores no fibrado bitangente. Este isomorfismo é definido por

$$\Theta_v \cdot \zeta = ((i_v^v)^{-1} \circ P_{\mathcal{V}} \cdot \zeta, d\pi \circ P_{\mathcal{H}} \cdot \zeta) \quad \zeta \in T_v TM_0. \quad (3.26)$$

A relação entre o fluxo linearizado de  $S$  e os campos de Jacobi está contida no seguinte enunciado.

**Teorema 3.4.6.** *Seja  $\varphi_t^S$  o fluxo do spray geodésico  $S$  em  $TM_0$ , e fixe  $v \in TM_0$ . Considere um vetor  $\zeta(0) \in T_v TM_0$  qualquer e defina  $\zeta(t) = d\varphi_t^S \cdot \zeta(0)$ . Seja  $\gamma(t)$  a geodésica determinada por  $\dot{\gamma}(0) = v$ , e seja  $J$  o campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  unicamente determinado por  $\Theta_v \cdot \zeta(0) = \left(\frac{D_\gamma J}{dt}(0), J(0)\right)$ . Então vale que*

$$\Theta_{\dot{\gamma}(t)} \cdot \zeta(t) = \left(\frac{D_\gamma J}{dt}(t), J(t)\right) \quad \forall t. \quad (3.27)$$

*Demonstração.* Como na demonstração do Lema 3.4.4, o campo  $S$  se escreve em coordenadas naturais como  $S(x, y) = (y, -2G(x, y))$ . Defina  $J(t) = d\pi \circ P_{\mathcal{H}} \cdot \zeta(t)$ . Representando  $\zeta(t) = J^i(t)\partial_{x^i} + K^i(t)\partial_{y^i}$  nestas coordenadas temos  $J(t) = J^i(t)\partial_{x^i}$ . Considerando

$$\vec{\zeta}(t) = (\vec{J}(t), \vec{K}(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

onde  $\vec{J} = (J^1, \dots, J^n)$  e  $\vec{K} = (K^1, \dots, K^n)$ , temos a equação do fluxo linearizado

$$\frac{d}{dt} \vec{\zeta} = DS(x, \dot{x}) \cdot \vec{\zeta}$$

onde  $x(t)$  é a representação de  $\gamma$ . Usando a expressão local de  $DS$  descrita em (3.17), obtemos  $K^r = \dot{J}^r$  e a EDO para  $\vec{\zeta}$  é um sistema linear de segunda ordem para os  $J^r$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{J}^r + 2(\partial_{x^i} G^r) J^i + 2(\partial_{y^i} G^r) \dot{J}^i \\ &= \ddot{J}^r + 2(\partial_{x^i} G^r) J^i + 2\Gamma_i^r \dot{J}^i \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde as derivadas parciais dos  $G^r$  são avaliadas no ponto  $(x, \dot{x})$ . Usando a expressão da derivada covariante dada pelo Lema 3.3.1 obtem-se

$$\begin{aligned} \ddot{J}^r &= \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{D_\gamma J}{dt} \right)^r - \Gamma_k^r J^k \right] \\ &= \left( \frac{D_\gamma^2 J}{dt^2} \right)^r - \Gamma_k^r \left( \frac{D_\gamma J}{dt} \right)^k - \frac{d}{dt} (\Gamma_k^r J^k) \\ &= \left( \frac{D_\gamma^2 J}{dt^2} \right)^r - \Gamma_k^r (J^k + \Gamma_l^k J^l) \\ &\quad - ((\partial_{x^l} \Gamma_k^r) \dot{x}^l + (\partial_{y^l} \Gamma_k^r) \dot{x}^l) J^k - \Gamma_k^r \dot{J}^k \\ &= \left( \frac{D_\gamma^2 J}{dt^2} \right)^r - 2\Gamma_k^r J^k - \Gamma_l^r \Gamma_k^l J^k - (\partial_{x^l} \Gamma_k^r) \dot{x}^l J^k + 2(\partial_{y^l} \Gamma_k^r) G^l J^k \end{aligned}$$

onde na última igualdade substituímos  $\ddot{x}^l + 2G^l(x, \dot{x}) = 0$ . Pela equação (3.28) podemos somar  $2(\partial_{x^k} G^r) J^k + 2\Gamma_k^r \dot{J}^k$  nos dois lados da identidade acima e obter 0, isto é,

$$0 = \left( \frac{D_\gamma^2 J}{dt^2} \right)^r + \{2\partial_{x^k} G^r + 2(\partial_{y^l} \Gamma_k^r) G^l - (\partial_{x^l} \Gamma_k^r) \dot{x}^l - \Gamma_l^r \Gamma_k^l\} J^k. \quad (3.29)$$

Comparando com (3.20) e escrevendo  $R^{\dot{\gamma}}(J) = R^{\dot{\gamma}}(J)^r \partial_{x^r}$  esta identidade se reescreve como

$$0 = \left( \frac{D_{\dot{\gamma}}^2 J}{dt^2} \right)^r + R^{\dot{\gamma}}(J)^r \quad (3.30)$$

ou seja,  $J(t)$  é campo de Jacobi. Como  $K^r = \dot{J}^r$  usamos (3.13) e obtemos  $(i_{\dot{\gamma}}^{\dot{\gamma}})^{-1}(P_{\dot{\gamma}} \cdot \zeta(t)) = \frac{D_{\dot{\gamma}} J}{dt}$  como desejado.  $\square$

**Corolário 3.4.7.** *Seja  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  uma variação suave da geodésica não-constante  $\gamma_0(t) = \gamma(0, t)$  por geodésicas. Então  $t \mapsto \partial_s \gamma(0, t)$  é um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma_0$ .*

### 3.5 Pontos conjugados, aplicação exponencial e seus pontos críticos

Assumamos que o fluxo de  $S$  é completo, por exemplo este é o caso quando  $M$  é compacta e sem bordo. A aplicação exponencial associada à métrica Finsler  $F$  é dada por

$$\exp : TM \rightarrow M \quad v \mapsto \exp(v) = \pi \circ \varphi_1^S(v) \quad (3.31)$$

onde  $\varphi_t^S$  denota o fluxo do *spray* geodésico  $S$ . Geometricamente,  $\exp(v) = \gamma(1)$ , onde  $\gamma(t)$  é a geodésica com condição inicial  $\dot{\gamma}(0) = v$ . O mapa  $\exp$  está bem-definido e é de classe  $C^1$  pois o *spray*  $S$  é campo de classe  $C^1$  em  $TM$ . É óbvio que  $S$  e  $\exp$  são  $C^\infty$  em  $TM_0$ . Como  $\exp$  é a composta de um difeomorfismo e uma submersão, segue que  $\exp$  não tem valores críticos. Fixando  $p \in M$  denotaremos por

$$\exp_p = \exp|_{T_p M} : T_p M \rightarrow M \quad (3.32)$$

a restrição de  $\exp$  a  $T_p M$ .

**Lema 3.5.1.** *Suponha  $M$  fechada. Para  $\delta > 0$  suficientemente pequeno a aplicação*

$$\pi \times \exp : F^{-1}([0, \delta]) \rightarrow M \times M, \quad v \mapsto (\pi(v), \exp(v))$$

*define um difeomorfismo  $C^1$  entre  $F^{-1}([0, \delta])$  e uma vizinhança aberta  $\Delta_\delta$  da diagonal.*

*Demonstração.* É óbvio que  $d\exp_p|_0 : T_0(T_pM) \simeq T_pM \rightarrow T_pM$  é a identidade, para todo  $p$ . Logo a diferencial da aplicação  $\pi \times \exp$  calculada no espaço tangente de  $TM$  em um ponto da seção nula é isomorfismo linear. A conclusão segue usando a compacidade da seção nula e o teorema da função inversa.  $\square$

**Observação 3.5.2.** *É fácil demonstrar que existe  $\delta' \in (0, \delta)$  tal que  $\theta(p, q) < \delta' \Rightarrow (p, q) \in \Delta_\delta$ . Nas próximas seções seremos capazes de provar que  $\Delta_\delta = \{(p, q) \in M \times M \mid \theta(p, q) < \delta\}$ .*

É bastante relevante e interessante estudar quanto que  $\exp_p$  falha em ser um difeomorfismo. Por exemplo, exatamente como em geometria Riemanniana, é possível usar a equação de Jacobi para estudar relações entre curvatura e os pontos críticos de  $\exp_p$ . A conexão se dá da seguinte forma: dado  $v \in T_pM \setminus \{0\}$ , um vetor  $\zeta \in T_v(T_pM) = \mathcal{V}_v \subset T_vTM$  é vertical e, como tal, se representa por  $\Theta_v \cdot \zeta = (w, 0)$  através do isomorfismo (3.25). Deste modo segue do Teorema 3.4.6 que

$$\Theta_{\dot{\gamma}(t)} \cdot d\varphi_t^S \cdot \zeta = \left( \frac{D_{\dot{\gamma}}J}{dt}(t), J(t) \right)$$

onde  $\gamma(t)$  é a geodésica satisfazendo  $\dot{\gamma}(0) = v$  e  $J(t)$  é o único campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  satisfazendo  $J(0) = 0$  e  $\frac{D_{\dot{\gamma}}J}{dt}(0) = w$ .

**Lema 3.5.3.** *Vale a fórmula*

$$d\exp_p|_{tv} \cdot tw = J(t) \quad \forall t \geq 0 \tag{3.33}$$

onde aqui identificamos  $T_v(T_pM) \simeq T_pM$ .

*Demonstração.* Para cada  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  temos o difeomorfismo

$$\phi_\lambda : TM \rightarrow TM \quad \text{dado por} \quad \phi_\lambda(v) = \lambda v$$

que é representado em coordenadas naturais por  $\phi_\lambda(x, y) = (x, \lambda y)$ . De  $S(x, y) = (y, -2G(x, y))$  conclui-se que  $S \circ \phi_\lambda = d\phi_\lambda \cdot \lambda S$  pois  $G$  é positivamente homogênea de grau 2 em  $y$ . Integrando esta identidade obtemos  $\varphi_t^S \circ \phi_\lambda = \phi_\lambda \circ \varphi_{\lambda t}^S$  para todo  $\lambda \neq 0$  e  $t$ . Substituindo  $t = 1$  e

chamando  $\lambda$  de  $t$  encontramos  $\varphi_1^S \circ \phi_t = \phi_t \circ \varphi_t^S, \forall t > 0$ . A inclusão  $T_p M \simeq T_v(T_p M) \subset T_v TM$  é dada por

$$w \simeq \Theta_v^{-1} \cdot (w, 0) = i_v^v(w).$$

Notando que  $i_v^v(tw) = d\phi_t \cdot i_v^v(w)$  finalmente obtemos

$$\begin{aligned} d(\exp_p)|_{tv} \cdot tw &= d(\pi \circ \varphi_1^S)|_{tv} \cdot tw \\ &\simeq d(\pi \circ \varphi_1^S) \cdot i_v^v(tw) \\ &= d(\pi \circ \varphi_1^S \circ \phi_t) \cdot i_v^v(w) \\ &= d(\pi \circ \phi_t \circ \varphi_t^S) \cdot i_v^v(w) \\ &= d(\pi \circ \varphi_t^S) \cdot \Theta_v^{-1} \cdot (w, 0) \\ &= d\pi \cdot \Theta_{\dot{\gamma}(t)}^{-1} \cdot \left( \frac{D\gamma^J}{dt}(t), J(t) \right) = J(t). \end{aligned}$$

Na penúltima igualdade o Teorema 3.4.6 foi usado.  $\square$

Motivados pelo lema acima fazemos aqui a seguinte definição clássica.

**Definição 3.5.4.** *Sejam  $v \in T_p M \setminus \{0\}$ ,  $\gamma(t)$  a geodésica satisfazendo  $\dot{\gamma}(0) = v$ , e  $t_0 > 0$ . O ponto  $q = \gamma(t_0)$  é dito conjugado a  $p$  ao longo de  $\gamma$  se existe um campo de Jacobi  $J(t)$  ao longo de  $\gamma$  que não é identicamente nulo e satisfaz  $J(0) = 0, J(t_0) = 0$ .*

Como consequência do Lema 3.5.3 obtemos

**Lema 3.5.5.** *O ponto  $q \in M$  é um valor crítico de  $\exp_p$  se, e somente se, for conjugado a  $p$  ao longo de alguma geodésica  $\gamma(t)$  satisfazendo  $\gamma(0) = p$ .*

**Corolário 3.5.6.** *Para todo  $p \in M$  o conjunto dos pontos conjugados a  $p$  por alguma geodésica tem medida nula.*

*Demonstração.* Aplicação direta do teorema de Sard para aplicações  $C^1$  entre espaços de mesma dimensão.  $\square$

**Observação 3.5.7.** *Note que, diferentemente do caso Riemanniano ou reversível,  $t \mapsto \exp_p(tv)$  coincide com a geodésica  $\gamma(t)$  satisfazendo  $\dot{\gamma}(0) = v$  somente para  $t \geq 0$ . Quando  $t$  é negativo este fato não é verdade em geral devido à não-reversibilidade.*

### 3.6 Espaços de caminhos

Seguimos assumindo que  $M$  é compacta e sem bordo. Como de costume, diremos que uma curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  é suave ou  $C^\infty$  por partes se  $\gamma$  for contínua e existir uma partição  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  de  $[0, 1]$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ , tal que  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  é suave  $\forall i$ . Denotaremos a norma da partição  $P$  por  $\|P\| = \max_i |t_{i+1} - t_i|$ . A energia de uma tal curva é

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 F^2(\dot{\gamma}(t)) dt. \quad (3.34)$$

Nosso objetivo é estudar a teoria de Morse de  $E$  em espaços de curvas em  $M$ . Neste sentido, fixados  $p, q \in M$  denotamos

$$\Omega(p, q) = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ contínua} \mid \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\} \quad (3.35)$$

$$\Lambda(p, q) = \{\gamma \in \Omega(p, q) \mid \gamma \text{ é } C^\infty \text{ por partes}\} \quad (3.36)$$

e dada uma partição  $P = \{t_0, \dots, t_N\}$  de  $[0, 1]$  denotamos

$$\Lambda_P(p, q) = \{\gamma \in \Lambda(p, q) \mid \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \text{ é suave } \forall i\}. \quad (3.37)$$

Note que não descartamos a possibilidade de  $p = q$ . Escrevendo  $\Omega$ ,  $\Lambda$  e  $\Lambda_P$  por simplicidade, consideramos os conjuntos

$$\Lambda^{\leq a} = \{\gamma \in \Lambda \mid E(\gamma) \leq a\}, \quad \Lambda_P^{\leq a} = \{\gamma \in \Lambda_P \mid E(\gamma) \leq a\}$$

$$\Lambda^{< a} = \{\gamma \in \Lambda \mid E(\gamma) < a\}, \quad \Lambda_P^{< a} = \{\gamma \in \Lambda_P \mid E(\gamma) < a\}$$

para  $a > 0$ . Dotamos  $\Omega$  com a topologia  $C^0$  e  $\Lambda, \Lambda_P$  com a topologia  $W^{1,2}$ . Os espaços de caminhos entre  $p$  e  $q$  descritos acima não admitem estrutura de variedade de dimensão finita. Para aplicarmos o Teorema 3.1.5 à nossa situação precisamos de “aproximações” destes espaços com dimensão finita. Seguindo [29] definimos

$$B_P = \{\gamma \in \Lambda_P \mid \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \text{ é geodésica } \forall i\}$$

$$B_P^{\leq a} = \{\gamma \in B_P \mid E(\gamma) \leq a\}$$

$$B_P^{< a} = \{\gamma \in B_P \mid E(\gamma) < a\}.$$

As topologias em  $B_P, B_P^{\leq a}, B_P^{< a}$  são herdadas de  $\Lambda$ . As curvas em  $B^P$  serão chamadas de geodésicas quebradas, e daqui para frente

poderemos chamar uma geodésica de suave para enfatizar que ela não é quebrada.

Note que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz estimamos para todo  $\gamma \in \Lambda^{\leq a}$  e partição  $P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_N = b\}$ :

$$\begin{aligned} \theta(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(\dot{\gamma}(t)) dt \\ &\leq \sqrt{(t_{i+1} - t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} F^2(\dot{\gamma}(t)) dt} \\ &\leq \sqrt{2a \|P\|}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Tomando  $\delta > 0$  como no Lema 3.5.1,  $\delta'$  como na Observação 3.5.2, fixando  $a$  e supondo que a partição é suficientemente fina de modo que  $\sqrt{2a \|P\|} \leq \delta'/2$ , concluímos que para todo  $i = 0, \dots, N-1$  existe único  $v_i \in T_{\gamma(t_i)}M$  satisfazendo  $F(v_i) < \delta$  e  $\exp_{\gamma(t_i)}(v_i) = \gamma(t_{i+1})$ . Desta maneira se  $\gamma \in B_P^{\leq a}$  então os  $N-1$  vetores  $(v_0, \dots, v_{N-2})$  determinam  $\gamma$  unicamente e, sendo assim, o espaço  $B_P^{\leq a}$  tem naturalmente estrutura de variedade suave de dimensão  $n(N-1)$  compatível com a topologia  $W^{1,2}$ . No entanto, note que  $E : B_P^{\leq a} \rightarrow \mathbb{R}$  é apenas de classe  $C^1$  com relação a esta estrutura diferenciável em vista da fórmula

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{F^2(v_i)}{t_{i+1} - t_i}. \quad (3.39)$$

Esta fórmula também deixa claro que  $E$  é  $C^\infty$  no subconjunto aberto e denso de  $B_P^{\leq a}$  que consiste das geodésicas quebradas  $\gamma$  tais que cada  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  é não-constante.

**Lema 3.6.1.** *Para todo  $b < a$  o conjunto  $B_P^{\leq b}$  é compacto em  $B_P^{\leq a}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\gamma_n \in B_P^{\leq a}$  tais que  $\sup_n E(\gamma_n) \leq b$ . Pela compacidade de  $M$  podemos supor que, a menos de uma subsequência, os pontos  $\gamma_n(t_i)$  convergem para pontos  $q_i$ . De acordo com nossas estimativas acima, feitas sob a hipótese de que  $\sqrt{2a \|P\|} \leq \delta'$ , concluímos que os pontos  $p = \gamma_n(t_0), \dots, \gamma_n(t_{N-1}), q = \gamma_n(t_N)$  satisfazem  $\theta(\gamma_n(t_i), \gamma_n(t_{i+1})) \leq \delta'/2$ . Logo  $\theta(q_i, q_{i+1}) \leq \delta'/2$ . Desta forma os vetores  $v_0^n, \dots, v_{N-1}^n$  em  $F^{-1}([0, \delta])$  unicamente determinados por  $\exp_{\gamma_n(t_i)}(v_i^n) = \gamma_n(t_{i+1})$  convergem para vetores  $v_0, \dots, v_{N-1}$

em  $F^{-1}([0, \delta])$  unicamente determinados por  $\exp_{q_i}(v_i) = q_{i+1}$ . Note que  $v_i^n = (t_{i+1} - t_i)\dot{\gamma}_n(t_i)$ . Definindo  $\gamma \in B_P$  por

$$\gamma(t) = \exp_{q_i} \left( \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} v_i \right) \quad \text{em } [t_i, t_{i+1}], \quad \forall i = 0, \dots, N-1$$

temos que  $\gamma_n \rightarrow \gamma$  em  $B_P$  e

$$b \geq E(\gamma_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{F^2(v_i^n)}{t_{i+1} - t_i} \rightarrow \sum_{i=0}^{N-1} \frac{F^2(v_i)}{t_{i+1} - t_i} = E(\gamma).$$

□

### 3.7 Primeira variação da energia

Considere uma partição  $P = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = 1\}$  do intervalo  $[0, 1]$ , e seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  uma geodésica quebrada, isto é,  $\gamma$  é contínua e  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  é geodésica suave,  $\forall i$ . Consideraremos também variações  $h : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$  da curva  $\gamma$  tais que cada restrição  $h|_{(-\epsilon, \epsilon) \times [t_i, t_{i+1}]}$  é suave,  $\forall i$ .

**Lema 3.7.1.** *Se  $\gamma(t)$  é geodésica quebrada como acima e  $\dot{\gamma}(t)$  nunca se anula então para qualquer variação  $h$  de  $\gamma$  temos*

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} E(h(s, \cdot)) \\ &= \sum_{i=1}^N g_{\dot{\gamma}(t_i^-)}(\dot{\gamma}(t_i^-), V(t_i)) - g_{\dot{\gamma}(t_{i-1}^+)}(\dot{\gamma}(t_{i-1}^+), V(t_{i-1})) \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde  $V(t_i) = \partial_s h(0, t_i)$ .

A demonstração é um exercício deixado para o leitor, que pode se referir ao capítulo 1 para o caso do funcional de comprimento.

### 3.8 Segunda variação da energia

Fixe  $p, q \in M$  e uma partição  $P = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots, t_N = 1\}$  de  $[0, 1]$ . Para cada  $\gamma \in \Lambda_P(p, q) = \Lambda_P$  denotamos por  $T_\gamma \Lambda_P$  o

espaço dos campos de vetores contínuos  $X : [0, 1] \rightarrow M$  ao longo de  $\gamma$  tais que  $X(0) = 0$ ,  $X(1) = 0$  e que cada restrição  $X|_{[t_i, t_{i+1}]}$  é  $C^\infty$ . Uma variação de  $\gamma$  com extremos fixos é uma aplicação contínua  $h : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $h(0, t) = \gamma(t) \forall t \in [0, 1]$ ,  $h(s, 0) = p$  e  $h(s, 1) = q \forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$ , e que cada restrição  $h|_{(-\epsilon, \epsilon) \times [t_i, t_{i+1}]}$  é suave. Deste modo  $\partial_s h(0, t) \in T_\gamma \Lambda_P$ , e todo campo em  $T_\gamma \Lambda_P$  é obtido desta forma.

Por definição, uma geodésica de  $F$  ligando  $p$  a  $q$  é a projeção  $\gamma(t)$  de uma trajetória do fluxo do *spray* geodésico associado a  $F$ , trajetória esta que começa em  $p$  e termina em  $q$ .

Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  uma geodésica ligando  $p$  a  $q$ . Uma variação a dois parâmetros de  $\gamma$  com extremos fixos é uma aplicação contínua  $h : (-\epsilon, \epsilon)^2 \times [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $h(s, u, 0) = p$ ,  $h(s, u, 1) = q$  para todo  $(s, t) \in (-\epsilon, \epsilon)^2$ ,  $(s, t) \mapsto h(s, 0, t)$  e  $(u, t) \mapsto h(0, u, t)$  são variações de  $\gamma$ , e a restrição  $h|_{(-\epsilon, \epsilon)^2 \times [t_i, t_{i+1}]}$  é suave,  $\forall i$ . Para quaisquer dois campos  $X, Y \in T_\gamma \Lambda_P$  existe variação de  $\gamma$  a dois parâmetros  $h(s, u, t)$  com extremos fixos satisfazendo  $\partial_s h(0, 0, t) = X(t)$  e  $\partial_u h(0, 0, t) = Y(t)$ .

**Observação 3.8.1.** *As variações de  $\gamma$  discutidas acima dependem também da partição  $P$ , mas por simplicidade na notação não faremos explícita esta dependência.*

**Lema 3.8.2.** *Se  $h(s, u, t)$  é variação a dois parâmetros da geodésica  $\gamma$  não-constante suave que liga  $p$  a  $q$  então*

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial^2}{\partial s \partial u} E(h(s, u, \cdot)) \right|_{s=u=0} \\ &= - \int_0^1 g_\gamma \left( \frac{D_\gamma^2 X}{dt^2} + R^\gamma(X), Y \right) dt \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} g_{\gamma(t_i)} \left( \frac{D_\gamma X}{dt}(t_i^+) - \frac{D_\gamma X}{dt}(t_i^-), Y(t_i) \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde  $X, Y \in T_\gamma \Lambda_P$  são os campos  $X = \partial_u h(0, 0, t)$  e  $Y = \partial_s h(0, 0, t)$ .

**Observação 3.8.3.** *A hipótese de  $\gamma$  não ser constante é necessária para trabalharmos longe da seção nula, e assim podermos derivar  $F^2$  livremente quantas vezes quisermos. Em particular,  $E(h(s, u, \cdot))$  é*

$C^2$  para  $(s, u)$  próximo de  $(0, 0)$ . Este tipo de preocupação não é necessária no caso Riemanniano.

*Demonstração.* Não há perda de generalidade em supor que a partição é fina o suficiente de forma que cada  $\gamma([t_l, t_{l+1}])$  está contido em uma carta de  $M$  com coordenadas  $x = (x^1, \dots, x^n)$ . Sobre esta carta  $TM$  tem coordenadas naturais  $(x, y) = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ . Não há perda de generalidade em fazer as contas em coordenadas para cada intervalo  $[t_l, t_{l+1}]$ . Sendo  $L$  a Lagrangiana  $\frac{1}{2}F^2$ , a primeira variação no intervalo  $[t_l, t_{l+1}]$  fica

$$\begin{aligned} \left. \frac{dE}{ds} \right|_{s=0} &= \int_{t_l}^{t_{l+1}} \left( \partial_{x^i} L - \frac{d}{dt} (\partial_{y^i} L) \right) h_s^i dt + \Delta [(\partial_{y^i} L) h_s^i] \\ &= - \int_{t_l}^{t_{l+1}} g_{ij} h_s^i \left( h_{tt}^j + 2G^j \right) dt + \Delta [g_{ij} h_s^i h_t^j] = 0 \end{aligned}$$

onde todas as funções  $g_{ij}$ ,  $G^j$  etc, são avaliadas no ponto com coordenadas  $x^i = h^i$ ,  $y^i = h_t^i$ , e as funções  $h^i$  e suas derivadas são avaliadas em  $s = u = 0$ . Aqui  $l = 0, \dots, N - 1$  está fixado, e para uma dada função  $f$  suave em  $[t_l, t_{l+1}]$  denotamos  $\Delta[f] = f(t_{l+1}^-) - f(t_l^+)$ . Prosseguindo com o cálculo temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial u \partial s} \right|_{s=u=0} &= - \int_{t_l}^{t_{l+1}} g_{ij} h_s^i \left( h_{ttu}^j + 2(\partial_{x^\lambda} G^j) h_u^\lambda + 2(\partial_{y^\lambda} G^j) h_{tu}^\lambda \right) dt \\ &\quad + \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \Delta [g_{ij} h_s^i h_t^j]. \end{aligned}$$

Aqui foi fortemente usado que  $h_{tt}^j + 2G^j = 0$  quando  $s = u = 0$ . Analisando o integrando acima temos

$$\begin{aligned} (A) &:= h_{ttu}^j + 2(\partial_{x^\lambda} G^j) h_u^\lambda + 2(\partial_{y^\lambda} G^j) h_{tu}^\lambda \\ &= h_{ttu}^j + 2(\partial_{x^\lambda} G^j) h_u^\lambda - 2(\partial_{x^\beta y^\lambda}^2 G^j) h_t^\beta h_u^\lambda \\ &\quad - 2(\partial_{y^\beta y^\lambda}^2 G^j) h_{tt}^\beta h_u^\lambda + \frac{d}{dt} (2(\partial_{y^\lambda} G^j) h_u^\lambda) \\ &= h_{ttu}^j + 2(\partial_{x^\lambda} G^j) h_u^\lambda - 2(\partial_{x^\beta} \Gamma_\lambda^j) h_t^\beta h_u^\lambda \\ &\quad + 4(\partial_{y^\beta} \Gamma_\lambda^j) G^\beta h_u^\lambda + \frac{d}{dt} (2\Gamma_\lambda^j h_u^\lambda) \end{aligned}$$

onde novamente usamos que  $h_{tt}^\beta + 2G^\beta = 0$  em  $s = u = 0$ . Também usamos que  $\partial_{y^\lambda} G^j = \Gamma_\lambda^j$ . Para o campo  $X^j := h_u^j$  em  $s = u = 0$  vamos substituir a identidade

$$\begin{aligned} \ddot{X}^j = h_{ttu}^j &= \left[ \frac{D_\gamma^2 X}{dt^2} \right]^j - \Gamma_r^j \left[ \frac{D_\gamma X}{dt} \right]^r - \frac{d}{dt} (\Gamma_r^j X^r) \\ &= \left[ \frac{D_\gamma^2 X}{dt^2} \right]^j - \Gamma_r^j \dot{X}^r - \Gamma_r^j \Gamma_\lambda^r X^\lambda - \frac{d}{dt} (\Gamma_r^j X^r) \end{aligned}$$

na equação anterior e obter

$$\begin{aligned} (A) &= \left[ \frac{D_\gamma^2 X}{dt^2} \right]^j - \Gamma_r^j \dot{X}^r - \Gamma_r^j \Gamma_\lambda^r X^\lambda - \frac{d}{dt} (\Gamma_r^j X^r) + 2(\partial_{x^\lambda} G^j) X^\lambda \\ &\quad - 2(\partial_{x^\beta} \Gamma_\lambda^j) \dot{\gamma}^\beta X^\lambda + 4(\partial_{y^\beta} \Gamma_\lambda^j) G^\beta X^\lambda + \frac{d}{dt} (2\Gamma_\lambda^j X^\lambda) \end{aligned}$$

Note que  $\gamma^\beta = h_t^\beta$ ,  $\dot{\gamma}^\beta = h_t^\beta$  em  $s = u = 0$ . Usando a expressão de  $R^\dot{\gamma}(X)$  dada em (3.20) obtemos finalmente

$$\begin{aligned} (A) &= \left[ \frac{D_\gamma^2 X}{dt^2} \right]^j + R^\dot{\gamma}(X)^j - \Gamma_\lambda^j \dot{X}^\lambda + \frac{d}{dt} (\Gamma_\lambda^j X^\lambda) \\ &\quad - (\partial_{x^\beta} \Gamma_\lambda^j) \dot{\gamma}^\beta X^\lambda + 2(\partial_{y^\beta} \Gamma_\lambda^j) G^\beta X^\lambda \\ &= \left[ \frac{D_\gamma^2 X}{dt^2} \right]^j + R^\dot{\gamma}(X)^j. \end{aligned}$$

Denotando  $Y^i = h_s^i$  em  $s = u = 0$  o substituindo (A) na fórmula para  $\left. \frac{\partial^2 E}{\partial u \partial s} \right|_{s=u=0}$  acima temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial u \partial s} \right|_{s=u=0} &= - \int_{t_i}^{t_{i+1}} g_{ij} Y^i \left[ \frac{D_\gamma^2 X}{dt^2} + R^\dot{\gamma}(X) \right]^j dt \\ &\quad + \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \Delta [g_{ij} Y^i \dot{\gamma}^j]. \end{aligned} \tag{3.42}$$

A análise do termo  $\left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \Delta [g_{ij} Y^i \dot{\gamma}^j]$  é fácil e deixada a cargo do leitor. Somando em  $l$  a conclusão segue.  $\square$

Façamos uma pausa em nossa discussão para provar a simetria do endomorfismo de curvatura usando argumentos variacionais. Como o leitor poderá ver, esta nova demonstração usa aspectos de geometria simplética por trás da geometria Finsler.

**Lema 3.8.4.** *Vale a fórmula*

$$g_v(R^v(w_1), w_2) = g_v(w_1, R^v(w_2))$$

para todos os vetores  $v \in TM_0$  e  $w_1, w_2 \in T_{\pi(v)}M$ .

*Demonstração.* Sendo os cálculos locais é óbvio que esta afirmação será provada para qualquer métrica Finsler em qualquer variedade. Fixe  $\delta_0 > 0$  tal que a geodésica  $\gamma(t)$  satisfazendo  $\dot{\gamma}(0) = v$  está definida em  $[0, \delta_0]$ , e escolha variação a dois parâmetros suave  $h(s, u, t)$  definida para  $(s, u, t) \in (-\epsilon, \epsilon)^2 \times [0, \delta_0] \rightarrow M$  satisfazendo  $h(0, 0, t) = \gamma(t)$ ,  $h_u(0, 0, 0) = w_1$ ,  $h_s(0, 0, 0) = w_2$ . Não há perda de generalidade supormos que  $h$  toma valores no domínio de um sistema de coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  de  $M$ . Estas coordenadas induzem naturalmente coordenadas  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  em  $TM$ . Além disso podemos ainda supor que os campos  $t \mapsto X(t) = h_u(0, 0, t)$  e  $t \mapsto Y(t) = h_s(0, 0, t)$  são paralelos, isto é,

$$\frac{D_\gamma X}{dt} = \frac{D_\gamma Y}{dt} \equiv 0.$$

Integrando por partes a fórmula (3.42) no intervalo  $[0, \delta]$ , com  $0 < \delta < \delta_0$ , e subtraindo o resultado obtido trocando  $X$  por  $Y$ , e usando o Lema 2.5.27 encontramos

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial^2 E}{\partial u \partial s} \right|_{s=u=0} - \left. \frac{\partial^2 E}{\partial s \partial u} \right|_{s=u=0} \\ &= - \int_0^\delta g_\gamma(Y, R^\dot{\gamma}(X)) - g_\gamma(X, R^\dot{\gamma}(Y)) dt \\ &\quad + \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \Delta [g_\gamma(Y, \dot{\gamma})] - \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Delta [g_\gamma(X, \dot{\gamma})] \end{aligned}$$

onde  $\Delta(f) = f(\delta) - f(0)$ . Dividindo por  $\delta$  e tomando o limite quando

$\delta \rightarrow 0$  obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= g_v(w_2, R^v(w_1)) - g_v(w_1, R^v(w_2)) \\ &+ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left[ \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} g_{\dot{\gamma}}(Y, \dot{\gamma}) - \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} g_{\dot{\gamma}}(X, \dot{\gamma}) \right] \\ &= g_v(w_2, R^v(w_1)) - g_v(w_1, R^v(w_2)) + (B). \end{aligned}$$

Resta provar que  $(B) = 0$ . Para tal considere a aplicação

$$(s, u, t) \mapsto f(s, u, t) = h_t^i \partial_{x^i} \in TM$$

onde  $h_t^i$  está avaliado em  $(s, u, t)$ . Considere também os campos ao longo de  $f$  dados por

$$\begin{aligned} (s, u, t) \mapsto \tilde{X}(s, u, t) &= h_u^i \delta_{x^i} \in T_{f(s,u,t)} TM \\ (s, u, t) \mapsto \tilde{Y}(s, u, t) &= h_s^i \delta_{x^i} \in T_{f(s,u,t)} TM \end{aligned}$$

onde novamente  $h_u^i, h_s^i$  estão avaliadas em  $(s, u, t)$ . Aqui  $\delta_{x^i}$  são os campos horizontais (3.13). Consideremos também as derivadas parciais  $f_u = h_u^i \partial_{x^i} + h_{tu}^i \partial_{y^i}$  e  $f_s = h_s^i \partial_{x^i} + h_{ts}^i \partial_{y^i}$ . Note que

$$P_{\mathcal{V}} \cdot f_u = \left( \left. \frac{D_{\dot{\gamma}} X}{dt} \right)^i \partial_{y^i} = 0, \quad P_{\mathcal{V}} \cdot f_s = \left( \left. \frac{D_{\dot{\gamma}} Y}{dt} \right)^i \partial_{y^i} = 0 \quad \text{em } (0, 0, t)$$

e  $P_{\mathcal{H}} \cdot f_u = \tilde{X}$ ,  $P_{\mathcal{H}} \cdot f_s = \tilde{Y}$  de onde segue que  $f_u = \tilde{X}$ ,  $f_s = \tilde{Y}$  quando avaliamos em  $u = s = 0$ . Sendo assim

$$\begin{aligned} (B) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left[ \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} (\lambda_H \circ f) \cdot \tilde{Y} - \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\lambda_H \circ f) \cdot \tilde{X} \right] \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left[ \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} (\lambda_H \circ f) \cdot f_s - \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\lambda_H \circ f) \cdot f_u \right] \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left[ \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} f^* \lambda_H \cdot \partial_s - \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f^* \lambda_H \cdot \partial_u \right] \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [d(f^* \lambda_H)(\partial_u, \partial_s)]_{u=s=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [(d\lambda_H \circ f)(\tilde{X}, \tilde{Y})]_{u=s=0} \end{aligned}$$

onde  $\lambda_H$  é a forma de Hilbert. A prova termina notando que  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{H}$  e que  $\mathcal{H}$  é Lagrangiano em relação à forma simplética<sup>1</sup>  $d\lambda_H$ , de onde se conclui que  $t \mapsto (d\lambda_H \circ f)(\tilde{X}, \tilde{Y})$  se anula identicamente quando  $u = s = 0$ .  $\square$

Seja  $\gamma$  uma geodésica suave ligando  $p$  a  $q$ . Se  $p = q$  assumamos que  $\gamma$  não é constante. Dados  $X, Y \in T_\gamma \Lambda_P$  denotaremos

$$d^2 E|_\gamma(X, Y) = \left. \frac{\partial^2}{\partial s \partial u} \right|_{s=u=0} E(h(s, u, \cdot)) \quad (3.43)$$

onde  $h(s, u, t)$  é variação a dois parâmetros de  $\gamma$  com extremos fixos satisfazendo  $X(t) = \partial_u h(0, 0, t)$  e  $Y(t) = \partial_s h(0, 0, t)$ . Então  $d^2 E|_\gamma$  define forma bilinear simétrica no espaço vetorial  $T_\gamma \Lambda_P$ .

**Observação 3.8.5.** *Sejam  $P, P'$  duas partições de  $[0, 1]$ . Se  $P'$  refina  $P$  então vale que  $\Lambda_P \subset \Lambda_{P'}$ . Analogamente, se  $c \in \Lambda_P$  então  $T_c \Lambda_P \subset T_c \Lambda_{P'}$ . Note que  $\{0, 1\}$  é partição trivial de  $[0, 1]$ , de modo que  $\Lambda_{\{0,1\}}$  é o conjunto das curvas suaves ligando  $p$  a  $q$  e, dado  $c \in \Lambda_{\{0,1\}}$ ,  $T_c \Lambda_{\{0,1\}}$  é o conjunto dos campos de vetores suaves ao longo de  $c$  que se anulam nos extremos.*

**Definição 3.8.6.** *O índice de uma geodésica suave e não-constante  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  ligando  $p$  a  $q$  é a dimensão do subespaço de  $T_\gamma \Lambda_{\{0,1\}}$  que é maximal com relação à propriedade de  $d^2 E|_\gamma$  ser negativa-definida. Tal índice será denotado por  $\mu(\gamma)$ .*

Fixemos  $\gamma$  como na Definição acima. Não é óbvio que  $\mu(\gamma) < \infty$ . Para demonstrar este fato precisamos de mais alguns enunciados.

Seja  $a > 0$  e escolha partição  $P = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = 1\}$  de  $[0, 1]$  satisfazendo  $\sqrt{2a} \|P\| \leq \delta'$ , onde  $0 < \delta' < \delta$  é pequeno suficiente para que  $\theta(x, y) \leq \delta' \Rightarrow (x, y) \in \Delta_\delta$  com  $\delta$  dado pelo Lema 3.5.1. Também supomos que  $\delta' < \delta$ , veja a Observação 3.5.2. Concluímos que  $B_P^{\leq a}$  se torna uma variedade diferenciável de dimensão  $n(N-1)$ .

<sup>1</sup>Para mais detalhes sobre esta última afirmação veja o Capítulo 4.

**Lema 3.8.7.** *Os pontos críticos de  $E : B_P^{<a} \rightarrow \mathbb{R}$  coincidem com as geodésicas suaves ligando  $p$  a  $q$  com energia estritamente menor do que  $a$ . Sendo  $\gamma$  um ponto crítico de  $E|_{B_P^{<a}}$  que é geodésica não-constante, e identificando  $T_\gamma B_P^{<a}$  com o subespaço de  $T_\gamma \Lambda_P$  que consiste dos campos que satisfazem a equação de Jacobi em cada  $[t_i, t_{i+1}]$ , a Hessiana de  $E|_{B_P^{<a}}$  em  $\gamma$  é a forma bilinear*

$$d^2 E|_\gamma : T_\gamma B_P^{<a} \times T_\gamma B_P^{<a} \rightarrow \mathbb{R}$$

*discutida anteriormente.*

*Demonstração.* Seja  $\gamma \in B_P^{<a}$  um ponto crítico de  $E|_{B_P^{<a}}$ . Se  $\gamma$  é constante (neste caso  $p = q$ ) então, obviamente,  $\gamma$  é suave. Assumamos que  $\gamma$  não é constante.

Pensando ingenuamente, gostaríamos de usar a primeira variação da energia para concluir que  $\gamma$  é suave, como é costumeiro fazer no caso Riemanniano. No entanto, a fórmula de primeira variação dada pelo Lema 3.7.1 é demonstrada tomando derivadas de  $F^2$  de ordem 2 e, conseqüentemente, se  $\dot{\gamma}(t) = 0$  para algum  $t \in [0, 1]$  tais derivadas não estão definidas e esta estratégia não pode ser implementada. Esta é a razão pela qual no Lema 3.7.1 fazemos a hipótese de que  $\dot{\gamma}$  não se anula.

Então, nossa primeira tarefa é eliminar a possibilidade de  $\dot{\gamma}$  se anular. Como  $\gamma$  é geodésica quebrada,  $\dot{\gamma}$  se anula se, e somente se, existir algum intervalo  $[t_l, t_{l+1}]$  tal que  $\dot{\gamma}|_{[t_l, t_{l+1}]} \equiv 0$ . Tratemos o caso em que  $l \geq 1$ , o caso  $l = 0$  é tratado de maneira análoga. Neste caso podemos assumir também, sem perda de generalidade, que  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  para todo  $t \in [t_{l-1}, t_l]$ .

A estrutura diferenciável em  $B_P^{<a}$  é dada pela identificação da curva  $\gamma$  com  $(q_1, \dots, q_{N-1}) \in M \times \dots \times M$  dado por  $q_k = \gamma(t_k)$ ,  $k = 1, \dots, N - 1$ . A energia  $E(\gamma)$  é

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{F^2(v_k)}{\Delta t_k}$$

onde os  $v_k$  são determinados por  $\gamma(t_{k+1}) = \exp_{\gamma(t_k)}(v_k)$ , e  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ . Em outras palavras,  $v_k = \dot{\gamma}(t_k^+) \Delta t_k$ . Estamos assumindo que  $v_l = 0$ ,  $v_{l-1} \neq 0$ , e queremos chegar a uma contradição com a hipótese de  $\gamma$  ser ponto crítico.

Fixemos  $\epsilon > 0$  bem pequeno e consideremos a variação de  $\gamma$  parametrizada por  $s \in (1 - \epsilon, 1]$  associada aos pontos

$$q_k^s = \begin{cases} q_k = \gamma(t_k) & \text{se } k \neq l \\ \gamma(t_{l-1} + s\Delta t_{l-1}) & \text{se } k = l \end{cases}$$

Vamos agora calcular os  $v_k^s$  dados por  $\exp_{q_k^s}(v_k^s) = q_{k+1}^s$ . Obviamente,  $v_k^s = v_k$  para  $k \notin \{l-1, l\}$ . Note que para toda geodésica suave  $c$  vale que  $c(t + \tau) = \exp_{c(t)}(\tau\dot{c}(t))$  se  $\tau \geq 0$ . Aplicando este fato à geodésica suave  $\gamma|_{[t_{l-1}, t_l]}$  encontramos

$$\begin{aligned} \gamma(t_{l-1} + s\Delta t_{l-1}) &= \exp_{\gamma(t_{l-1})}(s\Delta t_{l-1}\dot{\gamma}(t_{l-1}^+)) = \exp_{\gamma(t_{l-1})}(sv_{l-1}) \\ \gamma(t_{l+1}) &= \exp_{\gamma(t_{l-1} + s\Delta t_{l-1})}((1-s)\Delta t_{l-1}\dot{\gamma}(t_{l-1} + s\Delta t_{l-1})) \end{aligned}$$

ou seja,  $v_{l-1}^s = sv_{l-1}$  e  $v_l^s = (1-s)\Delta t_{l-1}\dot{\gamma}(t_{l-1} + s\Delta t_{l-1})$ . Definindo  $\gamma^s$  pelos pontos  $q_1^s, \dots, q_{N-1}^s$ , para  $s \in (1 - \epsilon, 1]$ , encontramos

$$\begin{aligned} &\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=1} E(\gamma^s) \\ &= \frac{1}{2} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=1} \left[ \frac{F^2(sv_{l-1})}{\Delta t_{l-1}} + \frac{F^2((1-s)\Delta t_{l-1}\dot{\gamma}(t_{l-1} + s\Delta t_{l-1}))}{\Delta t_l} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=1} \left[ s^2 \frac{F^2(v_{l-1})}{\Delta t_{l-1}} + (1-s)^2 \Delta t_{l-1}^2 \frac{F^2(\dot{\gamma}(t_{l-1}^+))}{\Delta t_l} \right] \\ &= \frac{F^2(v_{l-1})}{\Delta t_{l-1}} > 0. \end{aligned}$$

Aqui foi usado que  $F^2(\dot{\gamma}(t_{l-1} + s\Delta t_{l-1})) = F^2(\dot{\gamma}(t_{l-1}^+))$ , já que a curva  $\gamma|_{[t_{l-1}, t_l]}$  é geodésica. Isto é uma contradição pois se  $\gamma$  é ponto crítico então a derivada acima deveria se anular. O caso  $l = 0$  é análogo pois  $\gamma$  é assumida não-constante.

A conclusão é que os pontos críticos de  $E|_{B_P^{<a}}$  estão contidos no subconjunto aberto e denso de  $B_P^{<a}$  correspondendo às geodésicas quebradas para as quais  $\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}$  não é constante  $\forall k$ , ou, equivalentemente, com velocidade sempre não-nula. Neste caso podemos

<sup>2</sup>No caso reversível, em particular no caso Riemanniano, esta mesma fórmula valeria para  $\tau < 0$ . No entanto para o caso Finsler, em geral, só podemos tomar  $\tau$  não-negativo.

usar a fórmula de primeira variação da energia dada pelo Lema 3.7.1 e concluir que um tal ponto crítico é de fato uma geodésica suave ligando  $p$  a  $q$ .

As outras afirmações do lema são fáceis e deixadas a cargo do leitor.  $\square$

**Corolário 3.8.8.** *Dados quaisquer  $p, q \in M$  existe uma geodésica suave e minimizante ligando  $p$  a  $q$ .*

**Exercício 3.8.9.** *Prove o corolário acima. Dica: combine o Lema 3.6.1 com o Lema 3.8.7.*

**Corolário 3.8.10.** *Sejam  $\delta > 0$  e  $\Delta_\delta$  obtidos pelo Lema 3.5.1. Então  $\Delta_\delta = \{(p, q) \in M \times M \mid \theta(p, q) < \delta\}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $p, q \in M$  tais que  $\theta(p, q) < \delta$ . Pelo Corolário 3.8.8 existe geodésica  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  satisfazendo  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$  e  $2E(\gamma) = \theta(p, q)^2$ . Logo  $q = \exp_p(\dot{\gamma}(0))$  com  $F(\dot{\gamma}(0)) = \theta(p, q) < \delta$ , ou seja,  $(p, q) \in \Delta_\delta$ . A outra inclusão é óbvia.  $\square$

Seja  $X \in T_\gamma \Lambda_P$  arbitrário. Pela definição de  $\delta$  e pelo Lema 3.5.5, existe um único campo  $Y \in T_\gamma B_P^{<a}$  satisfazendo  $Y(t_i) = X(t_i)$ ,  $\forall i$ . Por outro lado, usando as propriedades de  $\delta$  verificamos que se  $Y \in T_\gamma B_P^{<a}$  satisfaz  $Y(t_i) = 0 \forall i$  então  $Y \equiv 0$ . Fica demonstrado que vale a decomposição

$$T_\gamma \Lambda_P = T_\gamma B_P^{<a} \oplus W_\gamma$$

onde  $W_\gamma$  é o subespaço formado pelos campos que se anulam nos  $t_i$ . Do Lema 3.8.2 segue que

**Lema 3.8.11.** *A decomposição  $T_\gamma \Lambda_P = T_\gamma B_P^{<a} \oplus W_\gamma$  é ortogonal em relação à forma bilinear  $d^2 E|_\gamma$ .*

O núcleo de  $d^2 E|_\gamma$  tem papel central na teoria de Morse de  $E$ .

**Lema 3.8.12.** *O núcleo de  $d^2 E|_\gamma$  em  $T_\gamma \Lambda_P$  coincide com os campos de Jacobi ao longo de  $\gamma$  que são suaves e se anulam nos extremos.*

*Demonstração.* Exercício. Dica: use o Lema 3.8.2.  $\square$

Como consequência do lema acima e do Lema 3.5.3 obtemos o

**Corolário 3.8.13.** *São equivalentes:*

- *O ponto  $q$  não é conjugado a  $p$  ao longo de qualquer geodésica ligando  $p$  a  $q$  com energia  $< a$ .*
- *$E : B_P^{<a} \rightarrow \mathbb{R}$  é Morse no subconjunto aberto e denso de  $B_P^{<a}$  que consiste das geodésicas quebradas tais que cada  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  é não-constante.*

O próximo enunciado é importante.

**Lema 3.8.14.** *Se  $H \subset T_\gamma \Lambda_P$  é subespaço onde  $d^2 E|_\gamma$  é negativa-definida então  $H \cap W_\gamma = \{0\}$ . Também vale que  $d^2 E|_\gamma$  é positiva-definida em  $W_\gamma$ .*

*Demonstração.* Seja  $X \in W_\gamma$ . Se  $d^2 E|_\gamma(X, X) < 0$  então existiria variação de  $\gamma$  em  $B_P^{<a}$  deixando os pontos  $t_i$  estacionários, ao longo da qual  $E$  decresce estritamente. Mas isto seria uma contradição com a fato de que  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  é geodésica minimizante ligando  $\gamma(t_i)$  a  $\gamma(t_{i+1})$ . Fica provado que  $d^2 E|_\gamma(X, X) \geq 0 \forall X \in W_\gamma$ . Logo, um vetor  $X \in H \cap W_\gamma$  não-nulo satisfaria  $d^2 E|_\gamma(X, X) < 0$  e  $d^2 E|_\gamma(X, X) \geq 0$ , um absurdo.

Suponha que  $X \in W_\gamma$  satisfaz  $d^2 E|_\gamma(X, X) = 0$ . Pelo Lema 3.8.11 vale que  $d^2 E|_\gamma(X, Y) = 0$  para todo  $Y \in T_\gamma B_P^{<a}$ . Seja  $Z \in W_\gamma$  arbitrário. Como

$$0 \leq d^2 E|_\gamma(X + cZ, X + cZ) = 2c d^2 E|_\gamma(Z, X) + c^2 d^2 E|_\gamma(Z, Z)$$

$\forall c \in \mathbb{R}$ , concluímos que  $d^2 E|_\gamma(Z, X) = 0$ . Logo  $d^2 E|_\gamma(X, Y) = 0 \forall Y \in T_\gamma \Lambda_P$ . Aplicando o Lema 3.8.12 concluímos que  $X$  é campo de Jacobi que se anula em todos os  $t_i$ , de onde segue que  $X \equiv 0$ .  $\square$

**Corolário 3.8.15.**  *$\mu(\gamma) < \infty$  para toda geodésica (não-constante)  $\gamma$  ligando  $p$  a  $q$ , e  $\mu(\gamma)$  coincide com o índice de Morse de  $\gamma$  vista como ponto crítico de  $E : B_P^{<a} \rightarrow \mathbb{R}$ .*

**Observação 3.8.16.** *Os argumentos dados em [29, §15] no caso Riemanniano podem ser adaptados para demonstrar também no caso*

*Finsleriano que o índice de uma geodésica  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  (suave e não-constante) ligando  $p$  a  $q$  é o número de pontos  $\gamma(t)$ ,  $t \in (0, 1)$ , conjugados a  $p$  ao longo de  $\gamma|_{[0,t]}$ , contados com uma certa multiplicidade. Este é um bom exercício para o leitor, que não faremos aqui por ser uma repetição dos argumentos de [29, §15].*

### 3.9 Teoria de Morse para a energia

Aqui fixaremos pontos  $p \neq q$  em  $M$  tais que  $q$  não é conjugado a  $p$  ao longo de qualquer geodésica ligando  $p$  a  $q$ . Pelo Lema 3.5.5 e pelo teorema de Sard, fixado  $p$  então quase todo ponto  $q$  tem esta propriedade.

Fixe também  $\delta > 0$  dado pelo Lema 3.5.1,  $a > 0$  e uma partição  $P = \{t_l\}_{l=0, \dots, N}$  de  $[0, 1]$  satisfazendo  $\sqrt{2a}\|P\| < \delta$ . Desta forma, se  $c \in \Lambda^{\leq a}(p, q) = \Lambda^{\leq a}$  então, pelo Corolário 3.8.10 e pelas estimativas feitas na seção 3.6, todo par de pontos  $(c(t_l), c(t_{l+1}))$  está na vizinhança  $\Delta_\delta$  dada pelo Lema 3.5.1 e, conseqüentemente, os pontos  $c(t_l)$  e  $c(t_{l+1})$  estão ligados por uma única geodésica minimizante ao longo da qual eles não são conjugados. Como já discutido, decorre destes fatos que o espaço  $B_P^{\leq a}$  é variedade de dimensão  $n(N - 1)$ .

Definamos

$$\begin{aligned} T : [0, 1] \times \Lambda^{\leq a} &\rightarrow \Lambda^{\leq a} \\ (u, c) &\mapsto T_u(c) \end{aligned} \quad (3.44)$$

por

$$T_u(c)(t) = \begin{cases} \exp_{c(t_l)} \left( \frac{t - t_l}{u\Delta t_l} v_{l,u} \right) & \text{se } t \in [t_l, t_l + u\Delta t_l] \\ c(t) & \text{se } t \in [t_l + u\Delta t_l, t_{l+1}] \end{cases} \quad (3.45)$$

se  $u > 0$  e  $t \in [t_l, t_{l+1}]$ , onde  $\Delta t_l = t_{l+1} - t_l$  e  $v_{l,u}$  é o vetor definido por  $v_{l,u} = \exp_{c(t_l)}^{-1}(c(t_l + u\Delta t_l))$ , e por  $T_0(c) = c$ .

Note que esta aplicação é diferente daquela usada em [29]: aqui deformamos a curva  $c$  simultaneamente em todos os intervalos  $[t_l, t_{l+1}]$ . Vê-se facilmente que  $T$  é contínua na topologia  $W^{1,2}$ . O seguinte lema é fácil e deixado para o leitor.

**Lema 3.9.1.**  *$T$  é uma retração por deformação de  $\Lambda^{<a}$  em  $B_P^{<a}$ , ou seja,  $T : [0, 1] \times \Lambda^{<a} \rightarrow \Lambda^{<a}$  é contínua e  $T_u(c) = c \forall c \in B_P^{<a}$ . Segue que  $\Lambda^{<a}$  e  $B_P^{<a}$  são homotopicamente equivalentes.*

**Corolário 3.9.2.** *O espaço  $\Lambda^{<a}$  é homotopicamente equivalente a um CW-complexo que tem exatamente uma  $\mu$ -célula para cada geodésica (suave)  $\gamma$  ligando  $p$  a  $q$  satisfazendo  $E(\gamma) < a$  e  $\mu(\gamma) = \mu$ .*

*Demonstração.* Lembre que  $p \neq q$  por hipótese. O Corolário 3.8.13 diz que  $E$  é Morse quando restrita a um certo subconjunto aberto e denso de  $B_P^{<a}$  onde  $E$  é suave. O fato crucial é notar que o Lema 3.8.7 diz que este subconjunto aberto e denso contém todos os pontos críticos. A Observação 3.1.7 diz que o Teorema 3.1.5 pode ser aplicado com pequenas modificações para provar que o espaço  $B_P^{<a}$  é homotopicamente equivalente a um CW-complexo com as propriedades requeridas. Pelo lema anterior temos a conclusão desejada.  $\square$

A partir daqui apenas observamos que os argumentos de [29] podem ser dados de maneira ligeiramente diferente. Como  $p$  e  $q$  não são conjugados por nenhuma geodésica, vale que para todo  $b > 0$  o conjunto das geodésicas suaves ligando  $p$  a  $q$  com comprimento limitado por  $b$  é finito. Logo encontramos sequência  $a_1 < a_2 < \dots$  satisfazendo  $a_j \rightarrow \infty$  tal que  $a_j$  não é energia de nenhuma geodésica suave ligando  $p$  a  $q$ . Pelo Corolário 3.9.2, cada  $\Lambda^{<a_j}$  é homotopicamente equivalente a um CW-complexo  $K^j$  contendo precisamente uma  $\mu$ -célula para cada geodésica suave de índice  $\mu$  e energia  $< a_j$ . Argumentando como em [29, §17], vê-se que o espaço  $\Lambda$  é o limite direto de homotopia da sequência  $\emptyset \subset \Lambda^{<a_1} \subset \Lambda^{<a_2} \subset \dots \subset \Lambda$ . Além disso, é possível argumentar como em [29, §3] e “organizar” os CW-complexos  $K^j$  dentro de um CW-complexo  $K^\infty$  com as seguintes propriedades: se  $j \leq m \leq \infty$  então  $K^j$  é subcomplexo de  $K^m$ , e  $K^\infty$  tem exatamente uma  $\mu$ -célula para cada geodésica suave ligando  $p$  a  $q$  com índice  $\mu$ . Finalmente, é possível construir indutivamente uma aplicação contínua  $\Lambda \rightarrow K^\infty$  que induz equivalência homotópica  $\Lambda^{<a_j} \rightarrow K^j, \forall j < \infty$ . Como  $K^\infty$  é o limite direto de homotopia da sequência  $\emptyset \subset K^1 \subset K^2 \subset \dots \subset K^\infty$ , os resultados de [29, apêndice] nos dizem que  $\Lambda$  é homotopicamente equivalente a  $K^\infty$ . Como  $\Lambda$  e  $\Omega$  são homotopicamente equivalentes, temos o seguinte importante enunciado.

**Teorema 3.9.3** (Teorema fundamental da teoria de Morse). *Se  $M$  é variedade compacta e sem bordo com uma métrica Finsler então para quaisquer dois pontos  $p \neq q \in M$  que não são conjugados<sup>3</sup>, o espaço  $\Omega(p, q)$  é homotopicamente equivalente a um CW-complexo com exatamente uma  $\mu$ -célula para cada geodésica ligando  $p$  a  $q$  de índice  $\mu$ .*

**Observação 3.9.4.** *A hipótese  $p \neq q$  somente apareceu para garantir que podemos “trabalhar longe da seção nula”, pois desta forma todas as geodésicas suaves ligando  $p$  a  $q$  são necessariamente não-constantemente e, portanto, imersões. No caso Riemanniano não é necessário tomar este cuidado.*

**Observação 3.9.5.** *Note que o teorema acima pode ser demonstrado filtrando pela componente conexa de  $\Omega(p, q)$ , isto é, dados pontos  $p, q$  nas hipóteses do teorema e dada uma classe de homotopia  $\kappa$  de curvas conectando  $p$  a  $q$ , o espaço  $\Omega(p, q; \kappa) \subset \Omega(p, q)$  das curvas na classe  $\kappa$  tem o mesmo tipo de homotopia que um CW-complexo com exatamente uma  $\mu$ -célula para cada geodésica ligando  $p$  a  $q$  de índice  $\mu$  na classe  $\kappa$ .*

## 3.10 Aplicações

Guiados por [29] e [33], colheremos aqui alguns dos frutos dados pelo Teorema 3.9.3.

### 3.10.1 Geodésicas em esferas

**Teorema 3.10.1.** *Seja  $F$  uma métrica Finsler em uma variedade  $M$  compacta, sem bordo e homotopicamente equivalente a  $S^n$ , com  $n \geq 3$ . Se  $p \neq q$  são pontos em  $M$  que não são conjugados, então existem infinitas geodésicas ligando  $p$  a  $q$ .*

*Demonstração.* Dados dois pontos  $p, q \in M$  o espaço  $\Omega(p, q)$  é obviamente homotopicamente equivalente a

$$\Omega M_p = \{c : [0, 1] \rightarrow M \text{ contínua} \mid c(0) = c(1) = p\}$$

<sup>3</sup>Mais precisamente, não existe geodésica ligando  $p$  a  $q$  ao longo da qual  $q$  é conjugado a  $p$ .

que, por sua vez, tem seu tipo de homotopia determinado pelo tipo de homotopia de  $M$ . A topologia em  $\Omega M_p$  é a  $C^0$ . Assim sendo, se  $p \neq q$  são como no enunciado do teorema, concluímos que  $\Omega(p, q)$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $\Omega S_{x_0}^n$ , para algum  $x_0 \in S^n$ . Agora fixemos  $x_1 \in S^n$ ,  $x_1 \notin \{x_0, -x_0\}$  e estudemos o conjunto  $\Omega'$  dos mapas contínuos  $c: [0, 1] \rightarrow S^n$  tais que  $c(0) = x_0$ ,  $c(1) = x_1$ , munido da topologia  $C^0$ . Equipando  $S^n$  da métrica Riemanniana induzida pela inclusão  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , onde  $\mathbb{R}^{n+1}$  está dotado de sua métrica euclidiana, concluímos do Teorema 3.9.3 que  $\Omega'$  tem o mesmo tipo de homotopia que um CW-complexo com uma  $\mu$ -célula para cada geodésica ligando  $x_0$  a  $x_1$  de índice  $\mu$ . Como as geodésicas de  $S^n$  são arcos contidos em grandes círculos, segue que há pelo menos uma tal geodésica com índice igual a  $k(n-1)$  para cada  $k = 0, 1, 2, \dots$ .  $\square$

### 3.10.2 Teorema de Auslander: uma versão Finsler para o teorema de Bonnet-Myers

O escalar de Ricci na direção de  $v \in TM_0$  é o traço do endomorfismo de curvatura na direção de  $v$ , isto é,

$$Ric(v) = \text{tr } R^v. \tag{3.46}$$

Seja  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  uma base  $g_v$ -ortonormal do subespaço complementar  $g_v$ -ortogonal de  $\mathbb{R}v$  em  $T_{\pi(v)}M$ . Da Definição 3.4.3 segue facilmente que  $R^v(v) = 0$ . Logo

$$Ric(v) = \sum_{i=1}^{n-1} g_v(R^v(e_i), e_i) = F^2(v) \sum_{i=1}^{n-1} K(\Pi_i, v)$$

onde  $\Pi_i$  é o plano gerado por  $v$  e  $e_i$ .

**Teorema 3.10.2** (Auslander [4]). *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade munida de uma métrica Finsler satisfazendo a seguinte propriedade: quaisquer dois pontos são ligados por uma geodésica minimizante. Se  $\delta > 0$  e  $Ric(v) \geq \delta(n-1)F^2(v)$  para todo  $v \in TM_0$  então*

$$\text{diam } M := \sup\{\theta(p, q) \mid p, q \in M\} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

*Demonstração.* Sejam  $p, q$  pontos de  $M$  e assumamos, por contradição que  $\ell = \theta(p, q) > \pi/\sqrt{\delta}$ . Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  geodésica minimizante ligando  $p$  a  $q$ , que necessariamente satisfaz  $F(\dot{\gamma}(0)) = \ell$ . Considere  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  uma base  $g_{\dot{\gamma}(0)}$ -ortonormal do complementar  $g_{\dot{\gamma}(0)}$ -ortogonal de  $\mathbb{R}\dot{\gamma}(0)$  em  $T_pM$ , e sejam  $E_i(t)$  os campos paralelos ao longo de  $\gamma$  satisfazendo  $E_i(0) = e_i$ . Definindo  $X_i(t) = (\sin \pi t)E_i(t) \in T_\gamma\Lambda_{\{0,1\}}$ , usamos o Lema 3.8.2 para estimar

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} d^2 E|_\gamma(X_i, X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^1 g_\gamma \left( \frac{D_\gamma X_i}{dt}, \frac{D_\gamma X_i}{dt} \right) - g_\gamma (R^\dot{\gamma}(X_i), X_i) \\ &= \int_0^1 (n-1)\pi^2 \cos^2 \pi t - (\sin^2 \pi t) Ric(\dot{\gamma}) \\ &\leq \int_0^1 (n-1)\pi^2 \cos^2 \pi t - (\sin^2 \pi t)\ell^2(n-1)\delta \\ &< (n-1) \int_0^1 \pi^2 (\cos^2 \pi t - \sin^2 \pi t) = 0. \end{aligned} \tag{3.47}$$

A conclusão é que para algum  $i$  vale  $d^2 E|_\gamma(X_i, X_i) < 0$ , contradizendo a propriedade minimizante de  $\gamma$ .  $\square$

Em particular, uma  $n$ -variedade Finsler como no Teorema 3.10.2 é necessariamente compacta.

### 3.10.3 Uma versão Finsler para o teorema de Cartan-Hadamard

Daremos aqui apenas uma versão do teorema bem mais fraca do que a sua versão Riemanniana, de caráter ilustrativo.

**Teorema 3.10.3.** *Seja  $(M, F)$  uma variedade Finsler conexa, compacta e sem bordo, tal que todas as curvaturas bandeira são não-positivas. Então  $M$  não é simplesmente conexa.*

*Demonstração.* Sejam  $p \neq q$  pontos de  $M$ , e seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  uma geodésica ligando  $p$  a  $q$ . Se  $J(t)$  é campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$

satisfazendo  $J(0) = 0$  então para a função  $f(t) = \frac{1}{2}g_{\dot{\gamma}(t)}(J(t), J(t))$  se pode calcular usando a Proposição 2.5.27

$$f' = g_{\dot{\gamma}} \left( \frac{D_{\dot{\gamma}} J}{dt}, J \right)$$

e

$$f'' = g_{\dot{\gamma}} (-R^{\dot{\gamma}}(J), J) + g_{\dot{\gamma}} \left( \frac{D_{\dot{\gamma}} J}{dt}, \frac{D_{\dot{\gamma}} J}{dt} \right) \geq 0$$

Logo se  $J(t) = 0$  para algum  $t > 0$  então  $J \equiv 0$ , isto é, nenhum ponto  $\gamma(t)$  é conjugado a  $p$  ao longo de  $\gamma|_{[0,t]}$ . De acordo com a Observação 3.8.16, o teorema do índice para métricas Finsler garante que toda a geodésica ligando  $p$  a  $q$  tem índice 0. Sendo assim,  $\Omega(p, q)$  tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo somente com células de dimensão 0, isto é, de um espaço discreto. Se  $M$  fosse simplesmente conexa então este CW-complexo teria somente um ponto, ou seja, para cada ponto  $q$  só existiria uma geodésica ligando  $p$  a  $q$ . Como nenhum ponto é conjugado a  $p$ ,  $\exp_p$  seria um difeomorfismo de classe  $C^1$ . Isto seria uma contradição com a compacidade de  $M$ .  $\square$

No caso Riemanniano, o teorema de Cartan-Hadamard diz que se  $M$  for geodesicamente completa, simplesmente conexa e tiver curvaturas seccionais não-positivas então para todo  $p$  a aplicação exponencial  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  é um difeomorfismo. Para a versão Finsler deste enunciado precisaríamos ter definido e estudado a noção de completude geodésica.

### 3.10.4 O teorema da esfera de Rademacher

Para o enunciado precisamos recordar a noção de reversibilidade de uma métrica Finsler  $F$ .

**Definição 3.10.4.** *Em um ponto  $p$  a reversibilidade em  $p$  é*

$$r_p = \sup\{F(-v) \mid v \in T_p M \text{ e } F(v) = 1\}.$$

*A reversibilidade de  $F$  é*

$$r = \sup\{r_p \mid p \in M\}.$$

**Exercício 3.10.5.** Prove que  $r_p \geq 1$ , para todo  $p \in M$ .

**Teorema 3.10.6** (Rademacher). [33, Teorema 1] Seja  $(M, F)$  uma variedade Finsler conexa, compacta, sem bordo e simplesmente conexa, de dimensão  $n \geq 3$  e com reversibilidade  $r$ . Se todas as curvaturas bandeira  $K$  satisfazem

$$\left(\frac{r}{r+1}\right)^2 < K \leq 1$$

então  $M$  é homotopicamente equivalente a  $S^n$ .

A prova se baseia nos lemas 3.10.8 e 3.10.9 abaixo. O Lema 3.10.8, que explora as relações entre comprimento e curvatura para estimar índices de geodésicas, tem uma demonstração fácil e interessante. O Lema 3.10.9, por outro lado, tem uma demonstração não-trivial e um tanto técnica, embora baseada em ferramentas elementares. Essencialmente é uma espécie de “lema de longas homotopias” como em geometria Riemanniana. Somente demonstraremos o Lema 3.10.8, para uma prova do Lema 3.10.9 veja [32, 33]. Dados estes dois lemas, descreveremos completamente o restante da demonstração do Teorema 3.10.6 baseada no Teorema 3.9.3 e em fatos bem conhecidos de topologia.

**Lema 3.10.7.** Considere para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$  a forma quadrática

$$Q(X) = \int_0^1 |\dot{X}(t)|^2 - \alpha^2 |X(t)|^2 dt$$

definida no espaço  $V$  das aplicações suaves  $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  satisfazendo  $X(0) = X(1) = 0$ . Se  $\alpha^2 > \pi^2$  então  $Q$  é negativa definida em um subespaço de  $V$  de dimensão pelo menos  $m$ . Se  $\alpha^2 < \pi^2$  então  $Q(X) > 0$  para todo  $X \neq 0$ .

*Demonstração.* A demonstração é um exercício com dicas:

- No caso  $\alpha^2 > \pi^2$  verifique que  $Q(X) < 0$  para todo  $X$  no espaço gerado pelos vetores da forma  $X(t) = (\sin \pi t)v$  onde  $v \in \mathbb{R}^m$  é um vetor constante.
- No caso  $\alpha^2 < \pi^2$  expanda  $X \in V$  como uma série de Fourier para verificar que  $Q(X) > 0$  se  $X \neq 0$ .

□

Como a equação de Jacobi é dada em termos da curvatura, podemos usá-la para estimar a distância até  $p$  dos pontos conjugados a  $p$ .

**Lema 3.10.8.** *Seja  $\gamma(t)$  uma geodésica ligando  $\gamma(0) = p$  a  $\gamma(1) = q$ , sejam  $\Delta, \delta$  números positivos, e seja  $\ell > 0$  o comprimento de  $\gamma$ .*

- *Suponha que para todo  $t > 0$  e todo plano  $\Pi \subset T_{\gamma(t)}M$  contendo  $\dot{\gamma}(t)$  as curvaturas bandeira satisfazem  $K(\Pi, \dot{\gamma}(t)) < \Delta$ . Se  $\ell < \pi/\sqrt{\Delta}$  então  $\mu(\gamma) = 0$ .*
- *Suponha que para todo  $t > 0$  e todo plano  $\Pi \subset T_{\gamma(t)}M$  contendo  $\dot{\gamma}(t)$  as curvaturas bandeira satisfazem  $K(\Pi, \dot{\gamma}(t)) > \delta > 0$ . Se  $\ell > \pi/\sqrt{\delta}$  então  $\mu(\gamma) \geq n - 1$ .*

*Demonstração.* Considere  $e_1, \dots, e_{n-1}$  uma base  $g_{\dot{\gamma}(0)}$ -ortonormal do espaço  $g_{\dot{\gamma}(0)}$ -ortogonal de  $\mathbb{R}\dot{\gamma}(0)$ . Usando transporte paralelo definimos a partir dos  $e_i$  campos paralelos  $E_i(t)$  ao longo de  $\gamma$ , isto é,  $E_i(0) = e_i$ ,  $\frac{D_{\dot{\gamma}} E_i}{dt} \equiv 0$ . Deste modo, todo campo  $X \in T_{\gamma}\Lambda_{\{0,1\}}$  se escreve como  $\vec{X} = X^i E_i$  onde as funções  $X^i(t)$  são suaves e se anulam em 0 e 1. Abaixo escreveremos  $\vec{X}(t) = (X^1(t), \dots, X^{n-1}(t))$ . Aplicando o Lema 3.8.2 obtemos

$$\begin{aligned} d^2 E|_{\gamma}(X, X) &= - \int_0^1 g_{\dot{\gamma}} \left( \frac{D_{\dot{\gamma}}^2 X}{dt^2} + R^{\dot{\gamma}}(X), X \right) \\ &= - \int_0^1 \left\langle \frac{d^2 \vec{X}}{dt^2}, \vec{X} \right\rangle + F^2(\dot{\gamma}) K(\Pi(t), \dot{\gamma}(t)) |\vec{X}|^2 \\ &= \int_0^1 \left| \frac{d\vec{X}}{dt} \right|^2 - \ell^2 K(\Pi(t), \dot{\gamma}(t)) |\vec{X}|^2 \end{aligned}$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $|\cdot|$  denotam o produto interno e norma euclidianos de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , respectivamente. Assumindo  $K(\Pi(t), \dot{\gamma}(t)) < \Delta$  e  $\ell < \pi/\sqrt{\Delta}$  estimamos

$$d^2 E|_{\gamma}(X, X) \geq \int_0^1 \left| \frac{d\vec{X}}{dt} \right|^2 - \ell^2 \Delta |\vec{X}|^2$$

onde  $\ell^2 \Delta < \pi^2$ . Pelo Lema 3.10.7 temos que  $d^2 E|_\gamma(X, X) > 0$  sempre que  $X \in T_\gamma \Lambda_{\{0,1\}}$  não for nulo. A segunda afirmação segue analogamente: se  $K(\Pi(t), \dot{\gamma}(t)) > \delta$  e  $\ell > \pi/\sqrt{\delta}$  então estimamos

$$d^2 E|_\gamma(X, X) \leq \int_0^1 \left| \frac{d\vec{X}}{dt} \right|^2 - \ell^2 \delta |\vec{X}|^2 \quad (3.48)$$

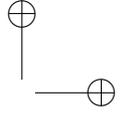
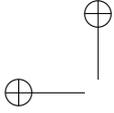
onde  $\ell^2 \delta > \pi^2$ , e a conclusão novamente do Lema 3.10.7.  $\square$

**Lema 3.10.9** (Rademacher). [32, 33] *Seja  $(M, F)$  uma variedade Finsler nas hipóteses do Teorema 3.10.6. Então para todo  $p \in M$  e  $\epsilon > 0$  existe  $q \in M$  tal que  $\theta(q, p) < \epsilon$  e  $\vartheta(p, q) + \theta(q, p) \geq \pi(1 + r^{-1})$ , onde  $\vartheta(p, q)$  denota o comprimento da geodésica não-minimizante mais curta ligando  $p$  a  $q$ . Além disso, o ponto  $q$  não é conjugado a  $p$  ao longo de qualquer geodésica ligando  $p$  a  $q$ .*

Diz-se que um espaço topológico conexo por caminhos com um ponto marcado  $(X, x)$ ,  $x \in X$ , é  $n$ -conexo se  $\pi_j(X, x)$  é trivial, para todo  $j = 1, \dots, n$ . Esta noção não depende da escolha de  $x$ .

**Lema 3.10.10.** *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade compacta, sem bordo e conexa, com  $n \geq 2$ . Então  $M$  é  $(n - 1)$ -conexa se, e somente se,  $M$  é homotopicamente equivalente a  $S^n$ .*

*Demonstração.* A prova é uma miscelânea de teoremas básicos e bem conhecidos em topologia. Fixe  $p \in M$  e assumamos que  $\pi_j(M, p) = 0$  para todo  $j = 1, \dots, n - 1$ . Necessariamente  $M$  é orientável pois é simplesmente conexa. Logo  $H_n(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ . Pelo isomorfismo de Hurewicz  $\pi_n(M, p) \simeq H_n(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ . Logo, para algum  $x_0 \in S^n$ , existe aplicação contínua  $f : (S^n, x_0) \rightarrow (M, p)$  induzindo isomorfismo  $H_n(S^n, \mathbb{Z}) \simeq H_n(M, \mathbb{Z})$ . Pelas nossas hipóteses e pelo isomorfismo de Hurewicz,  $f$  induz isomorfismo em  $H_j(S^n, \mathbb{Z}) \simeq H_j(M, \mathbb{Z})$  para todo  $j = 0, \dots, n$  pois para  $0 \leq j < n$  estes grupos são triviais. Logo  $f$  induz isomorfismo  $H_j(S^n, \mathbb{Z}) \simeq H_j(M, \mathbb{Z})$  para todo  $j \geq 0$  já que  $M$  e  $S^n$  são  $n$ -variedades. Pelo teorema de Whitehead ( $M$  é simplesmente conexa por hipótese!)  $f$  induz isomorfismo  $\pi_j(S^n, x_0) \simeq \pi_j(M, p)$ , para todo  $j \geq 0$ . Em outras palavras,  $f$  é uma equivalência homotópica fraca e, portanto, é uma equivalência homotópica.  $\square$



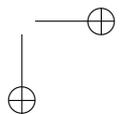
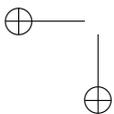
*Demonstração do Teorema 3.10.6.* Pelo Lema 3.10.9 para todo  $\eta > 0$  encontramos  $q \neq p$  arbitrariamente próximo de  $p$  tal que

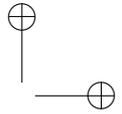
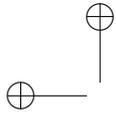
- Toda geodésica não-minimizante ligando  $p$  a  $q$  tem comprimento  $\ell \geq (\pi - \eta)(1 + r^{-1})$ .
- Não existe geodésica ligando  $p$  a  $q$  ao longo da qual  $q$  é conjugado a  $p$ .

Seja  $\delta$  entre  $(r/(r+1))^2$  e 1 tal que  $\delta < K \leq 1$  para toda curvatura bandeira  $K$ . Tomando  $\eta$  suficientemente pequeno tal que

$$\frac{\pi}{\sqrt{\delta}} < (\pi - \eta)(1 + r^{-1})$$

podemos aplicar o Lema 3.10.8 e concluir que toda a geodésica ligando  $p$  a  $q$  não-minimizante tem índice  $\geq n - 1$ . O Teorema 3.9.3 garante que  $\Omega(p, q)$  tem o mesmo tipo de homotopia que um CW-complexo  $Y$  com células de dimensão 0 ou  $\geq n - 1$ . Como toda aplicação contínua  $S^j \rightarrow Y$  é homotópica a um mapa celular, conclui-se que para todo  $j = 1, \dots, n - 2$  vale que todo mapa contínuo  $S^j \rightarrow \Omega(p, q)$  é homotópico a uma aplicação constante. Como  $M$  é simplesmente conexa vale que  $\Omega(p, q)$  é conexo por caminhos, de onde podemos finalmente concluir que  $\Omega(p, q)$  é  $(n - 2)$ -conexo. Consequentemente  $\Omega M_p$  é  $(n - 2)$ -conexo. Logo  $M$  é  $(n - 1)$ -conexa e a conclusão segue do Lema 3.10.10.  $\square$





## Capítulo 4

# Variedades simpléticas e de contato

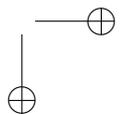
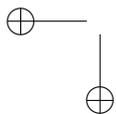
A noção física de espaço de fase é descrita matematicamente pela noção de variedade simplética. Neste capítulo estudamos os fatos mais básicos sobre variedades simpléticas, que são os espaços onde estão bem definidos os sistemas Hamiltonianos. Também fazemos uma rápida introdução aos fundamentos da geometria de contato, motivados pelo fato de que hipersuperfícies com tipo de contato formam uma classe especial de níveis de energia que podem ser estudados usando métodos modernos de topologia simplética.

### 4.1 Álgebra linear simplética rudimentar

**Definição 4.1.1.** *Um espaço vetorial simplético  $(V, \omega)$  é um espaço vetorial real  $V$  munido de uma forma bilinear  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , que é*

- *anti-simétrica:  $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$  para todo  $u, v \in V$ .*
- *não-degenerada:  $\omega(u, v) = 0$  para todo  $v \in V \Rightarrow u = 0$ .*

*A forma  $\omega$  é dita uma forma bilinear simplética em  $V$ .*



**Definição 4.1.2.** *Sejam  $(V_1, \omega_1)$  e  $(V_2, \omega_2)$  espaços vetoriais simpléticos. Dizemos que uma transformação linear  $T : V_1 \rightarrow V_2$  é simplética se  $T^*\omega_2 = \omega_1$ , ou seja  $\omega_2(Tu, Tv) = \omega_1(u, v)$  para quaisquer  $u, v \in V_1$ . Se  $V_1$  e  $V_2$  têm a mesma dimensão então dizemos que  $T$  é um symplectomorfismo, e que  $(V_1, \omega_1)$  e  $(V_2, \omega_2)$  são symplectomorfos.*

O exemplo mais importante de espaço vetorial simplético é  $\mathbb{R}^{2n}$  equipado com a sua forma simplética canônica

$$\omega_0 = \sum_{k=1}^n dq_k \wedge dp_k \tag{4.1}$$

onde  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  são coordenadas. Seja  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  o produto interno Euclidiano canônico de  $\mathbb{R}^{2n}$ . A forma simplética  $\omega_0$  se escreve como  $\omega_0(\cdot, \cdot) = \langle J_0 \cdot, \cdot \rangle$ , onde  $J_0 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  é a matriz dada em blocos  $n \times n$  por

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Denotamos por  $Sp(2n)$  o grupo das transformações lineares simpléticas de  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ .

**Definição 4.1.3.** *Seja  $(V, \omega)$  um espaço vetorial simplético e  $L \subset W$  um subespaço vetorial. O ortogonal simplético de  $L$  é o conjunto*

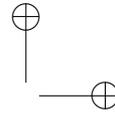
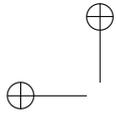
$$L^\perp = \{u \in V \mid \omega(u, v) = 0 \ \forall v \in L\}.$$

É claro que  $L^\perp$  é subespaço vetorial.  $L$  é dito um subespaço

- **isotrópico** se  $L \subset L^\perp$ ,
- **coisotrópico** se  $L^\perp \subset L$ ,
- **Lagrangiano** se for isotrópico e coisotrópico, i.e.,  $L = L^\perp$ ,
- **simplético** se  $\omega$  for não-degenerada em  $L$ , i.e.,  $(L, \omega)$  é espaço vetorial simplético.

**Proposição 4.1.4.** *Na notação da definição acima vale que*

$$\dim L + \dim L^\perp = \dim V.$$



*Demonstração.* Considere o espaço dual  $V'$  de  $V$  e o anulador  $L^0 = \{\theta \in V' \mid L \subset \ker \theta\}$ . A aplicação

$$T : V \rightarrow V' \text{ dada por } T(v) = \omega(v, \cdot) \quad (4.3)$$

é linear e tem núcleo trivial pois  $\omega$  é não-degenerada. Logo  $T$  é isomorfismo. Note que  $L^\perp = T^{-1}(L^0)$  e que  $\dim L + \dim L^0 = \dim V$ . A conclusão segue.  $\square$

**Exercício 4.1.5.** Na notação acima, prove que se  $L$  tem codimensão 1 então  $L$  é coisotrópico, que  $L \oplus L^\perp = V$  se, e somente se,  $L$  é simplético, e que sempre vale  $(L^\perp)^\perp = L$ . Mostre também que se  $L$  é isotrópico então  $2 \dim L \leq \dim V$ .

**Proposição 4.1.6.** Seja  $(V, \omega)$  um espaço vetorial simplético não-trivial. Então existem  $n \geq 1$  e uma base

$$\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$$

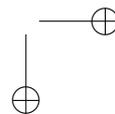
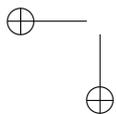
de  $V$  tal que

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0, \quad \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$$

para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Em particular,  $\dim V$  é par.

Uma base com estas propriedades é chamada de uma base simplética de  $(V, \omega)$ .

*Demonstração.* Todo espaço vetorial simplético não-trivial tem dimensão maior ou igual a 2. No caso bidimensional a proposição é trivial. Suponha que  $N = \dim V > 2$  e seja  $e_1 \in V$  um vetor não-nulo. Assumamos, por indução, que as conclusões da proposição são válidas para qualquer espaço vetorial simplético de dimensão  $< N$ . Como  $\omega$  é não-degenerada, existe  $f_1 \in V$  tal que  $\omega(e_1, f_1) = 1$ . Seja  $V_1 \subset V$  o subespaço gerado por  $e_1$  e  $f_1$ . Claramente  $(V_1, \omega)$  é simplético. Logo  $(V_1^\perp, \omega)$  é simplético e  $V_1 \oplus V_1^\perp = V$ . Segue pela hipótese de indução que  $N - 2 = 2n - 2$  para algum  $n \geq 2$ , e que existe uma base simplética  $\{e_2, \dots, e_n, f_2, \dots, f_n\}$  de  $(V_1^\perp, \omega)$ . Logo  $N = 2n$  é par e verifica-se facilmente que  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$  é uma base simplética de  $(V, \omega)$ .  $\square$



**Exercício 4.1.7.** *Mostre que todo espaço vetorial simplético de dimensão  $2n$  é symplectomorfo a  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ . Mostre que  $T \in Sp(2n)$  se e somente se  $T^t J_0 T = J_0$ , onde  $T^t$  denota a transposta de  $T$ .*

**Exercício 4.1.8.** *Denotando por  $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$  o espaço das matrizes reais quadradas de ordem  $2n$ , mostre que  $Sp(2n)$  é subvariedade de  $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$  e calcule sua dimensão.*

**Lema 4.1.9.** *Seja  $V$  um espaço vetorial real de dimensão  $2n$ . Uma forma bilinear alternada  $\omega$  em  $V$  é forma simplética se, e somente se,  $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$  ( $n$  fatores) for forma de volume.*

*Demonstração.* Para cada  $j$  denotemos por  $S(j)$  o grupo das permutações de  $\{1, \dots, j\}$ . Recapitulemos a fórmula do produto exterior: se  $\alpha$  é  $k$ -forma alternada e  $\beta$  é  $\ell$ -forma alternada então

$$\begin{aligned} & \alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+\ell}) \\ &= \sum_{\sigma \in S(k, \ell)} \text{ sinal}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)}) \end{aligned}$$

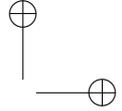
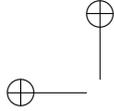
onde  $S(k, \ell)$  denota o subconjunto de  $S(k + \ell)$  das permutações  $\sigma$  satisfazendo  $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$  e  $\sigma(k + 1) < \dots < \sigma(k + \ell)$ .

Provemos agora que se  $\omega$  é degenerada então  $\wedge^n \omega = 0$ . Suponha que  $\exists u_1 \in V \setminus \{0\}$  tal que  $\omega(u_1, v) = 0 \forall v \in V$ , e complete  $u_1$  a uma base  $B = \{u_1, \dots, u_{2n}\}$  de  $V$ . Provemos por indução em  $j$  que para todo subconjunto  $B' = \{w_1, \dots, w_{2j}\} \subset B$  com  $2j$  elementos vale que  $u_1 \in B' \Rightarrow \omega^j(w_1, \dots, w_{2j}) = 0$ . Isto é verdade para  $j = 1$  em vista das propriedades de  $u_1$ . No caso geral temos

$$\begin{aligned} & \omega^j(w_1, \dots, w_{2j}) \\ &= \sum_{\sigma \in S(2, 2j-2)} \text{ sinal}(\sigma) \omega(w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}) \omega^{j-1}(w_{\sigma(3)}, \dots, w_{\sigma(2j)}). \end{aligned}$$

Se  $u_1 \in \{w_1, \dots, w_{2j}\}$  então para cada termo ou  $u_1 \in \{w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}\}$  ou  $u_1 \in \{w_{\sigma(3)}, \dots, w_{\sigma(2j)}\}$ . Nos dois casos o termo correspondente se anula pela hipótese de indução. A conclusão deste argumento é que  $\omega^n(u_1, \dots, u_{2n}) = 0$ , ou seja,  $\omega^n = 0$ .

Se  $\omega$  é forma simplética então pela Proposição 4.1.6 encontramos uma base simplética  $B = \{e_1, f_1, \dots, e_n, f_n\}$ . Das propriedades de  $B$  facilmente se conclui que  $\omega^n(e_1, f_1, \dots, e_n, f_n) = n!$ , logo  $\omega^n \neq 0$ .  $\square$



100

[CAP. 4: VARIEDADES SIMPLÉTICAS E DE CONTATO

**Lema 4.1.10.**  $T \in Sp(2n) \Rightarrow \det T = 1$ .

*Demonstração.*  $T^*(\omega_0^n) = (T^*\omega_0)^n = \omega_0^n$ . □

**Lema 4.1.11.** *Uma matriz simplética  $T \in Sp(2n)$  satisfaz as seguintes propriedades:*

- $T$  e  $T^{-1}$  são conjugadas e, conseqüentemente vale que  $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(T)$ .
- Se  $\lambda, \lambda' \in \sigma(T) \cap \mathbb{R}$ ,  $v \in \ker(T - \lambda I)$ ,  $v' \in \ker(T - \lambda' I)$  e  $\lambda\lambda' \neq 1$  então  $\omega_0(v, v') = 0$ .

Aqui  $\sigma(T)$  denota o espectro de  $T$ .

*Demonstração.* Pela definição de  $Sp(2n)$  as matrizes  $T^t$  e  $T^{-1}$  são conjugadas:  $T^t J_0 T = J_0 \Leftrightarrow T^t = J_0 T^{-1} J_0^{-1}$ . Como  $T^t$  e  $T$  são sempre conjugadas (Por que?) vale que  $T$  e  $T^{-1}$  são conjugadas. Logo  $T$  e  $T^{-1}$  têm o mesmo polinômio característico. Isto prova a primeira afirmação. Se  $\lambda, \lambda', v, v'$  são como na segunda afirmação então

$$\omega_0(v, v') = \omega_0(Tv, Tv') = \omega_0(\lambda v, \lambda' v') = \lambda\lambda' \omega_0(v, v')$$

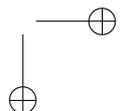
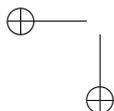
de onde segue que  $\omega_0(v, v') = 0$  pois  $\lambda\lambda' \neq 1$ . □

**Corolário 4.1.12.** *Se  $T \in Sp(2n)$  então as multiplicidades algébricas de 1 e de  $-1$  como (possíveis) auto-valores de  $T$  são pares.*

*Demonstração.* Pelo lema anterior a soma das multiplicidades algébricas dos auto-valores diferentes de  $\pm 1$  é par. Logo se  $-1$  for auto-valor então sua multiplicidade algébrica deve ser par pois  $\det T = 1$ . Logo a soma das multiplicidades algébricas dos auto-valores diferentes de 1 é um número par  $2m$ . Segue que 1 tem multiplicidade algébrica igual a  $2n - 2m$ . □

**Exercício 4.1.13.** *Descreva as classes de conjugação em  $Sp(2)$ .*

**Lema 4.1.14.** *Se  $T \in Sp(2n)$  é simétrica e positiva-definida então  $T^s \in Sp(2n)$  para todo número real  $s > 0$ .*



*Demonstração.* Vale que  $\sigma(T) \subset (0, +\infty)$ . Pelo teorema espectral existe decomposição  $\mathbb{R}^{2n} = \oplus_{\lambda \in \sigma(T)} M_\lambda$ , onde  $M_\lambda$  é o auto-espaço do auto-valor  $\lambda$ . Denote  $\sigma' = \sigma(T) \cap (0, 1]$ , e para cada  $\lambda \in \sigma'$  escreva  $E_\lambda = M_\lambda + M_{\lambda^{-1}}$ . Pelo Lema 4.1.11 vale que se  $\lambda, \mu \in \sigma'$ ,  $\lambda \neq \mu$  então  $E_\lambda \subset E_\mu^\perp$ , e que cada  $E_\lambda$  é subespaço simplético. Obviamente  $\mathbb{R}^{2n} = \oplus_{\lambda \in \sigma'} E_\lambda$  e  $\lambda \in \sigma' \setminus \{1\} \Rightarrow E_\lambda = M_\lambda \oplus M_{\lambda^{-1}}$ . A matriz  $T^s$  é aquela que atua em cada  $M_\lambda$  pela multiplicação por  $\lambda^s$  e, conseqüentemente, cada  $E_\lambda$  é  $T^s$ -invariante. Os fatos descritos até aqui implicam que  $T^s$  é simplética se, e somente se,  $T^s|_{E_\lambda}$  é simplética em  $(E_\lambda, \omega_0|_{E_\lambda \times E_\lambda})$ , para todo  $\lambda \in \sigma'$ . Isto é obviamente verdade se  $\lambda = 1$ . Se  $\lambda \in \sigma' \setminus \{1\}$  então  $M_\lambda$  e  $M_{\lambda^{-1}}$  são subespaços Lagrangianos e  $T^s$ -invariantes de  $E_\lambda$ , em vista do Lema 4.1.11. Tome vetores  $u, v \in E_\lambda$  e escreva  $u = u_0 + u_1$ ,  $v = v_0 + v_1$  com  $u_0, v_0 \in M_\lambda$  e  $u_1, v_1 \in M_{\lambda^{-1}}$ . Então

$$\begin{aligned} \omega_0(T^s u, T^s v) &= \omega_0(T^s u_0, T^s v_1) + \omega_0(T^s u_1, T^s v_0) \\ &= \lambda^s \lambda^{-s} (\omega_0(u_0, v_1) + \omega_0(u_1, v_0)) \\ &= \omega_0(u, v) \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Toda matrix  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  pode ser escrita como  $M = A + iB$ , com  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . A inclusão  $\mathbb{C}^{n \times n} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  dada por

$$A + iB \mapsto \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

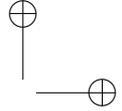
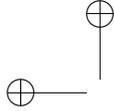
é  $\mathbb{R}$ -linear e respeita multiplicação matricial. Além disso

$$(A + iB)^* \mapsto \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}^t$$

onde  $(A + iB)^*$  denota a transposta conjugada. Deste modo podemos enxergar  $GL(n, \mathbb{C})$  e todos os seus subgrupos como subgrupos de  $GL(2n, \mathbb{R})$ . A matrix  $iI$  é mapeada na matrix  $J_0$  (4.2) via esta identificação. Logo  $GL(n, \mathbb{C}) \simeq \{T \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid TJ_0 = J_0T\}$  e

$$U(n) = \{T \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid TJ_0 = J_0T \text{ e } T^t = T^{-1}\} = O(2n) \cap Sp(2n).$$

Segue que  $U(n) \subset Sp(2n)$  é subgrupo.



102

[CAP. 4: VARIEDADES SIMPLÉTICAS E DE CONTATO

**Lema 4.1.15.**  $U(n)$  é uma retração por deformação de  $Sp(2n)$ .

*Demonstração.* Para toda  $T \in GL(2n, \mathbb{R})$  vale que  $U = (TT^t)^{-1/2}T \in O(2n)$ . De fato,

$$\begin{aligned} ((TT^t)^{-1/2}T)^t (TT^t)^{-1/2}T &= T^t (TT^t)^{-1}T \\ &= T^t (T^t)^{-1}T^{-1}T = I. \end{aligned}$$

Denotando  $P = (TT^t)^{1/2}$  então  $T = PU$  é a decomposição polar de  $T$ . Se  $T \in Sp(2n)$  então  $T^t \in Sp(2n)$ . Pelo Lema 4.1.14 temos  $P, U \in Sp(2n)$ . Em particular  $U \in O(2n) \cap Sp(2n) = U(n)$ . Defina

$$r : [0, 1] \times Sp(2n) \rightarrow Sp(2n) \quad \text{por} \quad r(s, T) = P^{1-s}U. \quad (4.4)$$

O mapa  $r$  é obviamente contínuo (até diferenciável!),  $r(0, \cdot)$  é identidade em  $Sp(2n)$  e  $r(s, \cdot)|_{U(n)}$  é identidade em  $U(n)$ ,  $\forall s \in [0, 1]$ .  $\square$

Como  $U(n)$  é conexo (Por que?) concluímos que

**Corolário 4.1.16.**  $Sp(2n)$  é conexo.

**Exercício 4.1.17.** A aplicação  $r$  definida na demonstração do lema acima é uma retração por deformação de  $GL(n, \mathbb{C})$  sobre  $U(n)$ . Prove isto.

### O grupo fundamental de $Sp(2n)$

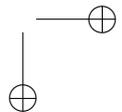
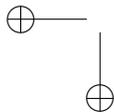
Para entender um pouco melhor a topologia de  $Sp(2n)$ , descreveremos aqui a construção do chamado índice de Maslov no intuito de compreender seu grupo fundamental. No que se segue escreveremos  $\pi_1(Sp(2n))$  ao invés de  $\pi_1(Sp(2n), I)$  por simplicidade.

**Teorema 4.1.18.** Existe uma família de homomorfismos

$$\mu^n : \pi_1(Sp(2n)) \rightarrow \mathbb{Z} \quad (n \geq 1) \quad (4.5)$$

unicamente determinados pelas seguintes propriedades:

- **Isomorfismo:** Cada  $\mu^n$  é isomorfismo de grupos.



- **Multiplicação:** Se  $A, B : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (Sp(2n), I)$  são loops arbitrários então vale que

$$\mu^n(t \mapsto A(t)B(t)) = \mu^n(t \mapsto A(t)) + \mu^n(t \mapsto B(t)).$$

- **Soma direta:** Dados dois loops

$$A : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (Sp(2n), I)$$

$$B : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (Sp(2k), I)$$

vale que

$$\mu^{n+k}(t \mapsto A(t) \oplus B(t)) = \mu^n(t \mapsto A(t)) + \mu^k(t \mapsto B(t))$$

onde identificamos  $\mathbb{R}^{2(n+k)}$  munido de sua forma simplética canônica com a soma direta simplética  $\mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}^{2k}$  e a matriz  $A(t) \oplus B(t)$  é escrita em blocos como

$$A(t) \oplus B(t) = \begin{bmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & B(t) \end{bmatrix}.$$

- **Normalização:**

$$\mu^1 \left( t \mapsto \begin{bmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t \end{bmatrix} \right) = 1.$$

*Demonstração.* Provemos a existência dos isomorfismos  $\{\mu^n\}_{n \geq 1}$ . Começamos por relembrar a retração por deformação  $r$  de  $Sp(2n)$  em  $U(n)$  definida em (4.4). Seja

$$r_1 : Sp(2n) \rightarrow U(n) \quad \text{dada por} \quad r_1(T) = r(1, T) = U$$

onde  $T = PU$  é a decomposição polar de  $T$ .

Se  $A : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (Sp(2n), I)$  é um loop então definimos

$$\mu^n(t \mapsto A(t)) = \text{grau de } t \mapsto \det r_1(A(t)) \quad (4.6)$$

onde  $\det$  denota o determinante complexo de uma matriz de  $U(n)$ . Note que como  $r_1(A(t)) \in U(n)$  então

$$\det r_1(A(t)) \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Logo  $t \mapsto \det r_1(A(t))$  é um mapa  $([0, 1], \{0, 1\}) \mapsto (S^1, \{1\})$  que deve ser interpretado como uma aplicação contínua  $S^1 \rightarrow S^1$ . Como o grau é invariante por homotopias,  $\mu^n$  induz aplicação  $\pi_1(Sp(2n)) \rightarrow \mathbb{Z}$  que é obviamente um homomorfismo. Também são óbvios os axiomas de multiplicação, soma direta e normalização. Resta provar que  $\mu^n$  é isomorfismo.

Procedemos por indução em  $n$  para provar que  $\mu^n$  restrito a  $\pi_1(U(n), I)$  induz isomorfismo  $\pi_1(U(n), I) \simeq \mathbb{Z}$ , notando primeiramente que o caso  $n = 1$  é trivial. Assuma  $n \geq 2$ . Note que  $U(n)$  é fibrado principal sobre  $U(n)/U(n-1) \simeq S^{2n-1}$  com fibra  $U(n-1)$ . Logo temos uma sequência exata

$$\pi_2(S^{2n-1}, \text{pt}) \rightarrow \pi_1(U(n-1), I) \xrightarrow{i_*} \pi_1(U(n), I) \rightarrow \pi_1(S^{2n-1}, \text{pt})$$

onde a aplicação  $i_* : \pi_1(U(n-1), I) \rightarrow \pi_1(U(n), I)$  é induzida pela inclusão óbvia  $i : U(n-1) \rightarrow U(n)$ . Como  $n \geq 2$  os extremos desta sequência se anulam, de onde se conclui que  $i_*$  é isomorfismo. Como  $\mu^n \circ i_* = \mu^{n-1}$  em  $\pi_1(U(n-1), I)$  segue que  $\mu^n : \pi_1(U(n), I) \rightarrow \mathbb{Z}$  é isomorfismo. A demonstração termina notando que  $r_1$  induz isomorfismo  $\pi_1(Sp(2n), I) \simeq \pi_1(U(n), I)$  já que  $r$  é retração por deformação.  $\square$

**Exercício 4.1.19.** *Prove a unicidade dos isomorfismos  $\{\mu^n\}_{n \geq 1}$  satisfazendo os axiomas descritos acima.*

## 4.2 Variedades simpléticas e sistemas Hamiltonianos

Seja  $W$  uma variedade diferenciável.

**Definição 4.2.1.** *Uma forma simplética em  $W$  é uma 2-forma diferencial  $\omega \in \Omega^2(W)$  satisfazendo:*

- $\omega$  é fechada, ou seja,  $d\omega = 0$ .
- $\omega$  é não-degenerada, ou seja, para todo  $x \in W$  temos que

$$\omega|_x(u, v) = 0 \quad \forall v \in T_x W \Rightarrow u = 0.$$

Uma variedade simplética é um par  $(W, \omega)$  formado por uma variedade  $W$  e uma forma simplética  $\omega$  em  $W$ .

Pela Proposição 4.1.6 as componentes conexas de uma variedade simplética  $(W, \omega)$  têm dimensão par. Se  $W$  é  $2n$ -variedade então o Lema 4.1.9 nos diz que a  $2n$ -forma  $\omega^n$  é uma forma de volume em  $W$  e, portanto,  $W$  é orientável.

**Exercício 4.2.2.** *Mostre que se  $(W, \omega)$  é variedade simplética fechada (compacta e sem bordo) então  $[\omega] \neq 0$  em  $H^2(W, \mathbb{R})$ . Prove que se  $k \geq 3$  então  $S^k$  não admite forma simplética.*

O exemplo mais simples de variedade simplética é o próprio  $\mathbb{R}^{2n}$  com coordenadas  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  e sua forma simplética canônica  $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ . Superfícies munidas de uma forma de área também formam uma classe simples de exemplos.

Outro exemplo bastante importante é o fibrado cotangente

$$\tilde{\pi} : T^*X \rightarrow X$$

de uma variedade  $X$  qualquer. Seja  $U \subset X$  um aberto com coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$ . Então temos 1-formas  $dx^i \in \Omega^1(U)$  associadas e, para cada  $q \in U$ , o conjunto  $\{dx^1|_q, \dots, dx^n|_q\}$  é uma base para  $T_q^*X$ . Se  $\xi \in T_q^*X$  então  $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i dx^i|_q$  onde  $\xi_i \in \mathbb{R}$  são unicamente determinados por  $\xi$ . Temos, portanto, coordenadas naturais

$$(x^1, \dots, x^n, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{2n}$$

em  $T^*U$ . Podemos considerar as 1-formas  $\widetilde{dx}^i := \tilde{\pi}^* dx^i \in \Omega^1(T^*U)$  e definir a 1-forma tautológica  $\alpha_{\text{taut}}$  e a forma simplética canônica  $\omega_{\text{can}}$  em  $T^*U$  por

$$\alpha_{\text{taut}} := \sum_{i=1}^n \xi_i \widetilde{dx}^i \quad \omega_{\text{can}} := d\alpha_{\text{taut}} = \sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge \widetilde{dx}^i. \quad (4.7)$$

**Proposição 4.2.3.** *As formas  $\alpha_{\text{taut}}$  e  $\omega_{\text{can}}$  não dependem das coordenadas e, portanto, estão globalmente definidas em  $T^*X$ .*

*Demonstração 1.* Como  $\omega_{\text{can}} = d\alpha_{\text{taut}}$ , basta verificarmos que  $\alpha_{\text{taut}}$  não depende das coordenadas. Seja  $V \subset X$  outro aberto munido de coordenadas  $(y^1, \dots, y^n)$ . Temos então um sistema de coordenadas naturais  $(y^1, \dots, y^n, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$  definidas em  $T^*V$ . Como  $dx^i =$

$\sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$  em  $U \cap V$ , vale também que  $\widetilde{dx}^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \widetilde{dy}^j$  em  $T^*(U \cap V)$ . Se  $\xi \in T^*(U \cap V)$  então

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i dx^i = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j = \sum_{i=1}^n \zeta_j dy^j$$

e, portanto,

$$\zeta_j = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j}.$$

Temos então

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \widetilde{dx}^i = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \widetilde{dy}^j = \sum_{j=1}^n \zeta_j \widetilde{dy}^j$$

como pretendíamos demonstrar.  $\square$

*Demonstração 2.* Definimos  $\alpha \in \Omega^1(T^*X)$  ( $\alpha$  é 1-forma em  $T^*X$  visto como variedade) por

$$\alpha_p \cdot V := p \cdot d\tilde{\pi}_p \cdot V \tag{4.8}$$

onde  $p \in T^*X$  e  $V \in T_p(T^*X)$ . Note que se  $\tilde{\pi}(p) = x \in X$  então  $d\tilde{\pi}_p \cdot V \in T_x X$ , o que justifica o lado direito da equação acima. Sejam  $(x^1, \dots, x^n)$  coordenadas em um aberto  $U \subset X$ . Então, como descrito anteriormente, temos coordenadas  $(x^1, \dots, x^n, \xi_1, \dots, \xi_n)$  em  $T^*X|_U = T^*U$ . Abreviemos  $(x^1, \dots, x^n) = x$  e  $(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi$ . Se  $p \simeq (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$  e  $V \simeq (x, \xi, \delta x, \delta \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ , então  $d\tilde{\pi}_p \cdot V \simeq (x, \delta x)$  e  $\alpha_p \cdot V = \sum_i \xi_i \delta x^i$ . Isto prova que a 1-forma  $\alpha_{\text{taut}}$  definida em  $T^*U$  por (4.7) coincide com  $\alpha$ .  $\square$

O fibrado cotangente  $T^*X$  se torna variedade simplética quando munido da forma simplética canônica  $\omega_{\text{can}} = d\alpha_{\text{taut}}$ .

**Definição 4.2.4.** *Uma aplicação simplética  $\varphi : (W_1, \omega_1) \rightarrow (W_2, \omega_2)$  entre variedades simpléticas é um aplicação diferenciável satisfazendo  $\varphi^* \omega_2 = \omega_1$ . Se  $\varphi$  for um difeomorfismo então diz-se que  $\varphi$  é um simplectomorfismo.*

**Teorema de Darboux**

O Teorema de Darboux a seguir mostra que não existem invariantes locais em geometria simplética, ou seja, todas as variedades simpléticas de mesma dimensão são localmente iguais.

**Teorema 4.2.5** (Darboux). *Seja  $(W, \omega)$  uma variedade simplética de dimensão  $2n$  e seja  $p \in W$ . Considere  $\mathbb{R}^{2n}$  munido da forma simplética canônica  $\omega_0$  (4.1). Então existem vizinhanças  $U \subset W$  de  $p$ ,  $V \subset \mathbb{R}^{2n}$  de  $0 \in \mathbb{R}^{2n}$  e um simplectomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V$  tal que  $\varphi(p) = 0$  e  $\varphi^*\omega_0 = \omega$ .*

*Demonstração.* Considerando uma carta local de  $W$  em torno de  $p$ , podemos assumir que  $W = \mathbb{R}^{2n}$  e  $p = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$ , sem perda de generalidade. Mais ainda, por uma transformação linear  $L$  de  $\mathbb{R}^{2n}$ , podemos também assumir que  $\omega|_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$  onde  $q_1, p_1, \dots$  são coordenadas em  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Desta forma temos duas formas simpléticas  $\omega_0$  e  $\omega$  definidas em uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $0 \in \mathbb{R}^{2n}$  tais que  $(\omega_0 - \omega)|_0 = 0$ . Por uma versão do Lema de Poincaré (veja o Exercício 4.2.7 abaixo) existem  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$  vizinhança de  $0$ , e 1-forma  $\mu$  definida em  $\mathcal{U}_0$ , tais que  $(\omega_0 - \omega)|_{\mathcal{U}_0} = d\mu$  e  $\mu|_0 = 0$ . Seja

$$\Omega_t = (1 - t)\omega + t\omega_0 = \omega + td\mu, t \in [0, 1].$$

Como  $d\mu|_0 = 0$ , podemos diminuir  $\mathcal{U}_0$ , se necessário, de modo que  $\Omega_t$  seja simplética em  $\mathcal{U}_0$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Considere o único campo de vetores tempo-dependente  $X_t, t \in [0, 1]$ , em  $\mathcal{U}_0$ , satisfazendo

$$i_{X_t}\Omega_t = -\mu$$

para todo  $t \in [0, 1]$ . Como  $\Omega_t$  é simplética,  $X_t$  está bem definido e depende suavemente de  $t$ .

Agora note que  $X_t|_0 = 0, \forall t \in [0, 1]$ . Portanto, para  $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0$  suficientemente pequena, podemos integrar  $X_t$  até  $t = 1$  e obter uma isotopia  $\rho_t : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_0, t \in [0, 1]$ , satisfazendo  $\rho_0 = id$  e  $\frac{d\rho_t}{dt} = X_t \circ \rho_t$ . Temos então

$$\frac{d}{dt}\rho_t^*\Omega_t = \rho_t^*\left(\frac{d\Omega_t}{dt} + \mathcal{L}_{X_t}\Omega_t\right) = \rho_t^*d(\mu + i_{X_t}\Omega_t) = 0.$$

Segue que  $\rho_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \rho_1(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{U}_0$  satisfaz  $\rho_1^* \omega_0 = \omega$  e  $\rho_1(0) = 0$ . Tomando  $U := \mathcal{U}_1$ ,  $V := \rho_1(\mathcal{U}_1)$  e  $\varphi = \rho_1$  concluimos a demonstração.  $\square$

**Corolário 4.2.6.** *Sejam  $(W_1, \omega_1)$  e  $(W_2, \omega_2)$  duas variedades simpléticas de dimensão  $2n$ . Dados  $p_1 \in W_1$  e  $p_2 \in W_2$ , existem vizinhanças  $V_1 \subset W_1$  de  $p_1$ ,  $V_2 \subset W_2$  de  $p_2$  e um symplectomorfismo  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  satisfazendo  $\varphi(p_1) = p_2$  e  $\varphi^* \omega_2 = \omega_1$ .*

**Exercício 4.2.7.** *Seja  $\eta$  uma 2-forma fechada definida em uma bola aberta  $B$  centrada na origem  $0 \in \mathbb{R}^k$  satisfazendo  $\eta|_0 = 0$ . Considere a família de aplicações  $\varphi_t : B \rightarrow B$  dada por  $\varphi_t(x) = (1-t)x$  e o campo não-autônomo  $X_t|_x = \frac{x}{t-1}$  definido para  $0 \leq t < 1$ . Mostre que a 1-forma definida por*

$$\lambda = - \int_0^1 \varphi_t^*(i_{X_t} \eta) dt,$$

*é suave em  $B$  e satisfaz  $d\lambda = \eta$ ,  $\lambda|_0 = 0$  (note que o campo  $X_t$  não está definido para  $t = 1$ , mas ainda assim a fórmula integral acima define uma 1-forma suave). Generalize este resultado para formas diferenciais de qualquer grau, trocando  $B$  por qualquer outra variedade contrátil.*

### Sistemas Hamiltonianos

**Definição 4.2.8.** *Um sistema Hamiltoniano é uma tripla  $(W, \omega, H)$  onde  $(W, \omega)$  é uma variedade simplética e  $H : W \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave, chamada de função Hamiltoniana.*

Associado a  $(W, \omega, H)$  está o campo Hamiltoniano  $X_H$ , definido implicitamente pela equação

$$i_{X_H} \omega = -dH. \tag{4.9}$$

Note que, como  $\omega$  é não-degenerada, o campo  $X_H$  satisfazendo (4.9) existe e é único. Consideramos então soluções do sistema Hamiltoniano dado por

$$\dot{x} = X_H(x). \tag{4.10}$$

**Exercício 4.2.9.** Para um sistema Hamiltoniano  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, H)$ , onde  $\omega_0$  é a forma simplética (4.1), prove que o campo Hamiltoniano é

$$X_H = J_0 \nabla H$$

onde  $J_0$  é a matriz (4.2) e  $\nabla H$  é o gradiente

$$\nabla H = (H_{q_1}, \dots, H_{q_n}, H_{p_1}, \dots, H_{p_n}).$$

Mostre que a EDO (4.10) neste caso é uma outra maneira de escrever as equações de Hamilton

$$\dot{q}_j = -H_{p_j}, \quad \dot{p}_j = H_{q_j} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (4.11)$$

A função Hamiltoniana  $H$  é constante ao longo das soluções pois

$$dH(X_H) = -\omega(X_H, X_H) = 0$$

e, portanto, o fluxo Hamiltoniano preserva os níveis  $H^{-1}(c)$ .

**Lema 4.2.10.** Se a hipersuperfície  $M \subset (W, \omega_0)$  é nível regular de duas Hamiltonianas  $G$  e  $H$  definidas perto de  $M$ , então  $X_H, X_G$  não se anulam sobre  $M$  e  $\mathbb{R}X_H = \mathbb{R}X_G$ .

*Demonstração.* Exercício. □

O estudo do fluxo Hamiltoniano restrito a um determinado nível de energia é parte central da Mecânica Clássica. Questões sobre existência de órbitas periódicas e seções globais ao fluxo são de extrema importância e remontam aos trabalhos de H. Poincaré e G. D. Birkhoff.

### 4.3 Equações de Euler-Lagrange

Considere uma  $n$ -variedade  $M$  e uma função suave  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ . A projeção no ponto base será denotada  $\pi : TM \rightarrow M$ . A derivada na fibra é uma aplicação suave que preserva fibras

$$D_2L : TM \rightarrow T^*M \quad \text{dada por} \quad D_2L(v) \cdot w = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(v + tw).$$

Em geral  $D_2L(v)$  depende de maneira não-linear em  $v$ . A segunda derivada na fibra é uma aplicação que preserva fibras

$$D_{22}L : TM \rightarrow T^*M \otimes T^*M$$

dada por

$$D_{22}L(v) \cdot (w_1, w_2) = \left. \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \right|_{s=t=0} L(v + sw_1 + tw_2).$$

Novamente  $D_{22}L$  é tipicamente não-linear nas fibras. Chamaremos uma tal função  $L$  de *Lagrangiana*.

### 4.3.1 Transformada de Legendre

**Definição 4.3.1.** *A transformada de Legendre associada a  $L$  é a aplicação*

$$T_L : TM \rightarrow T^*M \quad \text{dada por} \quad v \mapsto D_2L(v) \in T_{\pi(v)}^*M. \quad (4.12)$$

Em mecânica clássica é crucial invertermos, pelo menos localmente, o mapa  $T_L$ . Isto não é possível em geral.

**Definição 4.3.2.** *Diz-se que um vetor  $v_0 \in TM$  satisfaz a condição de Legendre se  $D_{22}L(v_0)$  for não-degenerada.*

Pelo teorema da função inversa, se  $v_0$  satisfaz a condição de Legendre então existe vizinhança aberta  $\mathcal{U}$  de  $v_0$  em  $TM$  e vizinhança aberta  $\mathcal{V}$  de  $\theta_0 := D_2L(v_0)$  em  $T^*M$  tal que a transformação

$$T_L|_{\mathcal{U}} : v \in \mathcal{U} \mapsto D_2L(v) \in \mathcal{V} \quad (4.13)$$

é um difeomorfismo. De fato, fixe coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  de  $M$  em torno de  $\pi(v_0)$ . Temos coordenadas naturais  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  de  $TM$  em  $v_0$ , e  $(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$  de  $T^*M$  em  $\theta_0$ . A condição de Legendre se reescreve como

$$\det \left[ \partial_{y^i y^j}^2 L \right] \neq 0$$

o que garante que o mapa (4.12) representado em coordenadas por

$$(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, L_{y^1}, \dots, L_{y^n})$$

seja não-singular perto de  $v_0$ . Aqui  $L_{y^i}$  denota a derivada parcial em relação à variável  $y^i$ .

### 4.3.2 O fluxo de Euler-Lagrange

Sejam  $L$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  como acima. É possível definir um campo de vetores especial em  $\mathcal{U}$  associado a  $L$ . Considere a função

$$H : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad H(\theta) = \theta \cdot T_L^{-1}(\theta) - L(T_L^{-1}(\theta)). \quad (4.14)$$

A forma simplética canônica  $\omega_{\text{can}}$  pode ser usada para definirmos o campo Hamiltoniano  $X_H$  em  $\mathcal{V}$  por  $i_{X_H}\omega_{\text{can}} = -dH$ . Finalmente definimos o campo  $S$  em  $\mathcal{U}$  pela fórmula

$$S = (T_L)^*X_H. \quad (4.15)$$

Se a condição de Legendre é satisfeita em todo os pontos de  $TM$  podemos repetir este processo em uma cobertura de  $TM$  por abertos com as mesmas propriedades de  $\mathcal{U}$ , e definir o campo  $S$  intrinsecamente em todo o  $TM$ . Resumindo

**Lema 4.3.3.** *Seja  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  uma Lagrangiana. Se a condição de Legendre é satisfeita em todos os pontos de  $TM$  então temos um campo de vetores  $S$  bem definido em  $TM$ , dado localmente pela fórmula (4.15).*

Em coordenadas naturais

$$H(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n) = p_i y^i - L(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$$

onde  $(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$  são as coordenadas de  $\theta$  e o vetor  $T_L^{-1}(\theta)$  tem coordenadas  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ . As equações de Hamilton nos dão

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial y^j} \right) &= \dot{p}_j = -H_{x^j} = -p_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j} + \frac{\partial L}{\partial x^j} + \frac{\partial L}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \\ &= \left( \frac{\partial L}{\partial y^i} - p_i \right) \frac{\partial y^i}{\partial x^j} + \frac{\partial L}{\partial x^j} = \frac{\partial L}{\partial x^j} \end{aligned} \quad (4.16)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{x}^j &= H_{p_j} = y^j + p_i \frac{\partial y^i}{\partial p_j} - \frac{\partial L}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial p_j} \\ &= y^j + \left( p_i - \frac{\partial L}{\partial y^i} \right) \frac{\partial y^i}{\partial p_j} = y^j. \end{aligned} \quad (4.17)$$

**Observação 4.3.4.** *O campo Hamiltoniano é dado por  $i_{X_H}\omega_{\text{can}} = -dH$ , mas aqui  $\omega_{\text{can}} = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx^i$ . Isto nos dá equações de Hamilton que aparentemente diferem de (4.11) por um sinal. No entanto, note que as variáveis também devem ser trocadas.*

As equações (4.16)-(4.17) formam um sistema conhecido como equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}(L_{y^j}) - L_{x^j} = 0 \quad (4.18)$$

que são equivalentes às equações de Hamilton via a transformada de Legendre. A condição  $\dot{x}^j = y^j$ , obtida por metade das equações de Hamilton, nos permite ver (4.18) como um sistema de segunda ordem para as funções  $x^j$ . Resumindo

**Lema 4.3.5.** *As equações de Euler-Lagrange (4.18) são equivalentes às equações de Hamilton (4.11) via a transformada de Legendre na vizinhança de um ponto satisfazendo a condição de Legendre.*

A condição de Legendre é justamente aquela que nos permite “isolar” os  $\ddot{x}^j = \dot{y}^j$  em (4.18). De fato

$$\frac{d}{dt}(L_{y^i}) - L_{x^i} = 0 \Leftrightarrow L_{y^i y^j} \dot{y}^j + L_{y^i x^j} \dot{x}^j - L_{x^i} = 0$$

de onde segue que, denotando por  $g^{ij}$  a matriz inversa de  $L_{y^i y^j}$  e substituindo  $\dot{x}^k = y^k$ , obtemos

$$\ddot{x}^i + g^{ij}(L_{y^j x^k} y^k - L_{x^j}) = 0. \quad (4.19)$$

Logo em coordenadas locais  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  o campo  $S$  é dado por

$$S = y^i \partial_{x^i} - 2G^i \partial_{y^i} \quad \text{com} \quad G^i = \frac{1}{2} g^{ij}(L_{y^j x^k} y^k - L_{x^j}). \quad (4.20)$$

O fluxo do campo  $S$  será chamado de *fluxo de Euler-Lagrange*. A discussão acima mostra que as trajetórias  $t \mapsto v(t)$  do fluxo de Euler-Lagrange são da forma  $v(t) = \dot{\gamma}(t)$ , para uma curva  $\gamma(t)$  em  $M$  que quando representada em coordenadas  $\gamma(t) \simeq (x^1(t), \dots, x^n(t))$ , os  $x^j(t)$  são soluções das equações de Euler-Lagrange (4.18), ou equivalentemente, de  $\ddot{x}^j + 2G^j(x, \dot{x}) = 0$ .

### 4.3.3 O caso Finsler: $L = \frac{1}{2}F^2$

Os cálculos acima obviamente podem ser feitos para  $L$  definida em um aberto de  $TM$  cujos pontos satisfazem a condição de Legendre. Desta forma, o campo  $S$  somente estaria definido neste aberto. Se  $(M, F)$  é uma  $n$ -variedade Finsler, a Lagrangiana  $L = F^2/2$  é apenas  $C^1$  em  $TM$  e os cálculos acima não podem ser feitos sobre a seção nula. No entanto  $L$  é  $C^\infty$  em  $TM_0$  e a definição de métrica Finsler nos dá automaticamente que todo ponto de  $TM_0$  satisfaz a condição de Legendre.

Dado  $v \in TM_0$ , representemos o produto interno (3.1) por funções  $g_{ij}$  das coordenadas naturais  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ , definidas por  $g_v(\cdot, \cdot) = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$  onde  $v = y^i \partial_{x^i}$ . Neste caso  $L_{y^i y^j} = g_{ij}$ . Como  $L$  é homogênea de grau 2 em  $(y^1, \dots, y^n)$ , suas derivadas parciais  $L_{y^i}$  são homogêneas de grau 1 nestas mesmas variáveis e podemos usar o Teorema de Euler para calcular

$$\begin{aligned} 2G^i &= g^{ij} (L_{y^j x^k} y^k - L_{x^j}) \\ &= g^{ij} \left( L_{y^r y^j x^k} y^r y^k - \frac{1}{2} L_{y^r y^k x^j} y^r y^k \right) \\ &= g^{ij} \left( \frac{1}{2} L_{y^r y^j x^k} y^r y^k + \frac{1}{2} L_{y^j y^k x^r} y^r y^k - \frac{1}{2} L_{y^r y^k x^j} y^r y^k \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{ij} (\partial_{x^k} g_{rj} - \partial_{x^j} g_{kr} + \partial_{x^r} g_{jk}) y^r y^k \end{aligned} \tag{4.21}$$

e provar que as equações  $\ddot{x}^i + 2G^i = 0$  assumem forma que já nos é familiar. Resumindo temos

**Lema 4.3.6.** *No caso em que a Lagrangiana é induzida por uma métrica Finsler como em  $L = F^2/2$  o campo  $S$  coincide com o spray geodésico.*

**Observação 4.3.7.** *No caso Riemanniano obtemos  $2G^i = \Gamma_{rk}^i y^r y^k$  onde os  $\Gamma_{rk}^i$  são os símbolos de Christoffel. As equações do fluxo de Euler-Lagrange ficam  $\ddot{x}^i + \Gamma_{rk}^i \dot{x}^r \dot{x}^k = 0$ . Uma diferença drástica entre os casos Finsleriano e Riemanniano é que em (4.21) os  $g_{ij}$  e suas derivadas dependem também dos  $y^i$ , e não somente dos  $x^i$ .*

**Lema 4.3.8.** *A transformada de Legendre associada a  $L = \frac{1}{2}F^2$ , onde  $F$  é uma métrica Finsler, é dada por*

$$T_L(v) = g_v(v, \cdot) \in T_{\pi(v)}^*M$$

onde  $g_v$  é o produto interno (3.1) em  $T_{\pi(v)}M$  associado ao vetor não-nulo  $v \in TM_0$ .

*Demonstração.* Exercício. □

### 4.3.4 $N$ -corpos celestes

Considere  $N$  partículas  $P_1, \dots, P_N$  que se movem em um certo aberto  $V \subset \mathbb{R}^3$  sem colisão, isto é, parametrizando a posição de cada  $P_i$  pelo tempo  $t$  obtemos uma curva  $t \mapsto x_i(t) = (x_i^1(t), x_i^2(t), x_i^3(t))$ , e assumimos que  $i \neq j \Rightarrow x_i(t) \neq x_j(t)$ .

Suponha que  $P_i$  tenha massa  $m_i$  e que a única força sofridas pelas partículas seja devido a atração gravitacional entre elas. Normalizando as unidades, podemos supor que a força  $F_{ij}$  que sofrida por  $P_j$  devido a sua interação com  $P_i$  é

$$F_{ij} = m_i m_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3} = -\nabla_{x_j} \left( -\frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|} \right)$$

onde  $\nabla_{x_j}$  denota o gradiente em relação às coordenadas de  $x_j$ . Segue que  $F_{ij} = -F_{ji}$ . A força total sofrida por  $P_j$  é

$$F_j = \sum_{i \neq j} F_{ij}.$$

Denotemos coordenadas em  $T\mathbb{R}^{3N} = \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$  por

$$(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N)$$

onde  $x_i, y_i \in \mathbb{R}^3, \forall i$ . Consideremos funções

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{|y_i|^2}{2} \\ U &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} -\frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|} \\ L &= K - U \end{aligned}$$

definidas no aberto  $\mathcal{V} \times \mathbb{R}^{3N} \simeq T\mathcal{V}$ , onde

$$\mathcal{V} = \{(x_1, \dots, x_N) \in V^N \mid i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\} \subset \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}.$$

$K$  e  $U$  quando avaliadas em  $(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N)$  são chamadas de energia cinética total e energia potencial total, respectivamente. As equações de Euler-Lagrange ficam

$$\frac{d}{dt}(\nabla_{y_i} L) - \nabla_{x_i} L = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Substituindo  $\nabla_{y_i} L = m_i \dot{y}_i = m_i \dot{x}_i$  e

$$\begin{aligned} \nabla_{x_i} L &= - \sum_{j < i} \nabla_{x_i} \left( -\frac{m_i m_j}{|x_j - x_i|} \right) - \sum_{j > i} \nabla_{x_i} \left( -\frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|} \right) \\ &= \sum_{j < i} F_{ji} - \sum_{i < j} F_{ij} \\ &= \sum_{j \neq i} F_{ji} = F_i \end{aligned}$$

obtemos as equações de Newton

$$m_i \ddot{x}_i = F_i$$

e a demonstração do seguinte lema.

**Lema 4.3.9.** *O sistema se move de acordo com o fluxo de Euler-Lagrange associado a  $L = K - U$ .*

**Exercício 4.3.10.** *É óbvio da definição de  $L$  que todo ponto de  $T\mathcal{V}$  satisfaz a condição de Legendre. Prove que o Hamiltoniano  $H$  dado por (4.14) é*

$$H = K + U.$$

*Quando avaliado nas trajetórias  $H$  é a energia total do sistema, sendo a soma da energia cinética com a potencial.*

**Exercício 4.3.11.** *Seja  $E \subset \mathbb{R}^3$  um subespaço vetorial. Prove que se um sistema de  $N$  partículas como acima é tal que no instante  $t = 0$  temos  $x_i(0) \in E$ ,  $\dot{x}_i(0) \in E$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$ , então vale que  $x_i(t) \in E$ ,  $\dot{x}_i(t) \in E$ ,  $\forall t$  e  $\forall i = 1, \dots, N$ .*

### 4.3.5 Princípios variacionais

Fixe Lagrangiana  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Dada uma curva  $C^1$   $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  definida em um intervalo  $[a, b]$  escreveremos

$$E(\gamma) = \int_a^b L(\dot{\gamma}(t)) dt.$$

**Definição 4.3.12.** Uma curva  $t \in J \mapsto \gamma(t) \in M$  de classe  $C^1$ , definida em um intervalo  $J \subset \mathbb{R}$ , é dita *extremal para o princípio variacional associado a  $L$*  se para quaisquer dois pontos  $t_0 < t_1$  em  $J$  e toda variação  $h : (s, t) \in (-\epsilon, \epsilon) \times [t_0, t_1] \rightarrow M$  de  $\gamma|_{[t_0, t_1]}$  de classe  $C^1$  mantendo extremos fixos vale que

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} E(h(s, \cdot)) = 0.$$

Note que a derivada acima poderia não existir, e a sua existência faz parte da definição.

**Teorema 4.3.13.** Suponha que  $L$  é  $C^2$  em um aberto  $\mathcal{U} \subset TM$ . Seja  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo e  $\gamma : J \rightarrow \pi(\mathcal{U})$  uma curva de classe  $C^2$  satisfazendo  $\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{U}$ ,  $\forall t \in J$ . São equivalentes:

- $\gamma$  é extremal para o princípio variacional associado a  $L$ .
- Para todo sistema de coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  em  $M$  e todo intervalo  $I \subset J$  tal que  $\gamma(I)$  está contido no domínio deste sistema de coordenadas, valem as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial y^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

para as funções coordenadas  $x^j(t)$  de  $\gamma(t)$  definidas em  $I$ . Aqui  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  denotam as coordenadas naturais em  $TM$  associadas.

*Demonstração.* Seja  $\gamma$  um extremal de classe  $C^2$  do princípio variacional associado a  $L$  e  $I = [t_0, t_1] \subset J$  tal que  $\gamma(I)$  está contido no domínio de um sistema de coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$ . Façamos uma variação  $h : (-\epsilon, \epsilon) \times [t_0, t_1] \rightarrow M$  de  $\gamma|_{[t_0, t_1]}$  de classe  $C^2$  mantendo

$h(s, t_0) = \gamma(t_0)$  e  $h(s, t_1) = \gamma(t_1)$  fixos. Usando as coordenadas o mapa  $h(t)$  tem componentes  $(h^1, \dots, h^n)$ . Sendo assim calculamos

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{ds} E(h(s, \cdot)) \right|_{s=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L_{x^i} h_s^i + L_{y^i} h_{ts}^i dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L_{x^i} h_s^i + L_{y^i} h_{st}^i dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left( L_{x^i} - \frac{d}{dt} (L_{y^i}) \right) h_s^i dt + [L_{y^i} h_s^i]_{t_0}^{t_1}. \end{aligned}$$

O termo de bordo na última linha acima se anula pois  $h_s^i(t_1) = h_s^i(t_0) = 0, \forall i$ . Como  $h_s^i(t)|_{t \in [t_0, t_1]}$  podem ser quaisquer funções de classe  $C^2$  com suporte compacto em  $(t_0, t_1)$ , as equações de Euler-Lagrange devem necessariamente ser satisfeitas. Logo a primeira afirmação do teorema implica na segunda. A recíproca fica a cargo do leitor, os cálculos são os mesmos.  $\square$

O seguinte corolário segue imediatamente da discussão contida nos parágrafos anteriores.

**Corolário 4.3.14.** *Se  $L$  é suave no aberto  $\mathcal{U} \subset TM$ , e todo ponto de  $\mathcal{U}$  satisfaz a condição de Legendre, então são equivalentes:*

- $t \in J \mapsto v(t) \in \mathcal{U}$  é trajetória do fluxo de Euler-Lagrange.
- $t \in J \mapsto v(t) \in \mathcal{U}$  satisfaz  $v(t) = \dot{\gamma}(t)$  para uma curva  $\gamma$  que é extremal para o princípio variacional associado a  $L$ .

### 4.3.6 O caso homogêneo

Seja  $V$  um espaço vetorial real de dimensão finita. Seu dual será denotado por  $V'$ .

**Definição 4.3.15.** *Seja  $\alpha \geq 0$ . Uma função  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  é positivamente homogênea de grau  $\alpha$  se*

$$f(tv) = t^\alpha f(v) \quad \forall t \geq 0, v \in V.$$

**Exercício 4.3.16.** *Mostre que se  $\alpha > 1$  então toda função limitada superiormente em uma vizinhança de 0 e positivamente homogênea de grau  $\alpha$  é diferenciável em 0, e a derivada em 0 se anula.*

**Definição 4.3.17.** *Para cada  $\alpha > 1$  denotamos por  $H_\alpha(V)$  o conjunto das funções  $f : V \rightarrow [0, +\infty)$  que são positivamente homogêneas de grau  $\alpha$ , de classe  $C^\infty$  e positivas em  $V \setminus \{0\}$ , e tais que para cada  $v \in V \setminus \{0\}$  a Hessiana  $D^2f(v) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$D^2f(v)(u, w) = \left. \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \right|_{s=t=0} f(v + su + tw)$$

*é positiva-definida.*

Escreveremos  $H_\alpha$  ao invés de  $H_\alpha(V)$ , por simplicidade. A diferencial de uma função  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  no ponto  $v$  será denotada por  $Df(v) \in V'$ .

**Exercício 4.3.18.** *Seja  $\alpha > 1$ . Prove que toda  $f \in H_\alpha$  é de classe  $C^1$  e a aplicação  $v \mapsto Df(v)$  é positivamente homogênea de grau  $\alpha - 1$ , isto é,  $Df(tv) = t^{\alpha-1}Df(v)$ .*

**Lema 4.3.19.** *Se  $f \in H_\alpha$  então todo  $c > 0$  é valor regular. Para cada  $c > 0$  o conjunto  $E_c = f^{-1}([0, c])$  é convexo com fronteira suave  $\partial E_c = f^{-1}(c)$ .  $E_c$  é estritamente convexo no sentido em que para cada  $v \in \partial E_c$  existe um o único hiperplano suporte  $h_v$  de  $E_c$  que passa por  $v$ . Este hiperplano satisfaz  $h_v \cap E_c = \{v\}$ , e  $h_v - v = T_v \partial E_c$ .*

Um hiperplano suporte de  $E_c$  é um hiperplano  $h \subset V$  que divide  $V$  em dois semi-espacos fechados tais que um deles contem  $E_c$ .

*Demonstração.* Sejam  $v_0, v_1 \in E_c$ . Note que se  $v_0$  e  $v_1$  não são colineares então  $v_t = v_0 + t(v_1 - v_0) \neq 0, \forall t \in [0, 1]$ , e  $(f(v_t))'' = D^2f(v_t)(v_1 - v_0, v_1 - v_0) > 0$ . Logo  $f(v_t) \leq \max\{f(v_0), f(v_1)\} \leq c$ . O caso em que  $v_0 \in \mathbb{R}v_1$  é fácil de tratar. Logo  $E_c$  é convexo. O teorema de Euler nos dá  $Df(v) \cdot v = \alpha f(v)$  de onde se conclui que todo  $c > 0$  é valor regular.

Seja  $v \in \partial E_c$  e considere o hiperplano

$$h_v = \{w \mid Df(v) \cdot w = \alpha c\}.$$

Pelo teorema de Euler  $h_v = v + \ker Df(v)$  é o hiperplano tangente a  $\partial E_c$  em  $v$ . Como  $E_c$  é convexo temos  $f(v + t(w - v)) \leq f(v)$  para todo  $t \in [0, 1]$  e  $w \in E_c$  pois  $f(v) = c$ . Derivando em  $t = 0$  obtemos  $0 \geq Df(v) \cdot w - Df(v) \cdot v = Df(v) \cdot w - \alpha f(v)$ , isto é, todo ponto  $w$  de  $E_c$  pertence a um mesmo semi-espaço determinado por  $h_v$ . Qualquer hiperplano  $h \neq h_v$  que passa por  $v$  terá um vetor da forma  $v + y$ , com  $Df(v) \cdot y < 0$ . Sendo assim, a derivada de  $t \mapsto f(v + ty)$  em  $t = 0$  será negativa. Portanto,  $h$  contém pontos onde  $f < c$  e, conseqüentemente, não pode ser hiperplano suporte. Resta provar que  $h_v \cap E_c = \{v\}$ . Seja  $w \in h_v \cap E_c$  e considere  $g(t) = f(v + t(w - v))$ . Como  $w \in h_v \Leftrightarrow w - v \in \ker Df(v)$  então  $g'(0) = 0$ . Como  $E_c$  é convexo vale que  $g(t) \leq c = g(0) \forall t > 0$ , de onde se conclui que  $g''(0) \leq 0$ . Se  $w \neq v$  então  $g''(0) = D^2 f(v)(w - v, w - v) > 0$ , um absurdo. Logo  $w = v$ .  $\square$

**Corolário 4.3.20.** *A aplicação  $v \mapsto Df(v)$  define um homeomorfismo  $V \rightarrow V'$  e um difeomorfismo  $V \setminus \{0\} \rightarrow V' \setminus \{0\}$ .*

*Demonstração.* Provemos que  $Df$  é injetiva. Sejam  $v_0 \neq v_1$  tais que  $Df(v_0) = Df(v_1)$ . Pelo Exercício 4.3.16, se  $v_0 = 0$  então  $Df(v_1) = Df(v_0) = 0$ . Como  $\alpha f(v_1) = Df(v_1) \cdot v_1$  concluímos que  $f(v_1) = 0 \Rightarrow v_1 = 0$ . Suponha que  $v_0$  e  $v_1$  não se anulam e considere  $c_0 = f(v_0)$ ,  $c_1 = f(v_1)$ . Defina  $\lambda = (c_1/c_0)^{1/\alpha}$  e note que  $v \mapsto \lambda v$  define um difeomorfismo entre  $E_{c_0}$  e  $E_{c_1}$ . Pelo Exercício 4.3.18  $\ker Df(\lambda v_0) = \ker Df(v_1)$ , ou seja, os hiperplanos  $h_{v_1}$  e  $h_{\lambda v_0}$  tangentes de  $E_{c_1}$  são paralelos. Se eles não coincidirem então encontraremos pontos de  $E_{c_1}$  nos interiores dos dois semi-espaços determinados por um destes hiperplanos, contradizendo o Lema 4.3.19. Provamos que  $h_{v_1} = h_{\lambda v_0}$  de onde segue que  $\{\lambda v_0\} = h_{\lambda v_0} \cap E_{c_1} = h_{v_1} \cap E_{c_1} = \{v_1\} \Rightarrow \lambda v_0 = v_1$ . Portanto

$$\begin{aligned} \lambda^{\alpha-1} Df(v_1) &= \lambda^{\alpha-1} Df(v_0) \\ &= Df(\lambda v_0) = Df(v_1) \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow v_0 = v_1. \end{aligned}$$

Para provar a sobrejetividade fixe  $\theta \in V'$  e considere a função

$$v \mapsto g(\theta) = \theta \cdot w - f(w). \tag{4.22}$$

Como  $\alpha > 1$  segue que  $g(\theta) \rightarrow -\infty$  quando  $\theta \rightarrow \infty$ . Logo  $g$  atinge máximo global em um certo vetor  $v$  onde  $0 = Dg(v) = \theta - Df(v)$ . As conclusão segue facilmente a partir daqui.  $\square$

Os argumentos acima nos dizem que associada a  $f \in H_\alpha$  temos uma transformada de Legendre globalmente definida

$$T_f : V \rightarrow V' \quad v \mapsto T_f(v) = Df(v) \quad (4.23)$$

que goza de boas propriedades:  $T_f$  é homeomorfismo e  $T_f|_{V \setminus \{0\}}$  é difeomorfismo.

**Definição 4.3.21.** *A transformada de Fenchel de  $f \in H_\alpha$  é a função*

$$f^* : V' \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad f^*(\theta) = \sup_{w \in V} \{\theta \cdot w - f(w)\}. \quad (4.24)$$

**Exercício 4.3.22.** *Dadas  $f \in H_\alpha$  e  $\|\cdot\|$  uma norma qualquer em  $V$  prove que existe  $C > 0$  tal que  $f(v) \geq C\|v\|^\alpha$ .*

Em vista do exercício acima a função  $f^*$  está bem-definida e o supremo em (4.24) é atingido.

**Lema 4.3.23.** *Seja  $f \in H_\alpha$ . Então*

- $f^* \circ T_f = (\alpha - 1)f$ , onde  $T_f$  é a transformada de Legendre. Em particular, se  $\alpha = 2$  então  $f^* \circ T_f = f$ .
- $f^* \in H_\beta$  onde  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ .

*Demonstração.* Por (4.24), se  $f^*(\theta) = \theta \cdot v - f(v)$  então  $\theta = Df(v) = T_f(v)$  de onde segue que  $\theta \cdot v = \alpha f(v)$  pelo Teorema de Euler, de onde se conclui que  $f^* \circ T_f = (\alpha - 1)f$ . Pelo Exercício 4.3.18, se  $\theta = T_f(v)$  então  $t\theta = T_f(t^{\frac{1}{\alpha-1}}v)$  e

$$\begin{aligned} f^*(t\theta) &= f^*(T_f(t^{\frac{1}{\alpha-1}}v)) = (\alpha - 1)f(t^{\frac{1}{\alpha-1}}v) \\ &= (\alpha - 1)t^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}f(v) = t^\beta f^*(T_f(v)) = t^\beta f^*(\theta). \end{aligned}$$

A partir daqui é trivial verificar que  $f^* \in H_\beta$ . □

**Lema 4.3.24 (Desigualdade de Hölder generalizada).** *Para quaisquer  $\theta \in V'$  e  $v \in V$  vale*

$$\theta \cdot v \leq f(v) + f^*(\theta)$$

*com igualdade se, e somente se,  $\theta = T_f(v)$ .*

**Exercício 4.3.25.** Prove a desigualdade de Hölder acima. Dica: segue imediatamente da definição de  $f^*$ .

**Lema 4.3.26.**  $T_{f^*} = (T_f)^{-1}$  e  $f^{**} = f$ .

*Demonstração.* Identificaremos livremente  $V \simeq V''$ . Fixe  $v \in V$  arbitrariamente. Definindo  $\theta_0 \in V'$  por  $\theta_0 = T_f(v)$  então, pelo Lema 4.3.24, temos

$$f(v) + f^*(\theta_0) = \theta_0 \cdot v \leq f^*(\theta_0) + f^{**}(v) \Rightarrow f(v) \leq f^{**}(v).$$

Defina agora  $\theta_1 \in V'$  por  $v = T_{f^*}(\theta_1)$ . Pelo mesmo motivo temos

$$f^*(\theta_1) + f^{**}(v) = \theta_1 \cdot v \leq f^*(\theta_1) + f(v) \Rightarrow f^{**}(v) \leq f(v).$$

Logo  $f = f^{**}$ . A identidade  $T_{f^*} = (T_f)^{-1}$  segue imediatamente.  $\square$

**Corolário 4.3.27.** A transformada de Fenchel em  $H_\alpha(V)$  estabelece uma bijeção

$$f \in H_\alpha(V) \mapsto f^* \in H_\beta(V')$$

cuja inversa é a transformada de Fenchel em  $H_\beta(V')$ .

**Exercício 4.3.28.** Identifique  $\mathbb{R}^n$  com  $(\mathbb{R}^n)'$ , escolha  $\alpha > 1$  e considere a norma  $L^\alpha$

$$f(v) = \|v\|_\alpha = \left( \sum_{i=1}^n |v^i|^\alpha \right)^{1/\alpha}$$

onde  $v^i$  são as coordenadas de  $v$ . Mostre que  $f^* = \|\cdot\|_\beta$ ,  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ . Deduza a desigualdade de Hölder usual do Lema 4.3.24.

Se  $(M, F)$  é variedade Finsler então definimos uma função

$$F^* : T^*M \rightarrow [0, +\infty) \tag{4.25}$$

aplicando a transformada de Fenchel em cada  $T_pM$  para  $\frac{1}{2}F^2|_{T_pM} \in H_2(T_pM)$ . Mais precisamente,  $F^*$  está definida pela fórmula

$$\left( \frac{1}{2}F^2|_{T_pM} \right)^* = \frac{1}{2}(F^*)^2|_{T_p^*M} \in H_2(T_p^*M). \tag{4.26}$$

O leitor irá provar que  $F^*$  define uma norma de Minkowski em cada  $T_p^*M$ , e que  $F^*$  goza das propriedades análogas às de  $F$ , trocando  $TM$  por  $T^*M$ , o que justifica chamá-la de **co-métrica dual a  $F$** .

## 4.4 Noções em geometria de contato

Do ponto de vista dinâmico, variedades munidas de formas de contato devem ser vistas como níveis de energia que gozam de boas propriedades. Introduziremos os rudimentos da teoria motivados por este ponto de vista, para mais detalhes veja [9, 24].

### 4.4.1 Hipersuperfícies com tipo de contato

**Definição 4.4.1.** Dizemos que um campo de vetores  $Y$  em uma variedade simplética  $(W, \omega)$  é um campo de Liouville se  $\mathcal{L}_Y \omega = \omega$ , onde  $\mathcal{L}_Y \omega$  é a derivada de Lie de  $\omega$  em relação a  $Y$ . O campo  $Y$  é também dito um campo conformemente simplético. Dizemos que uma hipersuperfície  $S \subset W$  tem tipo de contato se existe um campo de Liouville  $Y$ , definido em uma vizinhança de  $S$  em  $W$ , que é transversal a  $S$ .

**Proposição 4.4.2.** Seja  $S$  uma hipersuperfície de contato em uma variedade simplética  $(W, \omega)$  de dimensão  $2n$ . Seja  $Y$  um campo de Liouville definido em uma vizinhança  $U$  de  $S$  em  $W$  que é transversal a  $S$ . Então a 1-forma  $\lambda := i_Y \omega$  satisfaz  $d\lambda = \omega$  em  $U$ , e

$$\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}|_S \text{ é forma de volume em } S.$$

*Demonstração.* Pela fórmula de Cartan, temos

$$\omega = \mathcal{L}_Y \omega = di_Y \omega + i_Y d\omega = d\lambda.$$

Como  $S$  tem codimensão 1, para todo  $x \in S$  existe  $X(x) \in T_x S$  tal que  $\omega_x(X(x), v) = 0 \forall v \in T_x S$ , e  $X(x) \neq 0$ . Segue que  $\lambda_x(X(x)) = \omega_x(Y(x), X(x)) \neq 0$  pois  $\omega$  é não-degenerada. Seja  $H_x \subset T_x S$  definido por  $H_x := \{v \in T_x S : \lambda_x(v) = \omega_x(Y(x), v) = 0\}$ . Então  $H_x$  é hiperplano complementar a  $X(x)$ . Como  $\omega$  é não-degenerada,  $d\lambda|_{H_x} = \omega|_{H_x}$  também é não-degenerada. Seja  $\{e_1, \dots, e_{n-1}, f_1, \dots, f_{n-1}\}$  uma base simplética para  $(H_x, d\lambda|_{H_x})$ . Veja a Proposição 4.1.6 para uma demonstração da existência desta base. Então

$$\begin{aligned} & \lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}(X(x), e_1, \dots, e_{n-1}, f_1, \dots, f_{n-1}) \\ & = \lambda(X(x))(d\lambda)^{n-1}(e_1, \dots, e_{n-1}, f_1, \dots, f_{n-1}) \neq 0 \end{aligned}$$

e, portanto,  $\lambda|_S$  satisfaz as condições desejadas.  $\square$

Um exemplo de campo de Liouville em  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  é o campo radial  $X(z) := \frac{z}{2}$ ,  $z = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ . De fato,  $i_X \omega_0 = \lambda_0$  onde  $\lambda_0$  é a 1-forma canônica em  $\mathbb{R}^{2n}$

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n q_j dp_j - p_j dq_j. \quad (4.27)$$

Usando a fórmula de Cartan, temos

$$\mathcal{L}_X \omega_0 = di_X \omega_0 + i_X d\omega_0 = d\lambda_0 = \omega_0. \quad (4.28)$$

**Definição 4.4.3.** Dizemos que a hipersuperfície regular  $S \subset \mathbb{R}^{2n}$  é estrelada em relação à origem, se toda semi-reta partindo da origem intersecta  $S$  transversalmente em um único ponto.

Decorre desta definição e de (4.28) que todo nível de energia estrelado em relação à origem é de contato. É importante observar que nem todo nível de energia em  $\mathbb{R}^{2n}$  difeomorfo a  $S^{2n-1}$  é de contato.

#### 4.4.2 Formas de contato e o campo de Reeb

A noção de hipersuperfície de contato pode ser dada intrinsecamente da seguinte forma. Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $2n - 1$ .

**Definição 4.4.4.** Dizemos que a 1-forma  $\lambda$  em  $M$  é de contato se

$$\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1} \text{ nunca se anula.} \quad (4.29)$$

Por definição, se  $\lambda$  é forma de contato então  $\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}$  define uma forma de volume em  $M$  e, portanto,  $M$  deve ser orientável.

Associadas à forma de contato  $\lambda$  temos duas estruturas fundamentais: um campo de vetores, chamado de campo de Reeb, e uma distribuição de hiperplanos tangentes, chamada de estrutura de contato. Focaremos agora no campo de Reeb, deixando a definição da estrutura de contato para mais adiante.

**Definição 4.4.5.** O campo de Reeb  $X_\lambda$  associado à forma de contato  $\lambda$  em  $M$  é definido implicitamente por

$$\begin{cases} i_{X_\lambda} d\lambda = 0 \\ i_{X_\lambda} \lambda = 1. \end{cases} \quad (4.30)$$

**Exercício 4.4.6.** *Prove que o campo de Reeb é suave.*

Já vimos que em uma hipersuperfície de contato  $S$  de uma variedade simplética  $(W, \omega)$  sempre existe uma forma de contato  $\lambda = (i_Y \omega)|_S$ , onde  $Y$  é campo de Liouville transversal a  $S$ . A direção do campo de Reeb  $X_\lambda$  associado a  $\lambda$  coincide com a direção do campo Hamiltoniano  $X_H|_S$  associado a qualquer Hamiltoniana  $H : W \rightarrow \mathbb{R}$  que realiza  $S$  como nível regular, pois ambos estão no núcleo de  $\omega|_S$ . As órbitas de ambos os campos são, portanto, as mesmas, módulo uma reparametrização no tempo.

**Exemplo: níveis de energia estrelados**

Seja  $B \subset \mathbb{R}^{2n}$  a região compacta limitada por uma hipersuperfície regular  $S$  estrelada em relação à origem  $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ . Como vimos,  $S$  é de contato em  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ , ou seja,  $\lambda_0|_S$  é uma forma de contato em  $S$ . Aqui a forma  $\omega_0$  é dada em (4.1).

Vamos construir uma função Hamiltoniana adaptada a  $S$ . Para cada  $x \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$ , seja  $h_0(x) \in \mathbb{R}^+$  tal que  $h_0(x)x \in S$ . É imediato que  $h_0(rx) = \frac{1}{r}h_0(x), \forall r > 0$ , e que  $h_0|_S \equiv 1$ . Da Definição 4.4.3 e do teorema da função implícita segue que  $h_0$  é suave em seu domínio  $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$ . Considere agora

$$H(x) := \frac{1}{h_0(x)^2}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$ . Então  $H$  tem as seguintes propriedades

- $H$  pode ser estendida continuamente na origem definindo-se  $H(0) = 0$ .
- $H(x) = 1$  se  $x \in S$ ,  $H(x) < 1$  se  $x \in B \setminus S$  e  $H(x) > 1$  se  $x \in \mathbb{R}^{2n} \setminus B$ .
- $H$  é homogênea de grau 2, ou seja,  $H(rx) = r^2 H(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$  e  $r > 0$ . Decorre dessa igualdade que  $\langle \nabla H(x), x \rangle = 2H(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$ .

**Proposição 4.4.7.** *Considere o campo Hamiltoniano  $X_H$  associado à função  $H$  e  $X_{\lambda_0}$  o campo de Reeb em  $S$  associado à forma de contato  $\lambda_0|_S$ . Então  $X_H(x) = X_{\lambda_0}(x)$  para todo  $x \in S$ .*

*Demonstração.* Como  $d\lambda_0 = \omega_0|_S$  então, para  $v \in T_x S$ , temos

$$d\lambda_0|_x(X_H(x), v) = \omega_0(X_H, v) = -dH|_x \cdot v = 0.$$

Basta agora verificar que  $i_{X_H} \lambda_0 = 1$  em  $S$ . Temos

$$\begin{aligned} \lambda_0|_x \cdot X_H(x) &= \frac{1}{2} \omega_0(x, X_H(x)) = \frac{1}{2} \langle x, -J_0 X_H(x) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle x, -J_0^2 \nabla H(x) \rangle = \frac{1}{2} \langle x, \nabla H(x) \rangle \\ &= \frac{1}{2} 2H(x) = 1 \end{aligned}$$

para todo  $x \in S$ . Aqui a matriz  $J_0$  é a matriz (4.2).  $\square$

Seja  $\psi : S^{2n-1} \rightarrow S$  a aplicação definida por

$$\psi(x) = h_0(x)x \in S \tag{4.31}$$

onde  $h_0$  é a função suave determinada por  $S$  como descrito acima. Considere também uma função Hamiltoniana  $G : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  qualquer tal que  $S = G^{-1}(0)$  é nível de energia regular. Temos

**Proposição 4.4.8.** *O fluxo Hamiltoniano em  $S$  associado a  $G$  é equivalente ao fluxo de Reeb em  $S^{2n-1}$  com a forma de contato  $\lambda = f\lambda_0|_{S^{2n-1}}$ , onde  $f(x) = h_0^2(x)$  para todo  $x \in S^{2n-1}$ .*

*Demonstração.* Considerando  $\psi$  e  $h_0$  conforme definidos acima, temos para  $x \in S^{2n-1}$  e  $v \in T_x S^{2n-1}$

$$\begin{aligned} \psi^* \lambda_0|_x \cdot v &= \lambda_0|_{h_0(x)x} \cdot d\psi_x \cdot v \\ &= \frac{1}{2} \omega_0(h_0(x)x, \langle \nabla h_0(x), v \rangle x + h_0(x)v) \\ &= h_0(x)^2 \frac{1}{2} \omega_0(x, v) = h_0(x)^2 \lambda_0|_x \cdot v. \end{aligned}$$

Segue que  $\psi_*(X_{f\lambda_0|_{S^{2n-1}}}) = X_{\lambda_0|_S} = X_H|_S$ . Aqui  $H$  é a função quadrática definida na Proposição 4.4.7. Note agora que os fluxos Hamiltonianos em  $S$  associados a  $G$  e a  $H$  são equivalentes, pois ambos os campos  $X_G$  e  $X_H$  estão no núcleo de  $\omega_0|_S$  e, portanto, devem ser paralelos. As órbitas são as mesmas após uma reparametrização no tempo.  $\square$

**Exemplo: fibrados unitários**

Seja  $Q$  uma variedade qualquer. Seu fibrado cotangente  $\tilde{\pi} : T^*Q \rightarrow Q$  está canonicamente munido de uma forma simplética  $\omega_{\text{can}} = d\alpha_{\text{taut}}$ . Considere o campo  $\widehat{C}$  em  $T^*Q$  dado por

$$\widehat{C}|_{\theta} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=1} t\theta \in T_{\theta}T^*Q \tag{4.32}$$

e seja  $\rho_t$  seu fluxo, que é obviamente dado por  $\rho_t(\theta) = e^t\theta$ . Então, como  $\alpha_{\text{taut}}|_{\theta} \cdot \zeta = \theta \cdot d\tilde{\pi} \cdot \zeta \forall \zeta \in T_{\theta}T^*Q$  e como  $\tilde{\pi} \circ \rho_t = \tilde{\pi}$ , segue que

$$\begin{aligned} (\rho_t^* \alpha_{\text{taut}})|_{\theta} \cdot \zeta &= \alpha_{\text{taut}}|_{\rho_t(\theta)} \cdot d\rho_t \cdot \zeta \\ &= e^t\theta \cdot d\tilde{\pi} \cdot d\rho_t \cdot \zeta \\ &= e^t\theta \cdot d\tilde{\pi} \cdot \zeta \\ &= e^t \alpha_{\text{taut}}|_{\theta} \cdot \zeta \end{aligned}$$

ou seja,

$$\rho_t^* \alpha_{\text{taut}} = e^t \alpha_{\text{taut}}. \tag{4.33}$$

Derivando (4.33) em  $t = 0$  obtemos

$$\mathcal{L}_{\widehat{C}} \alpha_{\text{taut}} = \alpha_{\text{taut}}.$$

É óbvio que  $i_{\widehat{C}} \alpha_{\text{taut}} = 0$  pois  $\widehat{C} \in \ker d\tilde{\pi}$ . Logo

$$\mathcal{L}_{\widehat{C}} \omega_{\text{can}} = \mathcal{L}_{\widehat{C}} d\alpha_{\text{taut}} = d\mathcal{L}_{\widehat{C}} \alpha_{\text{taut}} = d\alpha_{\text{taut}} = \omega_{\text{can}} \tag{4.34}$$

isto é,  $\widehat{C}$  é campo de Liouville.

Considere agora uma métrica Finsler  $F : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ . Definindo uma Lagrangiana  $L$  por

$$L = \frac{1}{2} F^2$$

então, de acordo com a discussão na seção 4.3, temos uma transformada de Legendre

$$T_L : TQ \rightarrow T^*Q$$

bem definida. Pelo Corolário 4.3.20,  $T_L$  define um homeomorfismo  $TQ \simeq T^*Q$  que preserva fibras e que se restringe a um difeomorfismo  $TQ_0 \simeq T^*Q_0$ , onde  $T^*Q_0$  denota o complementar da seção nula em

$T^*Q$ . O Hamiltoniano  $L^* : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  dado por (4.14) coincide justamente com a transformada de Fenchel (4.24) de  $L$  fibra a fibra. Como explicado no final da seção 4.3.6, isto nos permite definir uma co-métrica Finsler  $F^* : T^*Q \rightarrow [0, +\infty)$  pela fórmula

$$L^* = \frac{1}{2}(F^*)^2. \quad (4.35)$$

Lembremos também que  $T_L(v) = g_v(v, \cdot)$  em vista do Lema 4.3.8.

**Definição 4.4.9.** *O fibrado unitário de  $(Q, F)$  é a hipersuperfície*

$$T^1Q = F^{-1}(1).$$

*O co-fibrado unitário é a hipersuperfície  $(F^*)^{-1}(1)$ .*

**Teorema 4.4.10.** *Vale a identidade*

$$(T_L)^* \alpha_{\text{taut}} = \lambda_H$$

onde  $\lambda_H$  é a forma de Hilbert (3.2). O fibrado unitário  $T^1Q$  é hipersuperfície de contato em  $(TQ, d\lambda_H)$ ,  $\lambda_H|_{T^1Q}$  é forma de contato em  $T^1Q$  e o campo de Reeb associado coincide com o spray geodésico  $S$  de  $F$ .

*Demonstração.* Fixe  $v \in TQ_0$ ,  $\zeta \in T_vTQ$  e calcule

$$\begin{aligned} (T_L)^* \alpha_{\text{taut}}|_v \cdot \zeta &= \alpha_{\text{taut}}|_{T_L(v)} \cdot dT_L \cdot \zeta \\ &= T_L(v) \cdot d\tilde{\pi} \cdot dT_L \cdot \zeta \\ &= T_L(v) \cdot d\pi \cdot \zeta \\ &= g_v(v, d\pi \cdot \zeta) = \lambda_H|_v \cdot \zeta \end{aligned}$$

onde utilizamos o Lema 4.3.8 e também  $\tilde{\pi} \circ T_L = \pi$ , onde os mapas  $\pi : TQ \rightarrow Q$ ,  $\tilde{\pi} : T^*Q \rightarrow Q$  denotam projeções no ponto base. Como  $L$  é positivamente homogênea de grau 2 nas fibras, vale que

$T_L(tv) = D_2L(tv) = tD_2L(t) = tT_L(v)$  se  $t \geq 0$ . Sendo assim

$$\begin{aligned} (T_L)^*\widehat{C}|_v &= (dT_L)^{-1} \cdot \widehat{C} \circ T_L(v) \\ &= (dT_L)^{-1} \cdot \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=1} tT_L(v) \\ &= (dT_L)^{-1} \cdot \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=1} T_L(tv) \\ &= (dT_L)^{-1} \cdot dT_L \cdot i_v^v(v) \\ &= C_v. \end{aligned}$$

onde  $C$  é o campo vertical  $C|_v = i_v^v(v)$  e  $i_v^v$  é o mapa (3.4). Já mostramos acima que  $\widehat{C}$  é campo de Liouville, de onde segue que  $C$  é campo de Liouville em  $(TQ_0, d\lambda_H)$ . Como  $C$  é obviamente transversal a  $T^1Q$  segue que  $T^1Q$  tem tipo de contato e que  $\lambda_H|_{T^1Q}$  é forma de contato em  $T^1Q$ , veja a Proposição 4.4.2.

Seja  $X_{L^*}$  o campo Hamiltoniano de  $L^*$  dado por  $i_{X_{L^*}}\omega_{\text{can}} = -dL^*$ . Então o spray geodésico  $S$  satisfaz

$$S = (T_L)^*X_{L^*}$$

em vista do Lema 4.3.6. Pelo Lema 4.3.23 temos  $L^* \circ T_L = L$ , de onde segue que

$$\begin{aligned} i_S d\lambda_H &= (T_L)^*(i_{X_{L^*}}\omega_{\text{can}}) = (T_L)^*(-dL^*) \\ &= -d(T_L)^*L^* = -d(L^* \circ T_L) = -dL \end{aligned}$$

ou seja,  $S$  é o campo Hamiltoniano de  $L$  em  $(TQ_0, d\lambda_H)$ . Em particular vale que  $\mathbb{R}S = \ker d\lambda_H|_{T^1Q}$ , implicando que  $S$  é paralelo ao campo de Reeb de  $\lambda_H|_{T^1Q}$ . Lembremos que  $d\pi \cdot S|_v = v$ , para todo  $v \in TQ_0$ ; este fato segue, por exemplo, de (4.20). Então calculamos

$$i_S \lambda_H = g_v(v, d\pi \cdot S|_v) = g_v(v, v) = D_2L(v) \cdot v = 2L = F^2(v)$$

e concluímos que  $S$  coincide com o campo de Reeb de  $T^1Q$ .  $\square$

### 4.4.3 Estruturas de contato

Façamos uma definição alternativa de forma de contato que é mais comum na literatura.

**Definição 4.4.11.** *Uma 1-forma  $\lambda$  é dita de contato se  $d\lambda|_x$  é não-degenerada em  $\ker \lambda|_x$ ,  $\forall x$ .*

**Observação 4.4.12.** *Se  $M$  carrega uma 1-forma de contato no sentido da definição acima então  $\dim M$  é ímpar. De fato, fixando  $x \in M$  arbitrariamente, a 1-forma não pode se anular identicamente em uma vizinhança qualquer  $U$  de  $x$  pois, caso contrário, teríamos  $d\lambda|_U = 0$ , o que é impossível já que  $\lambda$  é de contato. Logo existe  $x'$  arbitrariamente próximo de  $x$  tal que  $\lambda|_{x'} \neq 0$ . Se  $\dim T_{x'}M$  é par então  $\dim \ker \lambda|_{x'}$  é ímpar e  $(\ker \lambda|_{x'}, d\lambda|_{x'})$  não pode ser espaço vetorial simplético.*

**Lema 4.4.13.** *As definições 4.4.4 e 4.4.11 de forma de contato são equivalentes.*

*Demonstração.* Seja  $n = \frac{1}{2}(\dim M - 1)$ . Se  $\lambda$  satisfaz a Definição 4.4.4 então, obviamente,  $(d\lambda|_x)^n$  não se anula em  $\ker \lambda|_x$ . Pelo Lema 4.1.9 isto é equivalente a  $d\lambda|_x$  ser não-degenerada em  $\ker \lambda|_x$ . Reciprocamente, suponha que  $\lambda$  satisfaz a Definição 4.4.11. Fixe  $x \in M$  e note que  $\ker d\lambda|_x = \mathbb{R}v$  para algum  $v \in T_xM \setminus \ker \lambda|_x$ . Escolhendo uma base simplética  $\{e_1, f_1, \dots, e_n, f_n\}$  de  $(\ker \lambda|_{x'}, d\lambda|_{x'})$  note que

$$\lambda|_x \wedge (d\lambda|_x)^n(v, e_1, f_2, \dots, e_n, f_n) \neq 0.$$

□

**Definição 4.4.14.** *Uma estrutura de contato em uma variedade  $M$  é uma distribuição  $\xi \subset TM$  de codimensão 1 localmente definida por formas de contato. O par  $(M, \xi)$  é dito uma variedade de contato.*

Na definição acima é conveniente notar que  $\lambda$  é forma de contato se, e somente se,  $f\lambda$  também é, para toda função real suave  $f$  que não se anula no domínio de  $\lambda$ .

Se  $\lambda$  é forma de contato em  $M$  então

$$\xi := \ker \lambda$$

é estrutura de contato e temos um fibrado vetorial simplético  $(\xi, d\lambda)$  sobre  $M$  no seguinte sentido: em cada fibra  $\xi_x \subset T_xM$  a forma bilinear alternada  $d\lambda|_x$  é não-degenerada.

**Definição 4.4.15.** Dizemos que a variedade de contato  $(M, \xi)$  é co-orientável se o fibrado  $TM/\xi \rightarrow M$  é orientável.

**Exercício 4.4.16.** Prove que um fibrado vetorial real de posto 1 é orientável se, e somente se, é trivial.

**Proposição 4.4.17.** A variedade de contato  $(M, \xi)$  é co-orientável se, e só se, existe uma 1-forma  $\lambda$  globalmente definida em  $M$  tal que  $\xi = \ker \lambda$ .

*Demonstração.* Pelo exercício acima se  $TM/\xi$  é orientável então admite uma seção global, que pode ser usada para definir um campo de vetores global  $X$  em  $M$  satisfazendo  $\mathbb{R}X \cap \xi = 0$ . (Por que?) Logo, assumindo co-orientabilidade de  $\xi$ , definimos uma 1-forma  $\lambda$  em  $M$  pelas equações  $i_X \lambda = 1$ ,  $\ker \lambda = \xi$ . Reciprocamente, se existe uma 1-forma global  $\lambda$  tal que  $\xi = \ker \lambda$  então esta induz uma seção global não-nula do fibrado  $\xi^0 \subset T^*M$  formado por covetores que anulam  $\xi$ . Note que  $\xi^0 \simeq (TM/\xi)^*$ , e obtemos a orientabilidade de  $TM/\xi$ .  $\square$

Seja  $(M, \xi)$  uma variedade de contato de dimensão  $2n + 1$ . A condição de contato implica que  $\lambda \wedge (d\lambda)^n \neq 0$  para uma 1-forma local que define  $\xi$ . Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  uma função suave. Então, como já mencionado antes,  $\lambda_f := f\lambda$  também é uma forma de contato local que induz  $\xi$  pois  $\ker \lambda_f = \ker \lambda = \xi$  e  $\lambda_f \wedge (d\lambda_f)^n = f^{n+1} \lambda \wedge (d\lambda)^n \neq 0$ . Se  $n$  é ímpar, então o sinal da forma de volume  $\lambda_f \wedge (d\lambda_f)^n$  não depende de  $f$  e  $\xi$  induz uma orientação natural em  $M$ . Se  $M$  tem uma orientação pré-definida, dizemos então que  $\xi$  é uma estrutura de contato positiva ou negativa conforme esta orientação coincide ou não, respectivamente, com a orientação induzida por  $\xi$ . Segue também que toda variedade de contato  $(M, \xi)$  de dimensão  $2n + 1$ ,  $n$  ímpar, é orientável. Para  $n$  par existem variedades de contato não-orientáveis. Neste caso, porém, a estrutura de contato é orientável naturalmente por  $(d\lambda_f)^n$ , independentemente de  $f$ .

**Definição 4.4.18.** Sejam  $(M_1, \xi_1)$ ,  $(M_2, \xi_2)$  variedades de contato. Dizemos que um difeomorfismo  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  é um contactomorfismo se  $\varphi_* \xi_1 = \xi_2$ .

**Exemplo:**  $(\mathbb{R} \times T^*Q, \xi_{\text{std}})$

Denotando por  $z$  a coordenada  $\mathbb{R}$  de  $\mathbb{R} \times T^*Q$ , considere a 1-forma

$$\alpha_{\text{std}} = dz - \alpha_{\text{taut}}.$$

Como

$$\xi_{\text{std}} := \ker \alpha_{\text{std}}$$

é obviamente transversal a  $\partial_z$ , segue que  $d\alpha_{\text{std}}$  é não-degenerada em  $\xi_{\text{std}}$  pois  $d\alpha_{\text{std}} = \omega_{\text{can}}$  é forma simplética em  $T^*Q$ . Logo  $\alpha_{\text{std}}$  é forma de contato e  $\xi_{\text{std}}$  é estrutura de contato, chamada de a estrutura de contato *standard* em  $\mathbb{R} \times T^*Q$ .

Esta variedade de contato também é conhecida como o espaço de 1-jatos de funções em  $Q$ , já que para todo par  $(z, \theta) \in \mathbb{R} \times T_p^*Q$  encontramos função  $f$  definida em torno de  $p$  tal que  $f(p) = z$  e  $df|_p = \theta$ . O estudo dos contactomorfismos (locais) de  $(\mathbb{R} \times T^*Q, \xi_{\text{std}})$  vem desde os trabalhos de Sophus Lie no século XIX, que buscava trocar variáveis para resolver equações diferenciais de primeira ordem, explorando simetrias destas equações. Veremos alguns poucos detalhes mais adiante.

### Teorema de Darboux para formas de contato

O Teorema de Darboux 4.2.5 para formas simpléticas nos diz que variedades simpléticas de mesma dimensão são localmente simplectomorfas. Veremos que o mesmo tipo de flexibilidade local vale em geometria de contato.

**Teorema 4.4.19** (Darboux – Formas de contato). *Seja  $\lambda$  uma forma de contato em uma variedade  $M$  sem bordo de dimensão  $2n + 1$ . Dado  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$  com coordenadas  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$  tal que nessas coordenadas  $p = (0, \dots, 0)$  e  $\lambda|_U \simeq dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i$ .*

*Demonstração.* Seja  $U_0 \subset M$  uma vizinhança aberta de  $p$  com coordenadas  $x = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$  tal que  $p = (0, \dots, 0)$ . Por uma mudança de coordenadas linear em  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , podemos assumir que  $\ker \lambda|_p = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, i = 1 \dots n\}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} \in \ker d\lambda|_p$  e  $\lambda|_p(\frac{\partial}{\partial z}) = 1$ . Mais ainda, usando a Proposição 4.1.6, podemos também assumir,

por uma nova transformação linear, que  $d\lambda|_p = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ . (Cheque todas estas afirmações!) Seja agora  $\lambda_0$  a 1-forma em  $U_0$  escrita nestas coordenadas como  $dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i$ . Temos então duas formas de contato  $\lambda$  e  $\lambda_0$  em  $U_0$ . Note que  $\lambda$  e  $d\lambda$  coincidem em  $p$ , respectivamente, com  $\lambda_0$  e  $d\lambda_0$ .

Seja  $\lambda_t = (1-t)\lambda_0 + t\lambda$ ,  $t \in [0, 1]$ , a família de 1-formas em  $U_0$  dada pelas combinações convexas de  $\lambda$  e  $\lambda_0$ . Pela observação anterior  $\lambda_t|_p = \lambda|_p = \lambda_0|_p$  e  $d\lambda_t|_p = d\lambda|_p = d\lambda_0|_p$ . Segue que numa vizinhança  $U_1 \subset U_0$  suficientemente pequena de  $p$ ,  $\lambda_t$  é uma forma de contato em  $U_1$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Queremos encontrar uma vizinhança  $U_2 \subset U_1$  suficientemente pequena de  $p$  e uma isotopia  $\rho_t : U_2 \rightarrow U_1$ ,  $t \in [0, 1]$ , tal que  $\rho_0 = id$ ,

$$\rho_t(p) = p \text{ e } \rho_t^* \lambda_t = \lambda_0, \forall t \in [0, 1]. \quad (4.36)$$

Desta forma  $\rho_1$  satisfaz  $\rho_1^* \lambda = \lambda_0$ , e basta tomarmos coordenadas em  $U := \rho_1(U_2)$  dadas por  $\bar{x}_i = x_i \circ \rho_1^{-1}$ ,  $\bar{y}_i = y_i \circ \rho_1^{-1}$  e  $\bar{z} = z \circ \rho_1^{-1}$  para obtermos  $\lambda = d\bar{z} + \sum_i \bar{x}_i d\bar{y}_i$  e concluir a demonstração.

A isotopia será obtida integrando-se um campo de vetores  $X_t$ ,  $t \in [0, 1]$  em  $U_1$ . Derivando (4.36) temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(\rho_t^* \lambda_t) = \rho_t^* \left( \mathcal{L}_{X_t} \lambda_t + \frac{d\lambda_t}{dt} \right) \\ &= \rho_t^* (i_{X_t} d\lambda_t + di_{X_t} \lambda_t + \lambda - \lambda_0). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Basta então encontrarmos  $X_t, t \in [0, 1]$ , satisfazendo

$$i_{X_t} d\lambda_t + di_{X_t} \lambda_t + \lambda - \lambda_0 = 0. \quad (4.38)$$

Decompondo  $X_t$ , temos  $X_t = A_t R_t + B_t$ , onde  $R_t$  é o campo de Reeb de  $\lambda_t$  e  $B_t \in \ker \lambda_t$  para cada  $t \in [0, 1]$ . Denotando por  $f_t = i_{R_t}(\lambda_0 - \lambda)$  e calculando (4.38) em  $R_t$ , obtemos

$$f_t = i_{R_t} dA_t. \quad (4.39)$$

Esta é uma família suave a 1-parâmetro  $t \in [0, 1]$  de equações lineares a derivadas parciais de primeira ordem não-homogêneas para a família de funções  $A_t$ . É sempre possível, através do método das curvas características, encontrar uma família suave de soluções  $A_t, t \in [0, 1]$ ,

em  $U_1$  desde que  $U_1$  seja uma vizinhança suficientemente pequena de  $p$ . Note que podemos também assumir que  $A_t|_p = dA_t|_p = 0$  para todo  $t \in [0, 1]$ ; veja o Exercício 4.4.21 abaixo.

Encontraremos agora a componente  $B_t$  de  $X_t$ . Também por (4.38) temos

$$\lambda - \lambda_0 + dA_t + i_{B_t}d\lambda_t = 0. \quad (4.40)$$

Restringindo (4.40) a  $\ker \lambda_t$ , obtemos finalmente  $B_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , que fica unicamente determinado pois  $d\lambda_t|_{\ker \lambda_t}$  é não-degenerada. Aqui foi usado que  $i_{R_t}(\lambda - \lambda_0 + dA_t) = 0$ .

O campo  $X_t$  assim definido é tal que  $X_t|_p = 0$  para todo  $t \in [0, 1]$  e, portanto, a isotopia  $\rho_t$ , obtida integrando-se  $X_t$ , deixa a  $p$  fixo. Mais ainda, numa vizinhança  $U_2 \subset U_1$  suficientemente pequena,  $\rho_t|_{U_2}$  está definida para todo  $t \in [0, 1]$ , com valores em  $U_1$  e satisfaz  $\rho_1^*\lambda = \lambda_0$  em vista de (4.37). Isso completa a demonstração.  $\square$

**Corolário 4.4.20.** *Sejam  $M_1, M_2$  variedades de mesma dimensão com formas de contato  $\lambda_1, \lambda_2$ , respectivamente. Então para quaisquer dois pontos  $p_i \in M_i$ ,  $i = 1, 2$ , existem vizinhanças  $U_i \subset M_i$  de  $p_i$  e um difeomorfismo  $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$  satisfazendo  $\varphi(p_1) = p_2$ ,  $\varphi^*\lambda_2 = \lambda_1$ .*

**Exercício 4.4.21.** *Considere funções suaves  $b_1, \dots, b_k, f$  definidas em uma vizinhança  $V$  de  $0 \in \mathbb{R}^k$ . Mostre que se  $b_k$  não se anula em  $V \cap \{x_k = 0\}$  então dada qualquer função  $u_0$  definida perto de  $0 \in \mathbb{R}^{k-1}$  existe uma “única” solução  $u(x_1, \dots, x_k)$  de*

$$\sum_{i=1}^k b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = f$$

*satisfazendo  $u(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) = u_0(x_1, \dots, x_{k-1})$ . Defina precisamente o que significa “única” neste caso. Enuncie e prove uma versão paramétrica deste enunciado que foi utilizada na demonstração do Teorema 4.4.19.*

### O teorema da estabilidade de Gray

**Teorema 4.4.22** (Estabilidade de Gray). *Sejam  $M$  uma variedade compacta e sem bordo, e  $\lambda_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , uma família suave de formas de contato em  $M$ . Seja  $\xi_t := \ker \lambda_t$ ,  $t \in [0, 1]$ . Então existe uma isotopia  $\rho : M \times [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $\rho_{t*}\xi_0 = \xi_t$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .*

*Demonstração.* Seja  $\rho_t$  uma isotopia gerada por um campo de vetores  $X_t$ , dependente do tempo, em  $M$ . Isso significa que

$$\frac{d\rho_t}{dt} = X_t \circ \rho_t, \quad \rho_0 = id.$$

Procuramos  $X_t$  de modo que  $\rho_t$  satisfaça

$$\rho_t^* \lambda_t = u_t \lambda_0 \tag{4.41}$$

para  $u_t : M \rightarrow (0, \infty)$ ,  $t \in [0, 1]$ , com  $u_0 \equiv 1$ .

Como  $d\lambda_t|_{\xi_t}$  é não-degenerada, podemos sempre encontrar um único campo de vetores  $X_t \subset \xi_t$  satisfazendo

$$i_{X_t} d\lambda_t|_{\xi_t} = -\frac{d\lambda_t}{dt}|_{\xi_t}. \tag{4.42}$$

Vamos verificar que  $X_t$ , definido desta forma, satisfaz as condições desejadas. Temos então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho_t^* \lambda_t) &= \rho_t^* \left( \mathcal{L}_{X_t} \lambda_t + \frac{d\lambda_t}{dt} \right) \\ &= \rho_t^* \left( i_{X_t} d\lambda_t + di_{X_t} \lambda_t + \frac{d\lambda_t}{dt} \right) \\ &= \rho_t^* \left( i_{X_t} d\lambda_t + \frac{d\lambda_t}{dt} \right) \\ &= \rho_t^* (a_t \lambda_t) \\ &= (a_t \circ \rho_t) \rho_t^* \lambda_t. \end{aligned} \tag{4.43}$$

para alguma família suave de funções  $a_t : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, 1]$ . A penúltima igualdade decorre de (4.42). De (4.43) e  $\rho_0 = id$  segue que

$$\rho_t^* \lambda_t = e^{\int_0^t a_\tau \circ \rho_\tau d\tau} \lambda_0.$$

□

**Exercício 4.4.23.** Prove que o campo  $X_t$  definido em (4.42) e a função  $a_t$  em (4.43) são de fato suaves (incluindo o parâmetro  $t$ ).

### O número de auto-enlaçamento

Seja  $(M, \xi)$  uma 3-variedade de contato co-orientada. O número de auto-enlaçamento<sup>1</sup> é um invariante de nós transversais em  $(M, \xi)$  que depende apenas de sua classe de isotopia transversal. Mais precisamente, um nó  $K \subset M$  é dito transversal a  $\xi$ , ou simplesmente transversal, se  $TM|_K = TK \oplus \xi|_K$ . Dois nós transversais  $K_0, K_1$  são ditos transversalmente isotópicos se existe isotopia  $\{K_t\}_{t \in [0,1]}$  tal que  $K_t$  é transversal  $\forall t$ .

Fixe uma superfície de Seifert  $\Sigma$  para  $K$  em  $M$ , isto é,  $\Sigma$  é uma superfície compacta, conexa, mergulhada  $\Sigma \subset M$  satisfazendo  $K = \partial\Sigma$ . O fibrado  $\xi$  é naturalmente orientado pela co-orientação de  $\xi$ , onde aqui dotamos  $M$  da orientação induzida por  $\xi$ . Como  $\Sigma$  tem o tipo homotópico de um bouquet de círculos,  $\xi|_\Sigma$  pode ser trivializada por um referencial  $\{Z_1, Z_2\}$  orientado. Orientemos  $K$  pela co-orientação de  $\xi$ , orientação esta que orienta  $\Sigma$  pedindo que a identidade  $\partial\Sigma = K$  leve em conta orientações. Parametrizando  $K$  por um difeomorfismo  $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow K$  de forma compatível com sua orientação, e escolhendo qualquer aplicação exponencial  $\exp$  em  $M$ , considere para  $\epsilon > 0$  pequeno a curva  $\gamma_\epsilon : t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto \exp(\epsilon Z_1|_{\gamma(t)}) \in M \setminus K$ .

**Definição 4.4.24.** *O número de auto-enlaçamento de  $K$  em relação a  $\Sigma$  é*

$$sl(K, \Sigma) = \#(\gamma_\epsilon \cap \Sigma) \quad (\text{número de interseção algébrico}).$$

É possível mostrar que  $sl(K, \Sigma)$  depende apenas da co-orientação de  $\xi$ , de  $K$  e de  $\Sigma$ . É óbvio que  $sl(K, \Sigma)$  depende apenas da classe de isotopia transversal de  $K$ . Também vale que  $sl(K, \Sigma)$  independe de  $\Sigma$  se  $c_1(\xi)|_{H_2(M, \mathbb{Z})} = 0$ , neste caso escrevemos  $sl(K)$  por simplicidade.

### EDPs de primeira ordem

Seja  $(M, \xi)$  uma variedade de contato.

**Definição 4.4.25.** *Uma subvariedade  $L \subset M$  satisfazendo  $TL \subset \xi$  será chamada de isotrópica.*

<sup>1</sup>Do inglês *self-linking number*.

**Lema 4.4.26.** *Uma subvariedade isotrópica  $L$  em uma variedade de contato  $(M, \xi)$  de dimensão  $2n + 1$  satisfaz  $\dim L \leq n$ .*

*Demonstração.* Seja  $i : L \rightarrow M$  a inclusão. Como  $i^*\lambda \equiv 0$  em uma vizinhança de um ponto de  $L$  na qual  $\xi = \ker \lambda$  para alguma forma de contato  $\lambda$ , obtemos  $i^*d\lambda = di^*\lambda = 0$ , isto é,  $T_pL$  é subespaço isotrópico no espaço vetorial simplético  $(\xi_p, d\lambda|_p)$ , para todo  $p \in L$  no domínio de  $\lambda$ . Em particular temos  $2 \dim L \leq \dim \xi = 2n$  pelo Exercício 4.1.5.  $\square$

**Definição 4.4.27.** *Uma subvariedade isotrópica  $L \subset (M, \xi)$  satisfazendo  $2 \dim L + 1 = \dim M$  será chamada de Legendriana.*

Seja  $Q$  uma  $n$ -variedade. A diferencial de uma função  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  é uma 1-forma e, como tal, define uma seção do fibrado cotangente  $df : Q \rightarrow T^*Q$ . Tal função também define uma aplicação

$$J_f : Q \rightarrow \mathbb{R} \times T^*Q \text{ por } p \mapsto (f(p), df(p)). \quad (4.44)$$

**Definição 4.4.28.** *Dada uma função*

$$H : \mathbb{R} \times T^*Q \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.45)$$

*definimos uma equação a derivadas parciais de primeira ordem como uma equação do tipo*

$$H \circ J_u = 0 \quad (4.46)$$

onde  $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$  é a incógnita.

Existe uma geometria para estas equações que está por trás dos fundamentos da geometria de contato. Faremos uma rápida descrição destas idéias objetivando suas aplicações à geometria Finsler. Nossa discussão é totalmente baseada em [2, capítulo 2].

**Definição 4.4.29.** *Seja  $K \subset Q$  uma subvariedade de codimensão 1, e seja  $h : K \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. O problema de Cauchy para (4.46) determinado por  $(K, h)$  é o problema de encontrar uma solução  $u$  de (4.46) definida em uma vizinhança de  $K$  satisfazendo  $u|_K = h$ .*

**Observação 4.4.30.** *Considere o mapa  $\beta : \mathbb{R} \times T^*Q|_K \rightarrow \mathbb{R} \times T^*K$  dado por*

$$\beta : (z, \theta) \in \mathbb{R} \times T_x^*Q \mapsto (z, \theta|_{T_x K}) \in \mathbb{R} \times T_x^*K \quad (x \in K).$$

Se  $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$  for solução do problema de Cauchy para (4.46) determinado por  $(K, h)$  então  $L_u := J_u(Q)$  é subvariedade Legendriana que está contida em  $H^{-1}(0)$  e satisfaz  $\beta \circ J_u|_K = J_h$ .

Generalizando esta observação, podemos seguir a discussão feita em [2, capítulo 2] e propor o seguinte problema mais geral. Fixemos  $(M, \xi)$  uma variedade de contato de dimensão  $2n + 1$  com uma subvariedade  $X \subset M$  de codimensão 1.

**Definição 4.4.31.** *Seja  $\Gamma \subset X$  subvariedade isotrópica de dimensão  $n - 1$ . Definimos o problema de Cauchy associado ao par  $(X, \Gamma)$  como o problema de encontrar uma subvariedade Legendriana  $\Lambda$  satisfazendo  $\Gamma \subset \Lambda \subset X$ .*

Para estudar este problema, introduzimos algumas noções básicas.

**Definição 4.4.32.**  *$X$  é dita não-característica se  $\xi_x \neq T_x X, \forall x \in X$ . Neste caso temos bem-definido sobre  $X$  um campo de hiperplanos característicos dados por  $P = \xi \cap TX$ .  $P$  define uma distribuição em  $X$  de codimensão 1. Também temos um campo de direções características dado por  $P^\perp$ , isto é,  $P^\perp$  é o ortogonal  $d\lambda$ -simplético de  $P$  visto como subfibrado de  $\xi|_X$ , definido localmente a partir de qualquer forma de contato (local)  $\lambda$  que define  $\xi$ . É claro que  $P^\perp \subset P$ .*

**Observação 4.4.33.** *Genericamente, uma hipersuperfície  $X$  tem apenas um conjunto discreto de pontos tais que  $T_x X = \xi_x$ , veja [27]. No caso  $n = 1$  não é difícil deduzir isto do fato que genericamente campos de vetores somente possuem singularidades não-degeneradas.*

Assumamos que  $X$  é não característica e fixemos também uma  $(n - 1)$ -variedade isotrópica  $\Gamma \subset X$ .

**Definição 4.4.34.** *Um ponto  $x_0 \in \Gamma$  é dito não-característico se  $P_{x_0}^\perp \cap T_{x_0} \Gamma = 0$ .*

Nosso objetivo passa a ser provar o seguinte enunciado.

**Teorema 4.4.35.** *Seja  $x_0 \in \Gamma$  um ponto não-característico. Então valem as seguintes afirmações:*

- *Existe uma vizinhança de  $x_0$  em  $\Gamma$  que está contida em uma  $n$ -variedade Legendriana  $\Lambda \subset X$ .*

- Para qualquer outra  $\Lambda'$  com as mesmas propriedades de  $\Lambda$  acima encontramos vizinhança  $U$  de  $x_0$  em  $X$  tal que  $\Lambda \cap U = \Lambda' \cap U$ .

Ainda mais, também vale que se todos os pontos de  $\Gamma$  forem não-característicos então existe solução para o problema de Cauchy associado ao par  $(X, \Gamma)$ .

*Demonstração.* Perto de  $x_0$  é possível definir um campo  $V$  em  $X$  sem singularidades que parametriza  $P^\perp$ . Por hipótese  $V$  é transversal a uma vizinhança  $U$  de  $x_0$  em  $\Gamma$ . Considere o fluxo  $\phi_t$  de  $V$ . Possivelmente encolhendo  $U$  e tomando  $\epsilon > 0$  pequeno, vale que

$$\Lambda = \{\phi_t(x) \mid (t, x) \in (-\epsilon, \epsilon) \times U\}$$

é  $n$ -subvariedade de  $X$  contendo  $U$ . Trocando ainda  $U$  por uma vizinhança menor, podemos supor também  $\Lambda \subset \mathcal{U}$ , onde  $\mathcal{U}$  é vizinhança de  $x_0$  em  $M$  na qual existe 1-forma de contato  $\lambda$  satisfazendo  $\xi|_{\mathcal{U}} = \ker \lambda$ .

Considere  $\alpha = \lambda|_{T(X \cap \mathcal{U})}$ . Então  $P = \ker \alpha$  em  $X \cap \mathcal{U}$ . Também vale que  $P \subset \ker i_V d\alpha$  pois  $V \in P^\perp$ . Logo  $\mathcal{L}_V \alpha = i_V d\alpha = g\alpha$  para alguma função real  $g$  em  $X \cap \mathcal{U}$ . Integrando, obtemos

$$\phi_t^* \alpha = e^{\int_0^t \phi_\tau^* g d\tau} \alpha.$$

Segue que  $d\phi_t$  preserva  $P$ . Logo para todo  $(t, x) \in (-\epsilon, \epsilon) \times U$  temos

$$T_{\phi_t(x)} \Lambda = d\phi_t|_x(T_x \Gamma) \oplus V|_{\phi_t(x)} \subset P_{\phi_t(x)} \subset \xi_{\phi_t(x)}$$

e  $\Lambda$  é Legendriana.

Para mostrar a unicidade de  $\Lambda$  no sentido da segunda afirmação acima, considere outra solução  $\Lambda'$  que contem uma vizinhança de  $x_0$  em  $\Gamma$ . Vamos mostrar que  $V$  é necessariamente tangente a  $\Lambda'$ . Assumindo este fato por um momento, a unicidade requerida seguirá da unicidade das trajetórias do campo  $V$ . Prosseguindo com o argumento, assumamos que  $\mathbb{R}V|_y \not\subset T_y \Lambda'$  em algum ponto  $y \in \Lambda'$ . Como  $T_y \Lambda \subset \xi \cap TX = P$  e  $\mathbb{R}V = P^\perp$  segue que  $T_y \Lambda \oplus \mathbb{R}V|_y$  é subespaço Lagrangiano, mas sua dimensão é  $n+1 > n = \frac{1}{2} \dim \xi$ , uma contradição com o Exercício 4.1.5.

Assumindo que todos os pontos de  $\Gamma$  são não-característicos, podemos encontrar soluções  $\Lambda$  como acima em vizinhanças de todos os pontos de  $\Gamma$ . Pela unicidade estas subvariedades definem uma solução do problema de Cauchy perto de  $\Gamma$ .  $\square$

O problema de Cauchy descrito na Definição 4.4.31 e o Teorema 4.4.35 podem parecer, a primeira vista, um tanto abstratos. Consideremos novamente o caso  $(M, \xi) = (\mathbb{R} \times T^*Q, \xi_{\text{std}})$  e a hipersuperfície  $X = H^{-1}(0)$ . Assumamos que 0 é valor regular, de forma que  $X$  é suave. Do ponto de vista de EDPs, não é natural considerar uma  $(n - 1)$ -subvariedade isotrópica em  $X$ , mas consideramos, como na Definição 4.4.29, uma subvariedade  $K \subset Q$  de dimensão  $n - 1$  e uma função suave  $h : K \rightarrow \mathbb{R}$ . Como antes, se  $X$  é não-característica temos direções características  $P^\perp$  definidas pela fórmula  $P = \xi \cap TX$ .

Considere um sistema de coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  em  $Q$  que induz coordenadas naturais  $(z, x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$  em  $\mathbb{R} \times T^*Q$ .

**Lema 4.4.36.** *Suponha que um ponto  $p_0 \in X$  está no domínio destas coordenadas, que  $X$  é não-característica perto de  $p_0$ . Então  $P^\perp$  pode ser parametrizado perto de  $p_0$  pelo campo*

$$V = \left( \sum_{i=1}^n p_i H_{p_i} \right) \partial_z + \sum_{i=1}^n H_{p_i} \partial_{x^i} - (H_{x^i} + H_z p_i) \partial_{p_i}.$$

*Demonstração.* Seja  $W = \delta z \partial_z + \sum_i \delta x^i \partial_{x^i} + \delta p_i \partial_{p_i}$ . A condição  $W \in \xi \cap TX$  se escreve como

$$\delta z = \sum_i p_i \delta x^i, \quad H_z \delta z + \sum_i H_{x^i} \delta x^i + H_{p_i} \delta p_i = 0$$

o que implica em

$$\sum_i (H_z p_i + H_{x^i}) \delta x^i + H_{p_i} \delta p_i = 0. \quad (4.47)$$

Aqui foi usado que  $dz - \alpha_{\text{taut}} = dz - \sum_i p_i dx^i$  nestas coordenadas. Se

$$V = C \partial_z + \sum_i A_i \partial_{x^i} + B_i \partial_{p_i}$$

então a condição  $d(dz - \alpha_{\text{taut}})(V, W) = 0$  se escreve como

$$\sum_i A_i \delta p_i - B_i \delta x^i = 0$$

que é obviamente satisfeita tomando  $A_i = H_{p_i}$  e  $B_i = -(H_z p_i + H_{x^i})$  em vista de (4.47). Mas como  $V \in \xi$  podemos resolver para  $C$  e encontrar  $C = \sum_i p_i H_{p_i}$ , como desejado.  $\square$

**Corolário 4.4.37.** *Se  $H$  não depende da coordenada real então as folhas da direção característica se projetam em  $T^*Q$  como trajetórias do fluxo Hamiltoniano associado a  $H$ .*

Diremos que  $q_0 \in K$  é não-característico para  $K$  se

$$d\Pi \cdot P^\perp \pitchfork T_{q_0}K$$

em todo ponto de  $\Pi^{-1}(q_0) \cap X$ . Aqui  $\Pi : \mathbb{R} \times T^*Q \rightarrow Q$  denota a projeção  $(z, \theta) \in \mathbb{R} \times T_p^*Q \mapsto p \in Q$ .

**Lema 4.4.38.** *Assuma que o ponto  $q_0 \in K$  está no domínio das coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  e que  $x_0 \in X$  satisfaz  $q_0 = \Pi(x_0)$ . São equivalentes:*

- $X$  é não-característica perto de  $x_0$ , e  $q_0$  é não-característico para  $K$  no sentido mencionado acima.
- $\sum_i H_{p_i} \partial_{x^i}$  é transversal a  $K$  em  $q_0$ .

*Demonstração.* A segunda condição é suficiente e necessária para  $q_0$  ser não-característico para  $K$  pois, parametrizando  $P^\perp$  pelo campo  $V$  dado pelo lema anterior temos  $d\Pi \cdot V = \sum_i H_{p_i} \partial_{x^i}$ . Assumamos que  $\sum_i H_{p_i} \partial_{x^i}$  é transversal a  $K$  em  $q_0$ . Então  $X$  é não-característica perto de  $x_0$  pois  $\sum_i H_{p_i} \partial_{p_i} \in \xi$  e

$$dH \cdot \sum_i H_{p_i} \partial_{p_i} = \sum_i |H_{p_i}|^2 \neq 0.$$

Isto prova que a segunda condição implica na primeira. A prova de que a primeira afirmação implica a segunda fica para o leitor.  $\square$

**Lema 4.4.39.** *Seja  $h : K \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Suponha que  $p_0 \in K$  é não-característico para  $K$  e que exista  $(h(p_0), \varphi) \in X$  tal que  $\varphi|_{T_{p_0}K} = dh|_{p_0}$ . Então existe variedade isotrópica  $\Gamma \subset X$  de dimensão  $n - 1$  tal que  $\Pi|_\Gamma$  mapeia  $\Gamma$  difeomorficamente sobre uma vizinhança  $U$  de  $p_0$  em  $K$ , e  $\beta(\Gamma)$  coincide com  $J_h(U) \subset \mathbb{R} \times T^*K$ . Também vale que todo ponto de  $\Gamma$  é não-característico no sentido da Definição 4.4.34.*

*Demonstração.* Podemos encontrar coordenadas  $x = (x^1, \dots, x^n)$  de  $Q$  perto de  $p_0$  onde  $K$  se escreve como  $\{x_n = 0\}$ . Tais coordenadas nos dão coordenadas naturais  $(z, x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$  em  $\mathbb{R} \times T^*Q$ . Como a afirmação a ser provada é de caráter local, podemos trabalhar nestas coordenadas.

Para  $x \in \{x_n = 0\}$  o 1-jato  $(h(x), dh|_x) \in \mathbb{R} \times T^*K$  de  $h$  em  $x$  pode ser incluído em  $\mathbb{R} \times T^*Q$  de infinitas maneiras com coordenadas

$$\begin{aligned} & (z, x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n) \\ & = (h(x'), (x', 0), h_{x^1}(x'), \dots, h_{x^{n-1}}(x'), \rho) \end{aligned}$$

onde aqui escrevemos  $x' = (x^1, \dots, x^{n-1})$ . Aqui  $\rho \in \mathbb{R}$ , e note que  $h$  é função apenas de  $x'$ . Avaliando  $H$  no ponto acima e igualando a zero, podemos considerar a equação

$$H(h(x'), (x', 0), h_{x^1}(x'), \dots, h_{x^{n-1}}(x'), \rho) = 0. \quad (4.48)$$

Primeiramente note que a equação acima tem solução para algum  $\rho$  tomando por  $(x', 0)$  as coordenadas do ponto  $p_0$ . Isto segue de nossas hipóteses, de fato, existe um único valor de  $\rho$  que corresponde ao funcional  $\varphi$  dado no enunciado do lema. Para concluir, note que pelo Lema 4.4.38 temos  $H_{p_n} \neq 0$  neste ponto, e podemos usar o teorema da função implícita para encontrar soluções de (4.48) onde  $\rho$  depende suavemente de  $(x^1, \dots, x^{n-1})$ .  $\square$

**Corolário 4.4.40.** *Sejam  $h$  e  $p_0$  nas mesmas hipóteses do lema anterior. Então existe uma função  $f$  definida em uma vizinhança  $U$  de  $p_0$  em  $Q$  satisfazendo  $f|_{K \cap U} = h|_{K \cap U}$  e que é solução da equação diferencial  $H \circ J_f = 0$ .*

*Demonstração.* Considere a projeção  $\pi_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ . Trabalhando localmente, denotaremos uma vizinhança de  $p_0$  em  $K$  simplesmente por  $K$ . Pelo lema anterior, encontramos subvariedade isotrópica  $\Gamma \subset H^{-1}(0)$  de dimensão  $n - 1$  tal que  $\Pi|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow K$  é um difeomorfismo. Pelo Teorema 4.4.35 encontramos  $n$ -variedade Legendriana  $\Lambda$  satisfazendo  $\Gamma \subset \Lambda \subset H^{-1}(0)$ . Como  $\Lambda$  é obtida de  $\Gamma$  pelo fluxo da direção característica  $P^\perp$ , e como  $d\Pi$  mapeia estas direções em direções transversais a  $K$ , concluímos que  $\Pi|_{\Lambda}$  é difeomorfismo local. Encolhendo  $\Lambda$  podemos supor que  $\Pi|_{\Lambda}$  é difeomorfismo sobre

uma vizinhança de  $p_0$  em  $Q$ . A função  $f$  procurada pode ser dada pela fórmula  $f = \pi_{\mathbb{R}} \circ (\Pi|_{\Lambda})^{-1}$  nesta vizinhança.  $\square$

O caso quase-linear é bem conhecido. Em  $Q$  considere um campo  $Y$  não-autônomo, isto é,  $Y$  é uma aplicação  $Y : \mathbb{R} \times Q \rightarrow TQ$  que satisfaz  $\pi(Y(t, x)) = x \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times Q$ , onde  $\pi : TQ \rightarrow Q$  é a projeção no ponto base. Considere  $b : \mathbb{R} \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  e defina  $H : \mathbb{R} \times T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  por  $H(z, \theta) = \theta \cdot Y(z, x) - b(z, x)$ ,  $\theta \in T_x^*Q$ . Tomando coordenadas locais  $(x^1, \dots, x^n)$  em  $Q$  e abreviando  $x = (x^1, \dots, x^n)$  podemos escrever  $Y(z, x) = \sum_{i=1}^n a_i(z, x) \partial_{x^i}$  e a EDP (4.46) se torna

$$\sum_{i=1}^n a_i(u(x), x) u_{x^i}(x) = b(u(x), x).$$

Sendo assim, se  $K \subset Q$  é hipersuperfície e  $h : K \rightarrow \mathbb{R}$  então um ponto  $p_0 \in K$  é não-característico se, e somente se, o vetor  $\sum_i a_i(h(p_0), p_0) \partial_{x^i}$  for transversal a  $K$  em  $p_0$ . Sob esta condição, recuperamos do Teorema 4.4.35 o teorema bem conhecido de que podemos resolver a EDP quase-linear através do método das características.

Um exemplo é a equação de Burgers. Considere  $\mathbb{R}^2$  com coordenadas  $(x, t)$ , e imagine que a reta real com coordenada  $x$  é repleta de partículas, por exemplo partículas de um fluido. A partícula no ponto  $x$  se move com velocidade  $u(x, t)$  no instante  $t$ . Façamos a hipótese (um tanto irreal!) de que as partículas se movem sem aceleração. Se  $c(t)$  é a trajetória de uma partícula dada, parametrizada pelo tempo, então  $\dot{c}(t) = u(c(t), t)$  e encontramos a equação de Burgers

$$0 = \ddot{c} = uu_x + u_t = 0. \tag{4.49}$$

Note que uma questão delicada é determinar uma solução maximal<sup>2</sup> do problema de Cauchy definido em 4.4.31. Dada a “condição inicial”  $\Gamma \subset X$  então, mesmo assumindo que todos os seus pontos são não-característicos, a solução  $\Lambda$ , que satisfaz  $\Gamma \subset \Lambda \subset X$  e é construída seguindo trajetórias características em  $X$  a partir de  $\Gamma$ , pode encontrar limites para sua definição devido a vários motivos. Um

<sup>2</sup>Não definimos a noção de solução maximal, mas o leitor pode facilmente imaginar como seria esta definição.

deles é que a imagem de  $\Gamma$  pelo fluxo da direção característica pode deixar de ser uma variedade, desenvolvendo auto-interseções. Para o problema de Cauchy definido em 4.4.29 a situação é ainda pior: a solução maximal  $\Lambda$  pode definir funções singulares e multi-valoradas na medida em que a projeção  $\Pi|_{\Lambda}$  pode não ser um mergulho e, embora  $\Lambda$  seja lisa, a “solução” não é mais uma função no sentido usual. Esta discussão nos levará à definição de cáustica, e nos contentaremos em referir o leitor a [3] para uma introdução riquíssima à topologia de contato das cáusticas.

Voltando à equação de Burgers com condição inicial  $u(x, 0) = u_0(x)$ , note que se pontos  $x_0 < x_1$  satisfazem  $u_0(x_0) > u_0(x_1)$  então depois um certo tempo a partícula com posição inicial  $x_0$  alcança a partícula com condição inicial  $x_1$ , e a solução se quebra, isto é, a subvariedade Legendriana em  $\mathbb{R} \times T^*\mathbb{R}^2$  solução do problema de Cauchy generalizado com condição dada pelo levantamento do 1-jato de  $u_0$  deixa de se projetar difeomorficamente sobre o plano.

#### 4.4.4 EDPs e geometria Finsler: cáusticas e pontos mínimos

Seja  $(M, F)$  uma  $n$ -variedade Finsler compacta e sem bordo. Temos a Lagrangiana  $L = \frac{1}{2}F^2$ , e a Hamiltoniana  $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  dada pela transformada de Fenchel de  $L$  fibra a fibra. Como já estudado na seção 4.3.6,  $H$  é positivamente homogênea de grau 2 e estritamente convexa nas fibras de  $T^*M$ , definindo a co-métrica Finsler  $F^*$  pela fórmula

$$H = \frac{1}{2}(F^*)^2. \tag{4.50}$$

A transformada de Legendre associada a  $L$  será denotada por

$$T_L : TM \rightarrow T^*M$$

e pelo Lema 4.3.23 temos  $L = H \circ T_L$ .

#### Pontos mínimos e a equação Eikonal

Seja  $\widehat{H} : \mathbb{R} \times T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\widehat{H}(z, \varphi) = H(\varphi) = \frac{1}{2}F^*(\varphi)^2. \tag{4.51}$$

Usando os métodos da seção anterior vamos estudar a EDP de primeira ordem

$$\widehat{H} \circ J_u = \frac{1}{2}. \quad (4.52)$$

Considere a hipersuperfície

$$X = \widehat{H}^{-1}(1/2) = \mathbb{R} \times (F^*)^{-1}(1)$$

e fixe um ponto  $p \in M$ . Então

$$\Gamma = \{0\} \times \{\varphi \in T_p^*M \mid F^*(\varphi) = 1\}$$

define uma subvariedade isotrópica em  $(\mathbb{R} \times T^*M, \xi_{\text{std}})$  de dimensão  $n - 1$ , onde  $\xi_{\text{std}} = \ker dz - \alpha_{\text{taut}}$  é a estrutura de contato *standard*. Uma solução do problema de Cauchy para  $(X, \Gamma)$  é uma subvariedade Legendriana  $\Lambda$  satisfazendo  $\Gamma \subset \Lambda \subset X$ . De acordo com Teorema 4.4.35 sempre é possível encontrar uma solução localmente, definida perto de um ponto não-característico de  $\Gamma$ .

De acordo com a discussão na seção 4.4.2 temos

$$\alpha_{\text{taut}} = i_{\widehat{C}}\omega_{\text{can}}$$

onde  $\widehat{C}$  é o campo radial vertical em  $T^*M$ . Logo  $\alpha_{\text{taut}}|_{(F^*)^{-1}(1)}$  define forma de contato no co-fibrado unitário  $(F^*)^{-1}(1)$ , e pelo Teorema 4.4.10 sabemos que seu fluxo de Reeb coincide com o fluxo Hamiltoniano de  $H$  pois  $i_{X_H}\alpha_{\text{taut}} = i_S\lambda_H = g_v(v, v) = 1$  para cada  $v \in T^1M = F^{-1}(1)$ . Aqui  $\lambda_H$  é a forma de Hilbert e  $S$  é o *spray* geodésico. Denotaremos a estrutura de contato associada por  $\xi' = \ker \alpha_{\text{taut}}|_{(F^*)^{-1}(1)}$ . Então temos

$$\xi_{\text{std}} = \text{span}\{(0, \widehat{C}), (1, X_H)\} \oplus \xi' \text{ ao longo de } X \quad (4.53)$$

onde  $X_H$  é o campo Hamiltoniano  $i_{X_H}\omega_{\text{can}} = -dH$ . Consequentemente,  $X$  é não-característica pois  $(0, \widehat{C}) \pitchfork X$ , e os hiperplanos característicos são  $P = TX \cap \xi_{\text{std}} = \mathbb{R}(1, X_H) \oplus \xi'$ . Logo as direções características em  $X$  definem a distribuição  $P^\perp = \mathbb{R}(1, X_H)$  já que  $d(dz - \alpha_{\text{taut}}) = -\omega_{\text{can}}$  é não-degenerada em  $\xi'$ . Se  $\Phi_t$  é o fluxo de  $X_H$  então o fluxo  $\widehat{\Phi}_t$  de  $(1, X_H)$  é

$$\widehat{\Phi}_t(z, \varphi) = (z + t, \Phi_t(\varphi)).$$

A prova do Teorema 4.4.35 nos diz que soluções do problema de Cauchy para  $(X, \Gamma)$  são obtidas por subvariedades Legendrianas varridas pela deformação de  $\Gamma$  usando o fluxo  $\widehat{\Phi}_t$ . Nosso objetivo agora passa a ser a descrição de uma solução especial do problema de Cauchy dada em termos da geometria de  $(M, F)$ .

Considere projeções  $\pi_1 : \mathbb{R} \times T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\pi_2 : \mathbb{R} \times T^*M \rightarrow T^*M$ , e projeções no ponto base  $\tilde{\pi} : T^*M \rightarrow M$ ,  $\pi : TM \rightarrow M$ . Denote também

$$\Pi = \tilde{\pi} \circ \pi_2 : \mathbb{R} \times T^*M \rightarrow M.$$

Para cada  $(0, \varphi) \in \Gamma$  temos

$$\Pi(\widehat{\Phi}_t(0, \varphi)) = \exp_p(tv) \quad \forall t \geq 0, \quad \text{onde } v = (T_L)^{-1}(\varphi)$$

pois  $T_L$  preserva fibras, conjugando  $X_H$  e o *spray* geodésico; veja o Teorema 4.4.10. A identidade acima não vale em geral para  $t < 0$  devido a possível falta de reversibilidade.

Considere

$$\Lambda_{\max} = \{\widehat{\Phi}_t(0, \varphi) \mid t \in \mathbb{R}, (0, \varphi) \in \Gamma\}.$$

Não é difícil verificar que  $\Lambda_{\max}$  é subvariedade Legendriana mergulhada, e é a maior solução do problema de Cauchy. Ainda mais

$$(t, (0, \varphi)) \mapsto \widehat{\Phi}_t(0, \varphi)$$

define um difeomorfismo entre  $\mathbb{R} \times \Gamma$  e  $\Lambda_{\max}$ . Este cilindro é bastante estudado na literatura de singularidades e cáusticas, veja por exemplo [3] para uma motivação no caso *flat*. Consideremos a parte positiva  $\Lambda_{\max}^+$  de  $\Lambda_{\max}$

$$\Lambda_{\max}^+ = \{(z, \varphi) \in \Lambda_{\max} \mid z > 0\}.$$

Este conjunto admite um subconjunto especial

$$\Lambda_* = \{(z, \varphi) \in \Lambda_{\max}^+ \mid z = \theta(p, \Pi(\varphi))\}$$

onde  $\theta(x, y)$  é a  $F$ -distância (3.14) entre  $x$  e  $y$ , possivelmente não-simétrica. Denotaremos por  $\partial\Lambda_*$  o bordo (topológico) de  $\Lambda_*$  visto como subconjunto de  $\Lambda_{\max}^+$ .

**Definição 4.4.41.** *O local dos pontos mínimos de  $p$  é*

$$C_p = \Pi(\partial\Lambda_*).$$

Na linguagem da teoria das singularidades, vê-se que  $C_p$  é uma espécie de projeção da frente de onda dada pela Legendriana  $\Lambda_{\max}^+$  exatamente no primeiro momento da criação de choques. Esta afirmação fica mais precisa em vista do seguinte enunciado.

**Lema 4.4.42.** *Denotando por  $\text{int}(\Lambda_*)$  o interior de  $\Lambda_*$  em  $\Lambda_{\max}^+$ , são verdadeiras as afirmações:*

- *A projeção  $\Pi|_{\text{int}(\Lambda_*)}$  define um difeomorfismo entre  $\text{int}(\Lambda_*)$  e um aberto  $U^* = \Pi(\text{int}(\Lambda_*))$ .*
- *Todo ponto  $q \in U^*$  admite única geodésica minimizante ligando  $p$  a  $q$ .*

*Demonstração.* Começemos pela segunda afirmação, e seja  $q \in U^*$  arbitrário. Denotando  $t_* = \theta(p, q)$ , encontramos  $(0, \varphi_1) \in \Gamma$  tal que a geodésica  $\gamma_1(t) := \Pi \circ \widehat{\Phi}_t(0, \varphi_1)$  satisfaz  $\gamma_1(t_*) = q$  e  $\widehat{\Phi}_{t_*}(0, \varphi_1)$  é ponto interior de  $\Lambda_*$  em  $\Lambda_{\max}^+$ . Suponha, por contradição, que exista outra geodésica  $\gamma_0(t)$  com velocidade unitária ligando  $p = \gamma_0(0)$  a  $q = \gamma_0(t_*)$ . Então  $w_0 := \dot{\gamma}_0(0) \neq \dot{\gamma}_1(0) =: w_1 = T_L^{-1}(\varphi_1)$ . Definindo  $\varphi_0 = T_L(w_0)$  temos  $q = \Pi \circ \widehat{\Phi}_{t_*}(0, \varphi_0) = \Pi \circ \widehat{\Phi}_{t_*}(0, \varphi_1)$ . A hipótese de que  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  são distintas implica que  $\dot{\gamma}_0(t_*) \neq \dot{\gamma}_1(t_*)$ . Considere  $\epsilon > 0$  pequeno e  $\sigma$  a geodésica minimizante, parametrizada por comprimento de arco, que liga  $\gamma_0(t_* - \epsilon)$  a  $\gamma_1(t_* + \epsilon)$ . Seja  $d$  o comprimento de  $\sigma$ . Então  $d \leq 2\epsilon$ , e assumamos que  $\sigma$  está definida em  $[t_* - \epsilon, t_* - \epsilon + d]$ . A concatenação de  $\gamma_0|_{[0, t_* - \epsilon]}$  com  $\sigma$  nos dá uma geodésica quebrada  $c : [0, t_* - \epsilon + d] \rightarrow M$  que liga  $p$  a  $\gamma_1(t_* + \epsilon)$ . Suponha, por contradição, que  $\gamma_1|_{[0, t_* + \epsilon]}$  é minimizante entre  $p$  e  $\gamma_1(t_* + \epsilon)$ . Se  $d = 2\epsilon$  então  $c$  realiza a distância mínima entre  $p$  e  $\gamma_1(t_* + \epsilon)$ , e segue da fórmula de primeira variação que  $c$  é suave e coincide com  $\gamma_0|_{[0, t_* + \epsilon]}$ . Logo  $\gamma_0(t_* + \epsilon) = \gamma_1(t_* + \epsilon)$ , mas isto é impossível pois  $\gamma_0(t_*) = \gamma_1(t_*)$ ,  $\dot{\gamma}_0(t_*) \neq \dot{\gamma}_1(t_*)$  e  $\epsilon > 0$  é pequeno. Logo  $d < 2\epsilon$ . Portanto,  $c$  tem comprimento menor do que o de  $\gamma_1|_{[0, t_* + \epsilon]}$ , novamente um absurdo pois esta última foi assumida minimizante. Fica provado que existe  $\epsilon > 0$  arbitrariamente pequeno tal que  $\gamma_1|_{[0, t_* + \epsilon]}$

não é minimizante. Em outras palavras, existem  $t_n \rightarrow t_*^+$  tais que  $\widehat{\Phi}_{t_n}(0, \varphi_1) \notin \Lambda_*$ , o que implica em  $\widehat{\Phi}_{t_*}(0, \varphi_1) \notin \text{int}(\Lambda_*)$ , contradição.

Provemos a primeira afirmação. A injetividade de  $\Pi|_{\text{int}(\Lambda_*)}$  segue da segunda afirmação. Para mostrar que ela é livre de pontos críticos, note que um valor crítico é o mesmo que um ponto  $q$  conjugado a  $p$  ao longo da geodésica minimizante  $\gamma : [0, \theta(p, q)] \rightarrow M$  que os conecta, com  $T_L(\dot{\gamma}(0)) = \varphi$  e  $\widehat{\Phi}_{\theta(p, q)}(0, \varphi) \in \text{int}(\Lambda_*)$ . Pelo lema do índice, veja a Observação 3.8.16, sabemos que se  $\tau > \theta(p, q)$  então  $\gamma|_{[0, \tau]}$  não é minimizante, e logo  $\widehat{\Phi}_\tau(0, \varphi) \notin \Lambda_*$  em vista da definição de  $\Lambda_*$  já que  $\pi_1 \circ \widehat{\Phi}_\tau(0, \varphi) = \tau > \theta(p, \gamma(\tau))$ . Tomando  $\tau_n \rightarrow \theta(p, q)^+$  concluímos que  $\widehat{\Phi}_{\theta(p, q)}(0, \varphi) \notin \text{int}(\Lambda_*)$ , absurdo. Provamos que  $\Pi|_{\text{int}(\Lambda_*)}$  não tem valores críticos e, conseqüentemente,  $U^*$  é aberto.  $\square$

Temos ainda uma outra caracterização geométrica de  $C_p$ , que é mais comumente encontrada nos livros de geometria.

**Lema 4.4.43.**  $C_p$  é o conjunto dos pontos  $q \in M$  que podem ser escritos como  $q = \exp_p(t_0 w)$  para  $w \in T_p M \cap F^{-1}(1)$  e  $t_0 > 0$  satisfazendo

$$\theta(p, q) = t_0, \quad \theta(p, \exp_p(tw)) < t, \quad \forall t > t_0.$$

*Demonstração.* Considere o conjunto  $C'_p$  definido pelas propriedades descritas no enunciado do lema. Buscamos provar que  $C'_p = C_p$ .

**Passo 1:**  $C'_p \subset C_p$ .

Seja  $q \in C'_p$ . Então  $q = \Pi(\widehat{\Phi}_{t_0}(0, \varphi)) = \exp_p(t_0 w)$  para  $t_0 > 0$  e  $w = T_L^{-1}(\varphi) \in F^{-1}(1) \cap T_p M$ . Como

$$t > t_0 \Rightarrow \theta(p, \Pi(\widehat{\Phi}_t(0, \varphi))) < t$$

vale que  $\widehat{\Phi}_t(0, \varphi) \notin \Lambda_*$  já que  $\widehat{\Phi}_t(0, \varphi) = (t, \Phi_t(\varphi))$ . É óbvio que  $\widehat{\Phi}_t(0, \varphi) \in \Lambda_*$  se  $t < t_0$ , de fato, isto é consequência direta da fórmula de primeira variação do comprimento. Tomando o limite  $t \rightarrow t_0^+$  conclui-se que  $q \in C_p$ .

**Passo 2:**  $C_p \subset C'_p$ .

Seja agora  $q \in C_p$ . Então podemos escrever  $q = \Pi \circ \widehat{\Phi}_t(0, \varphi)$  com  $\widehat{\Phi}_t(0, \varphi) \in \partial\Lambda_*$  e  $t > 0$ . Logo  $t = \theta(p, q)$  pela definição de  $\Lambda_*$ . Se  $q$  é conjugado a  $p$  ao longo da geodésica  $\gamma(\tau) = \Pi \circ \widehat{\Phi}_\tau(0, \varphi)$  em  $\tau = t$  então, pelo teorema do índice para métricas Finsler, veja Observação 3.8.16,  $\theta(p, \gamma(\tau)) < \tau$  para todo  $\tau > t$ , e  $q \in C'_p$  como desejado, pois para  $\tau > t$  vemos um ponto conjugado que implica que o auto-espaço negativo da Hessiana da energia é não-trivial.

Supondo que  $q$  não é conjugado a  $p$  ao longo de  $\gamma|_{[0,t]}$ , afirmamos que existem pelo menos duas geodésicas minimizantes distintas ligando  $p$  a  $q$ , sendo  $\gamma|_{[0,t]}$  uma delas. Provemos esta afirmação. Usando a definição de  $C_p$  encontramos  $q_n$  e  $(t_n, (0, \varphi_n)) \in \mathbb{R} \times \Gamma$  satisfazendo

$$\begin{aligned} q_n &= \Pi \circ \widehat{\Phi}_{t_n}(0, \varphi_n) \rightarrow q, \\ t_n &\rightarrow t = \theta(p, q), \\ \varphi_n &\rightarrow \varphi, \\ t_n &> \theta(p, q_n). \end{aligned}$$

Se  $w = T_L^{-1}(\varphi)$  e  $w_n = T_L^{-1}(\varphi_n)$  então  $q_n = \exp_p(t_n w_n)$  e  $q = \exp_p(tw)$ . Também podemos encontrar  $t'_n > 0$ ,  $w'_n \in T_p M \cap F^{-1}(1)$  tais que  $q_n = \exp_p(t'_n w'_n)$  e  $t'_n = \theta(p, q_n) < t_n$ . Como  $\theta(p, \cdot)$  é contínua vale  $t'_n \rightarrow t$ . Módulo subsequências, podemos assumir que  $w'_n \rightarrow w_*$ . Se  $w_* = w$  então  $t'_n w'_n \rightarrow tw = \lim_n t_n w_n$  e, como  $\exp_p$  é difeomorfismo perto de  $tw$ , concluímos que  $t'_n w'_n = t_n w_n$  se  $n \gg 1$ , o que implica em  $\theta(p, q_n) = t_n$  para  $n$  grande, uma contradição. Logo  $w_* \neq w$  e encontramos geodésica minimizante  $\tau \mapsto \exp_p(\tau w_*)$  que liga  $p$  a  $q$  diferente de  $\gamma|_{[0,t]}$ .

Argumentando como na prova do lema anterior conclui-se que  $\gamma|_{[0,t+\epsilon]}$  não é minimizante,  $\forall \epsilon > 0$ . Logo  $q \in C'_p$ , como desejado.  $\square$

O conjunto  $U = U^* \cup \{p\}$  é vizinhança aberta de  $p$  e podemos definir uma função  $S : U \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$S = \pi_1 \circ (\Pi|_{\text{int}(\Lambda_*)})^{-1} \text{ em } U^*, \quad S(p) = 0. \quad (4.54)$$

Segue imediatamente da definição de  $\Lambda_*$  que

$$S(q) = \theta(p, q). \quad (4.55)$$

Como consequência do próximo lema temos

$$(\Pi|_{\text{int}(\Lambda_*)})^{-1} = J_S \text{ em } U^*. \quad (4.56)$$

**Lema 4.4.44.** *Seja  $Z \subset (\mathbb{R} \times T^*M, \xi_{\text{std}})$  uma subvariedade Legendriana tal que  $\Pi|_Z$  define um difeomorfismo entre  $Z$  e o aberto  $V = \Pi(Z)$ . Então definindo  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$  por  $u = \pi_1 \circ (\Pi|_Z)^{-1}$ , vale que  $(\Pi|_Z)^{-1} = J_u$ .*

*Demonstração.* Definindo  $u$  como no enunciado do lema, e fixando  $p \in V$ , vale que  $(\Pi|_Z)^{-1}(p) = (u(p), \theta)$  onde  $\theta = \pi_2 \circ (\Pi|_Z)^{-1}(p)$ . Dado  $v \in T_p M$  arbitrário temos  $d(\pi_2 \circ (\Pi|_Z)^{-1})|_p \cdot v = \zeta \in T_\theta T^*M$  satisfazendo  $d\tilde{\pi}|_\theta \cdot \zeta = v$ . Concluimos que

$$\begin{aligned} 0 &= (dz - \alpha_{\text{taut}}) \cdot (du|_p \cdot v, \zeta) \\ &= du_p \cdot v - \alpha_{\text{taut}}|_\theta \cdot \zeta \\ &= du_p \cdot v - \theta \cdot v. \end{aligned}$$

Como  $v$  foi arbitrário vale que  $du|_p = \theta$ . □

Logo a conclusão é que  $S$  é solução da EDP  $\widehat{H} \circ J_S = 1/2$ . Como  $\widehat{H} = H \circ \pi_2$  não depende da coordenada real, fica provado o

**Lema 4.4.45.** *A função  $S$  é solução da equação Eikonal<sup>3</sup>*

$$F^* \circ dS = 1 \quad (4.57)$$

em  $U^*$ .

**Observação 4.4.46.** *Sejam  $(x^1, \dots, x^n)$  coordenadas locais de  $M$ . Com respeito às coordenadas naturais  $(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$  de  $T^*M$  associadas, a equação Eikonal se escreve na forma mais familiar*

$$g^{ij} S_{x^i} S_{x^j} = 1$$

onde  $g^{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (F^*)^2}{\partial p_i \partial p_j}$ .

---

<sup>3</sup>A equação Eikonal deve ser vista como uma equação de Hamilton-Jacobi tempo-independente. A mesma análise desta seção vale para Lagrangianas mais gerais, satisfazendo certas condições. Neste caso a função  $S$  encontrada será a “ação mínima”. Repare que no nosso caso particular encontramos  $S$  sendo a “distância mínima”.

**Lema de Gauss**

**Lema 4.4.47** (de Gauss). *Se  $q \in U^*$  e  $\gamma : [0, \theta(p, q)] \rightarrow M$  é a geodésica minimizante<sup>4</sup> ligando  $p$  a  $q$ , parametrizada por comprimento de arco, então*

$$d(\theta(p, \cdot))|_q = T_L(v) = g_v(v, \cdot)$$

onde  $v = \dot{\gamma}(\theta(p, q)) \in F^{-1}(1)$ .

*Demonstração.* Sabemos que

$$(\Pi|_{\text{int}(\Lambda_*)})^{-1}(q) = \widehat{\Phi}_{S(q)}(0, \varphi) = (S(q), \Phi_{S(q)}(\varphi))$$

onde  $\varphi = T_L(\dot{\gamma}(0))$  e  $\Phi$  é o fluxo Hamiltoniano de  $\frac{1}{2}(F^*)^2$ . Aqui usamos (4.55). Se definirmos  $v$  por  $v = \dot{\gamma}(\theta(p, q))$  então uma combinação da fórmula (4.56) e do Teorema 4.4.10 nos dirá que  $(\theta(p, q), T_L(v)) = (S(q), \Phi_{S(q)}(\varphi)) = J_S(q) = (S(q), dS|_q)$ .  $\square$

Por razões óbvias se define o raio de injetividade de  $(M, F)$  em  $p$  por

$$\text{inj}_p = \inf\{\theta(p, q) \mid q \in C_p\}. \tag{4.58}$$

Segue das propriedades de  $C_p$  que  $\exp_p$  é difeomorfismo de classe  $C^1$  quando restrito a  $\{v \in T_pM \mid F(v) < \text{inj}_p\}$ .

Estudamos no capítulo 3 que quanto maior a curvatura menor a distância de  $p$  até o primeiro ponto conjugado a  $p$  e, conseqüentemente, menor  $\text{inj}_p$  e o tamanho do aberto  $U^*$  definido acima. Estas relações são clássicas em geometria Finsleriana e usualmente referidas como teoria de Sturm. A discussão desta seção mostra que deve haver uma teoria de Sturm também para cáusticas, estabelecendo relações entre a geometria de uma subvariedade Legendriana em  $\mathbb{R} \times T^*M$  e os valores críticos de sua projeção sobre  $M$ . Para mais detalhes sobre esta rica teoria veja [3] e as referências ali contidas.

**Ótica geométrica**

Seja  $M$  uma  $n$ -variedade. Imaginando que  $M$  é um meio onde a luz se propaga, podemos codificar as características da propagação da luz

<sup>4</sup>Pelo Lema 4.4.42 esta geodésica é única.

neste meio dando em cada espaço tangente  $T_pM$  uma hipersuperfície suave, compacta e estritamente convexa  $E_p$  envolvendo a origem, chamada de indicatriz em  $p$ . Cada  $E_p$  determina qual o vetor velocidade de um raio de luz passando por  $p$ , parametrizado pelo tempo, que segue direção e sentido dados em  $T_pM$ . Assumindo que  $E_p$  varia suavemente com  $p$ , temos uma métrica Finsler  $F : TM \rightarrow [0, +\infty)$  unicamente determinada por

$$E_p = F^{-1}(1) \cap T_pM.$$

O princípio que rege a propagação da luz é o

**Princípio de Fermat:** A luz viaja de forma a minimizar o tempo de propagação.

Fixe pontos  $p, q \in M$  e imagine que em  $p$  há uma fonte de luz. Consideremos curvas  $c(t)$  que ligam  $p$  a  $q$ . De acordo com nosso modelo, a luz viaja de  $p$  a  $q$  parametrizada com respeito ao tempo  $t$  por uma curva  $c(t)$  que satisfaz  $F(\dot{c}(t)) \equiv 1$ . Sendo assim, consideremos o espaço de todas as trajetórias  $c(t)$  de  $p$  a  $q$  parametrizadas pelo tempo  $t$  e que satisfazem  $F(\dot{c}(t)) \equiv 1$ ,  $c(0) = p$ , e que atingem  $q$  em algum instante  $T > 0$ :  $c(T) = q$ . Aqui o domínio de  $c$  é o intervalo  $[0, T]$  que depende de  $c$ . Então  $T$  é tempo de percurso ao longo de  $c$  e, de acordo com o princípio de Fermat, é a quantidade a ser minimizada. Este espaço de trajetórias é matematicamente pouco confortável de se trabalhar pois o domínio de definição varia de curva para curva. No entanto, como  $F$  é positivamente homogênea de grau 1, a integral  $\int_0^T F(\dot{\gamma}(t))dt$  é invariante por reparametrização e coincide com o tempo de propagação ao longo dos raios de luz. Sendo assim, podemos modelar o princípio de Fermat olhando para o espaço  $C_{pq}$  de todas as curvas suaves  $c : [0, 1] \rightarrow M$  ligando  $p$  a  $q$ ,  $c(0) = p$  e  $c(1) = q$ , com velocidades não-nulas ( $\dot{c}(t) \neq 0 \forall t$ ), e minimizando o funcional

$$\int_0^1 F(\dot{c}(t))dt \tag{4.59}$$

em  $C_{pq}$ . Uma vez que esta quantidade foi minimizada em  $C_{pq}$ , atingindo seu valor mínimo  $T_*$  em  $\gamma_* \in C_{pq}$ , a trajetória de luz será dada por  $c_* : [0, T_*] \rightarrow M$ ,  $c_*(t) = \gamma_*(t/T_*)$ . Tal valor  $T_*$  será chamado de distância ótica entre  $p$  e  $q$ .

É bem conhecido o fato que em  $C_{pq}$  os pontos críticos<sup>5</sup> de (4.59) coincidem com os pontos críticos do funcional de energia

$$\frac{1}{2} \int_0^1 F^2(\dot{c}(t)) dt$$

que foi exaustivamente estudado no capítulo 3. Tais pontos críticos são justamente as geodésicas ligando  $p$  a  $q$ .

**Exercício 4.4.48.** *Prove que os pontos críticos de (4.59) em  $C_{pq}$  coincidem com os pontos críticos da energia.*

O modelo acima nos leva a considerar uma teoria corpuscular da luz, cujo principal expoente foi Newton. Nesta teoria vemos a luz como uma partícula que se move ao longo das geodésicas de  $F$ .

No entanto, a discussão da seção anterior nos mostra que a função “distância ótica” é justamente a solução  $S$  da equação Eikonol (4.57), nos levando a considerar uma teoria dual, onde estudamos as frentes de onda  $F_t(p)$  definidas por

$$F_t(p) = S^{-1}(t)$$

para  $0 < t < \text{inj}_p$ .  $F_t(p)$  consiste justamente dos pontos que são primeiro atingidos pelos raios de luz que emanam de  $p$  após tempo  $t$ . Na linguagem da seção anterior, quanto mais  $t$  se aproxima de  $\text{inj}_p$  mais a frente  $F_t(p)$  se aproxima dos valores críticos de  $\Pi|_{\text{int}(\Lambda_x)}$ , de forma que quando  $t$  atinge  $\text{inj}_p$  a frente de onda desenvolve auto-interseções e/ou bicos. Neste momento a distância ótica deixa de estar bem-definida, e há concentração de raios de luz em certos pontos, que correspondem a pontos conjugados a  $p$  ou a pontos onde duas geodésicas (raios de luz) se encontram no mesmo instante. Este ponto de vista, alternativo à teoria corpuscular de Newton, teve como expoentes nomes como os de Huygens, Hamilton e Jacobi. Seguindo [1], ilustramos esta teoria incluindo aqui o

**Teorema 4.4.49** (Princípio de Huygens). *Se  $0 < t_0 < t_1 < \text{inj}_p$  então a frente de onda  $F_{t_1}(p)$  é tangente a todas as frentes de onda  $F_{t_1-t_0}(q)$ , onde  $q$  varia em  $F_{t_0}(p)$ .*

<sup>5</sup>Como de costume, definimos pontos críticos derivando o funcional em questão ao longo de variações.

*Demonstração.* Considere  $q \in F_{t_0}(p)$  e seja  $\gamma(t)$  é a geodésica tal que o arco  $\gamma|_{[0,t_0]}$  é minimizante e satisfaz  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(t_0) = q$ . Pela definição de  $\text{inj}_p$  segue das hipóteses que tal geodésica minimizante entre  $p$  e  $q$  é única.

Note que  $\gamma([t_0, t_1]) \cap C_q = \emptyset$  pois, caso contrário, pela definição de  $C_q$  encontraríamos  $\epsilon > 0$  pequeno tal que  $\gamma|_{[t_0, t_1+\epsilon]}$  não é minimizante, de onde decorre que  $\gamma|_{[0, t_1+\epsilon]}$  também não é minimizante, contradizendo a hipótese  $t_1 < \text{inj}_p$ . Logo  $\gamma([t_0, t_1])$  está no domínio de boa definição da distância ótica a  $q$ , e faz sentido falar em  $F_{t_1-t_0}(q)$  mesmo que tal conjunto não seja a imagem de uma esfera pela aplicação  $\exp_q$  (este seria o caso se  $\text{inj}_q < t_1 - t_0$ ). Segue do Lema 4.4.42 que para todo  $z \in F_{t_1-t_0}(q)$  existe única geodésica minimizante ligando  $q$  a  $z$  já que, pelo nosso acordo, este conjunto está contido no domínio de boa definição da distância ótica a  $q$ . Também concluímos  $\gamma(t_1) \in F_{t_1}(p) \cap F_{t_1-t_0}(q)$ .

Provaremos agora que  $\{\gamma(t_1)\} = F_{t_1}(p) \cap F_{t_1-t_0}(q)$ . De fato, seja  $z \in F_{t_1}(p) \cap F_{t_1-t_0}(q)$  e considere a geodésica  $c : [0, t_1 - t_0] \rightarrow M$  minimizante ligando  $q$  a  $z$ . Concatenando  $\gamma|_{[0, t_0]}$  com o pedaço de geodésica  $t \in [t_0, t_1] \mapsto c(t - t_0)$  encontramos geodésica quebrada ligando  $p$  a  $z$  com comprimento  $t_1$ . Como  $t_1 = \theta(p, z)$  segue da fórmula de primeira variação que esta geodésica quebrada é suave e, conseqüentemente, coincide com  $\gamma|_{[0, t_1]}$ . Logo  $z = \gamma(t_1)$ . Usando o lema de Gauss (Lema 4.4.47) obtemos

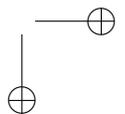
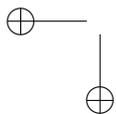
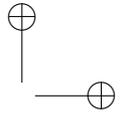
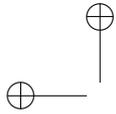
$$T_{\gamma(t_1)}F_{t_1-t_0}(q) = T_{\gamma(t_1)}F_{t_1}(p) = \ker T_L(\dot{\gamma}(t_1))$$

onde  $T_L : TM \rightarrow T^*M$  é a transformada de Legendre associada à Lagrangiana  $L = F^2/2$ . Logo  $\gamma(t_1)$  é ponto de tangência.  $\square$

Note que a demonstração acima é matematicamente rigorosa, diferentemente da demonstração encontrada em [1].

### O último teorema geométrico de Jacobi

O limite do conjunto onde a distância ótica até  $p$ ,  $S$ , está bem-definida é justamente o conjunto dos pontos mínimos. É natural considerar este conjunto se estivermos preocupados em estudar até onde podemos definir  $S$ . Tais pontos mínimos não são necessariamente os valores críticos da projeção  $\Pi|_{\Lambda_{\max}}$ . Por exemplo, se a curvatura for



não-positiva então  $\Pi|_{\Lambda_{\max}}$  é difeomorfismo local já que não há pontos conjugados, e os pontos mínimos são justamente aqueles que admitem mais de uma geodésica minimizante desde  $p$ .

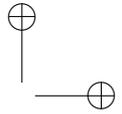
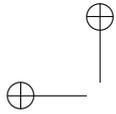
Os valores críticos de  $\Pi|_{\Lambda_{\max}}$  formam conjuntos chamados de cústicas e, como já observado, seus pontos são os pontos conjugados a  $p$ . Os primeiros pontos conjugados ao longo das geodésicas que emanam de  $p$  formam a primeira cústica de  $p$  denotada por  $C_p^1$ , os próximos pontos conjugados formam a segunda cústica  $C_p^2$ , e assim por diante. Por exemplo, tomando a métrica “redonda” em  $S^2$  sendo  $p \in S^2$  arbitrário, então temos  $C_p^1 = \{-p\}$ ,  $C_p^2 = \{p\}$ ,  $C_p^3 = \{-p\}$ , etc. Esta situação é bastante não-genérica. No caso de um elipsóide, Jacobi afirmou, sem demonstrar, que

**Teorema 4.4.50.** *[25, Último teorema geométrico de Jacobi] As cústicas de um elipsóide apresentam cúspides, e o número de cúspides de cada cústica é pelo menos 4.*

Voltando ao caso da esfera redonda, é sabido que depois de uma perturbação pequena e genérica da métrica, o número de cúspides na primeira cústica é pelo menos 4; para uma prova elementar veja [3]. Para cústicas de ordem maior este problema está em aberto. Em [3] Arnold dá a entender que deve haver uma teoria de Morse para provar o Teorema 4.4.50, no mesmo espírito em que a teoria de Floer foi capaz de responder afirmativamente a conjectura de Arnold sobre o número de pontos fixos de difeomorfismos Hamiltonianos e generalizar o chamado teorema geométrico de Poincaré<sup>6</sup>, que hoje é conhecido como teorema de Poincaré-Birkhoff.

---

<sup>6</sup>Para mais detalhes sobre o teorema geométrico de Poincaré, a conjectura de Arnold e a teoria de Floer veja [1, apêndice 9] e [14].



## Capítulo 5

# Dinâmica simplética

O termo Dinâmica Simplética nasceu recentemente, criado por Hofer ao notar que técnicas modernas em geometria simplética se mostraram bem-sucedidas quando aplicadas ao estudo de propriedades globais de sistemas Hamiltonianos, veja [5]. Neste capítulo discutiremos algumas destas aplicações. Daremos enfoque aos fluxos geodésicos que formam uma família especial de sistemas Hamiltonianos.

### 5.1 Índice de Conley-Zehnder

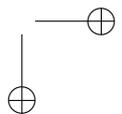
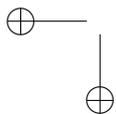
O índice de Conley-Zehnder é um invariante da dinâmica linearizada ao longo de uma órbita periódica de um sistema Hamiltoniano. Daremos aqui a definição geral e estudaremos com mais detalhe o caso de fluxos de Reeb em dimensão 3.

**Definição 5.1.1.** *O ciclo de Maslov é o conjunto*

$$\Lambda(2n) = \{\Psi \in Sp(2n) \mid \det(\Psi - I) = 0\} \quad (5.1)$$

e o seu complementar em  $Sp(2n)$  será denotado por

$$Sp^*(2n) := Sp(2n) \setminus \Lambda(2n).$$



**Lema 5.1.2.**  $Sp^*(2n)$  tem duas componentes conexas

$$\{\Psi \in Sp(2n) \mid \det(I - \Psi) > 0\}, \quad \{\Psi \in Sp(2n) \mid \det(I - \Psi) < 0\}.$$

Além disso, toda curva fechada em  $Sp^*(2n)$  é contrátil em  $Sp(2n)$ .

Mais a frente daremos a prova completa no caso  $n = 1$ , e apenas uma idéia no caso geral. A demonstração do Lema 5.1.2 se encontra em [35]. Prosseguimos assumindo o Lema 5.1.2, e consideramos o conjunto

$$\Sigma^*(2n) = \{\Psi : [0, 1] \rightarrow Sp(2n) \text{ contínua} \mid \Psi(0) = I, \Psi(1) \in Sp^*(2n)\}.$$

**Teorema 5.1.3.** Existe única aplicação

$$\mu_{CZ} : \Sigma^*(2n) \rightarrow \mathbb{Z} \tag{5.2}$$

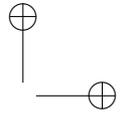
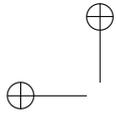
caracterizada pelas seguintes propriedades:

- **Homotopia:** Se  $s \mapsto \Psi_s \in \Sigma^*(2n)$  é uma família contínua, isto é  $(s, t) \mapsto \Psi_s(t) \in Sp(2n)$  é contínua, então  $s \mapsto \mu_{CZ}(\Psi_s)$  é constante.
- **Maslov:** Se  $\Phi : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (Sp(2n), \{I\})$  é contínua e  $\Psi \in \Sigma^*(2n)$  então  $\mu_{CZ}(\Phi\Psi) = \mu_{CZ}(\Psi) + 2k$ , onde  $k$  é o índice de Maslov de  $\Phi$ .
- **Soma:** Se  $\Psi' \in \Sigma^*(2n')$  e  $\Psi'' \in \Sigma^*(2n'')$  então  $\Psi' \oplus \Psi'' \in \Sigma^*(2(n' + n''))$  satisfaz  $\mu_{CZ}(\Psi' \oplus \Psi'') = \mu_{CZ}(\Psi') + \mu_{CZ}(\Psi'')$ . Aqui  $Sp(2n')$  e  $Sp(2n'')$  são vistos como subgrupos do grupo  $Sp(2(n' + n''))$  da maneira usual.
- **Normalização:** O caminho  $\Psi_0 \in \Sigma^*(2)$  dado por

$$\Psi_0(t) = \begin{pmatrix} \cos \pi t & -\sin \pi t \\ \sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix}$$

satisfaz  $\mu_{CZ}(\Psi_0) = 1$ .

O inteiro  $\mu_{CZ}$  é chamado de índice de Conley-Zehnder.



*Demonstração.* Aqui denotaremos por  $\rho : U(n) \rightarrow S^1$  o determinante complexo, o determinante real será denotado por  $\det$ . Fixe matrizes  $M_+, M_- \in Sp(2n)$  satisfazendo

$$\pm \det(I - M_{\pm}) > 0$$

e  $\rho(U_{\pm}) \in \{1, -1\}$ , onde  $M_{\pm} = P_{\pm}U_{\pm}$  é a decomposição polar. Note que, da seção 4.1, temos  $P^{\pm} \in Sp(2n)$  e  $U_{\pm} \in U(n)$ . Por exemplo, podemos tomar

$$M_+ = -I, \quad M_- = \begin{pmatrix} \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right) & 0 \\ 0 & -I' \end{pmatrix}$$

onde  $I'$  denota a matriz identidade de ordem  $2n-2$ . Pelo Lema 4.1.15 a aplicação  $r : Sp(2n) \rightarrow U(n)$ ,  $\psi = PU \mapsto U$  onde  $\psi = PU$  é a decomposição polar, é uma retração por deformação.

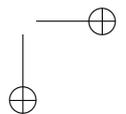
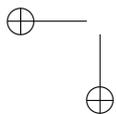
Seja  $\Psi \in \Sigma^*(2n)$ . Se  $\pm \det(I - \Psi(1)) > 0$  então usando o Lema 5.1.2 encontramos curva  $\gamma : [1, 2] \rightarrow Sp^*(2n)$  satisfazendo  $\gamma(1) = \Psi(1)$  e  $\gamma(2) = M_{\pm}$ . A concatenação dos caminhos  $\gamma$  e  $\Psi$  nos dá um caminho  $\gamma * \Psi : [0, 2] \rightarrow Sp(2n)$  que mapeia  $[1, 2]$  em  $Sp^*(2n)$ . Em particular  $\phi = r \circ (\gamma * \Psi)$  é uma aplicação  $[0, 2] \rightarrow U(n)$ . Defina

$$\mu_{CZ}(\Psi) = \text{grau de } t \in [0, 2] / \{0, 2\} \mapsto \rho(\phi(t)^2) \in S^1.$$

Note que  $\rho(\phi(2)) = M_{\pm} \in \{1, -1\}$ . Logo  $\rho(\phi(t)^2) = \rho(\phi(t))^2$  é um *loop* fechado em  $S^1$ . Da invariância do grau por homotopia segue que  $\mu_{CZ}(\Psi)$  independe da escolha de  $\gamma$ : duas escolhas  $\gamma_0, \gamma_1$  podem ser deformadas continuamente uma na outra mantendo extremidades fixas pois, de acordo com o Lema 5.1.2, e a concatenação de  $\bar{\gamma}_1$  com  $\gamma_0$  define loop contrátil em  $Sp(2n)$  (aqui  $\bar{\gamma}_1$  denota  $\gamma_1$  percorrida no sentido reverso). Todas as propriedades descritas no enunciado do teorema seguem facilmente desta definição. A unicidade é deixada a cargo do leitor.  $\square$

A definição de  $\mu_{CZ}$  feita na demonstração do teorema acima é um tanto complicada. No caso  $n = 1$  podemos descrever  $\mu_{CZ}$  de maneira bastante geométrica. Identificamos  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  linearmente via  $(x, y) \simeq x + iy$ . Seja  $\Psi : [0, 1] \rightarrow Sp(2)$  um caminho qualquer satisfazendo  $\Psi(0) = I$  e considere a aplicação

$$\Delta_{\Psi} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \tag{5.3}$$



definida da seguinte maneira. Dado  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  existe aplicação contínua  $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $\Psi(t)z \in \mathbb{R}^+ e^{i\theta(t)}$ . Como  $\theta(t)$  é única a menos da adição de um número em  $2\pi\mathbb{Z}$ , podemos definir

$$\Delta_\Psi(z) = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi}.$$

Obviamente  $\Delta_\Psi(tz) = \Delta_\Psi(z) \forall t > 0$  de onde segue que a imagem de  $\Delta_\Psi$  é um intervalo fechado

$$I_\Psi = \Delta_\Psi(\mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

**Definição 5.1.4.**  $I_\Psi$  é chamado de intervalo de rotação de  $\Psi$ .

**Exercício 5.1.5.** Prove que o comprimento de um intervalo de rotação é sempre estritamente menor que  $\frac{1}{2}$ .

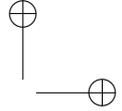
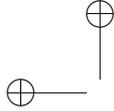
**Lema 5.1.6.** Se  $\partial I_\Psi \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$  então  $\Psi(1) \in \Lambda(2)$ , isto é,  $\Psi \notin \Sigma^*(2)$ .

*Demonstração.* Defina aplicações contínuas  $\rho, \theta : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  unicamente determinadas pela identidade  $\Psi(t)e^{is} = \rho(s, t)e^{i\theta(s, t)}$  e pelas condições  $\rho(s, t) > 0$ ,  $\theta(s, 0) = s$ . Note que  $\rho, \theta$  são diferenciáveis em  $s$  e que  $\Delta_\Psi(e^{is}) = (\theta(s, 1) - s)/2\pi$ . Suponha que  $\Delta(e^{is})$  atinge seu máximo em  $s_0$  e que este máximo seja um inteiro  $k$ . Então  $\theta(s_0, 1) = s_0 + 2\pi k$  e definindo  $u := e^{is_0}$  temos

$$\rho(s_0, 1)u = \rho(s_0, 1)e^{i\theta(s_0, 1)} = \Psi(1)e^{is_0} = \Psi(1)u.$$

A identidade  $\frac{d}{ds}\big|_{s=s_0} \Delta_\Psi(e^{is}) = 0$  nos diz que  $\partial_s \theta(s_0, 1) = 1$ . Consequentemente

$$\begin{aligned} \Psi(1)iu &= \Psi(1)ie^{is_0} \\ &= \Psi(1) \frac{d}{ds}\bigg|_{s=s_0} e^{is} \\ &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=s_0} (\Psi(1)e^{is}) \\ &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=s_0} (\rho(s, 1)e^{i\theta(s, 1)}) \\ &= \partial_s \rho(s_0, 1)e^{i\theta(s_0, 1)} + \rho(s_0, 1)i\partial_s \theta(s_0, 1)e^{i\theta(s_0, 1)} \\ &= \partial_s \rho(s_0, 1)u + \rho(s_0, 1)iu. \end{aligned}$$



A conclusão é que na base simplética  $\{u, iu\}$  a matriz  $\Psi(1)$  assume a forma

$$\begin{pmatrix} \rho(s_0, 1) & \partial_s \rho(s_0, 1) \\ 0 & \rho(s_0, 1) \end{pmatrix}.$$

Como  $\det \Psi(1) = 1$  temos que  $\rho(s_0, 1) = 1$  é auto-valor de  $\Psi(1)$ , e  $\Psi(1) \in \Lambda(2)$ . Os cálculos para um mínimo de  $\Delta_\Psi(e^{is})$  que é inteiro são os mesmos.  $\square$

Dado  $\Psi \in \Sigma^*(2)$  defina

$$\mu(\Psi) = \begin{cases} 2k & \text{se } k \in I_\Psi \\ 2k + 1 & \text{se } I_\Psi \subset (k, k + 1). \end{cases} \quad (5.4)$$

Esta definição está bem posta em virtude do Exercício 5.1.5 e do Lema 5.1.6.

**Lema 5.1.7.** *O inteiro  $\mu : \Sigma^*(2) \rightarrow \mathbb{Z}$  definido em (5.4) satisfaz os axiomas descritos no Teorema 5.1.3.*

*Demonstração.* Exercício.  $\square$

Como consequência temos  $\mu = \mu_{CZ}$  no caso  $n = 1$ . A definição geométrica do índice de Conley-Zehnder no caso  $n = 1$  dada em (5.4) nos permite estender o índice para qualquer  $\Psi : [0, 1] \rightarrow Sp(2)$  caminho contínuo satisfazendo  $\Psi(0) = I$ .

De fato, considere um intervalo fechado  $J \subset \mathbb{R}$  tal que  $|J| < 1/2$  e  $\partial J \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ , e defina

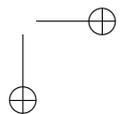
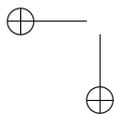
$$\tilde{\mu}(J) = \begin{cases} 2k & \text{se } k \in J \\ 2k + 1 & \text{se } J \subset (k, k + 1). \end{cases}$$

A função  $\tilde{\mu}$  pode ser estendida ao conjunto de todos os intervalos fechados de comprimento  $< 1/2$  pela fórmula

$$\tilde{\mu}(J) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \tilde{\mu}(J - \epsilon).$$

O intervalo de rotação  $I_\Psi$  está sempre bem definido, e pelo Exercício 5.1.5 sempre tem comprimento  $< 1/2$ . Definimos então o índice de Conley-Zehnder para um caminho qualquer  $\Psi : [0, 1] \rightarrow Sp(2)$  satisfazendo  $\Psi(0) = I$  por

$$\mu_{CZ}(\Psi) = \tilde{\mu}(I_\Psi). \quad (5.5)$$



*Demonstração do Lema 5.1.2 no caso  $n = 1$ .* Seja  $\Psi \in Sp^*(2)$ . Primeiro consideramos o caso em que os auto-valores  $\{\lambda, \lambda^{-1}\}$  de  $\Psi$  não estão no círculo complexo unitário. Então  $\lambda, \lambda^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$  e encontramos uma matriz  $P \in Sp(2)$  tal que

$$\Psi = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Para encontrar tal  $P$  foi usado que os auto-espacos são necessariamente  $\omega_0$ -ortogonais, como o leitor pode facilmente verificar. Trocando  $\lambda$  por  $\lambda^{-1}$  podemos supor  $|\lambda| < 1$ . Fixe uma deformação contínua  $P_t \in Sp(2)$ ,  $t \in [0, 1]$ , com  $P_0 = P$  e  $P_1 = I$ . Aqui usamos a conexidade de  $Sp(2)$ . Se  $\lambda \in (0, 1)$  então

$$P_t \begin{pmatrix} \frac{t}{2} + (1-t)\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\frac{t}{2} + (1-t)\lambda} \end{pmatrix} P_t^{-1}$$

é deformação de  $\Psi$  até a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

por matrizes em  $Sp(2) \setminus \Lambda(2)$ . Se  $\lambda \in (-1, 0)$  então

$$P_t \begin{pmatrix} -t + (1-t)\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{-t + (1-t)\lambda} \end{pmatrix} P_t^{-1}$$

é deformação de  $\Psi$  até a matriz  $-I$  por matrizes em  $Sp(2) \setminus \Lambda(2)$ .

Tratemos agora o caso em que  $\lambda$  é complexo unitário. Por hipótese  $\lambda = e^{i2\pi\tau}$  com  $\tau \in (0, 2\pi)$ . Se  $\tau \neq 1/2$ , ou se  $\tau = 1/2$  e  $\Psi$  é diagonalizável, então

$$\Psi = P \begin{pmatrix} \cos 2\pi\tau & -\sin 2\pi\tau \\ \sin 2\pi\tau & \cos 2\pi\tau \end{pmatrix} P^{-1}$$

para alguma matriz  $P \in Sp(2)$ . De fato, usando a forma canônica de Jordan, podemos escrever  $\Psi$  como acima onde  $P \in GL(2, \mathbb{R})$ . Trocando  $P$  por  $(\det P)^{-1}P$  obtemos a mesma fórmula com  $P$  simplética.

Se  $P_t$  é deformação contínua como acima entre  $P_0 = P$  e  $P_1 = I$ , deformamos  $\Psi$  a uma matriz de  $U(1)$  diferente de  $I$  sem passar por  $\Lambda(2)$  via o caminho

$$P_t \begin{pmatrix} \cos 2\pi\tau & -\sin 2\pi\tau \\ \sin 2\pi\tau & \cos 2\pi\tau \end{pmatrix} P_t^{-1}$$

o que nos permite deformar o resultado até  $-I$  dentro de  $U(1)$  sem passar por  $\Lambda(2)$ . Se  $\tau = 1/2$  e  $\Psi$  não é diagonalizável então

$$\Psi = P \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

com  $P \in Sp(2)$  e  $a \in \mathbb{R}$ . Logo

$$\Psi = P_t \begin{pmatrix} -1 & (1-t)a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P_t^{-1}$$

deforma  $\Psi$  a  $-I$  sem passar por  $\Lambda(2)$ , onde  $P_t \in Sp(2)$  é deformação contínua de  $P = P_0$  a  $P_1 = I$ .

A conclusão dos argumentos até aqui é que se  $\det(I - \Psi) > 0$  então  $\Psi$  pode ser deformada em  $Sp(2)$  até  $-I$  sem passar por  $\Lambda(2)$ , e se  $\det(I - \Psi) < 0$  então  $\Psi$  pode ser deformada em  $Sp(2)$  até

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sem passar por  $\Lambda(2)$ . Isto conclui a primeira afirmação do lema.

Considere  $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto \psi(t)$  uma curva fechada em  $Sp^*(2)$ , e fixe  $u \in \mathbb{R}^2$  com  $|u| = 1$ . Suponha que  $\det(I - \psi(t)) > 0 \forall t$ . O índice de Maslov  $\psi(t)$  é o grau da aplicação  $c : t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto \psi(t)u/|\psi(t)u| \in S^1$ . Se  $u$  estivesse na imagem de  $c$  então obteríamos algum  $t_*$  tal que  $\psi(t_*)u = |\psi(t_*)u|u$ , de onde concluímos que os auto-valores de  $\psi(t_*)$  são reais e positivos, uma contradição com  $\det(I - \psi(t_*)) > 0$ . Logo o grau de  $c$  é zero. Mas o índice de Maslov é zero exatamente para os *loops* contráteis em  $Sp(2)$ . O caso em que  $\det(I - \psi(t)) < 0 \forall t$  é tratado de maneira análoga.  $\square$

*Idéia da prova do Lema 5.1.2 no caso geral.* Seja  $\Psi \in Sp(2n)$ . Como  $\Psi$  é real e conjugada a  $\Psi^{-1}$ , podemos agrupar os auto-valores de  $\Psi$  em 4-uplas  $\lambda, \bar{\lambda}, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}^{-1}$ . Note que estes números poderiam ser

repetidos, por exemplo, no caso  $\lambda = 1$ . Denotaremos  $\lambda \equiv \mu$  se  $\{\lambda, \bar{\lambda}, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}^{-1}\} = \{\mu, \bar{\mu}, \mu^{-1}, \bar{\mu}^{-1}\}$ . Associado ao auto-valor  $\lambda$  temos o subespaço  $E_\lambda$  que é a soma dos auto-espacos generalizados de  $\lambda, \bar{\lambda}, \lambda^{-1}$  e  $\bar{\lambda}^{-1}$ , de modo que  $\lambda \equiv \mu \Rightarrow E_\lambda = E_\mu$ . Não é difícil mostrar que cada  $E_\lambda$  é  $\omega_0$ -simplético e que  $\lambda \neq \mu \Rightarrow E_\lambda \subset E_\mu^\perp$  (ortogonal simplético). O trabalho mais duro se resume a mostrar que se  $\lambda \notin \mathbb{R}^+$  então  $\Psi|_{E_\lambda}$  se deforma continuamente a  $-I|_{E_\lambda}$  através de transformações lineares  $\omega_0$ -simpléticas de  $E_\lambda$  preservando a propriedade de não ter 1 como auto-valor. Para este fim o leitor deve encontrar bases simpléticas especiais em  $E_\lambda$  com respeito às quais  $\Psi|_{E_\lambda}$  se representa por matrizes simples, de maneira semelhante à construção da forma canônica de Jordan. De maneira similar, se  $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  então  $\Psi|_{E_\lambda}$  se deforma, via  $\omega_0$ -simplectomorfismos lineares de  $E_\lambda$ , a uma aplicação simplética e diagonalizável com auto-valores  $\{1/2, 2\}$ , com a propriedade de que 1 não é auto-valor ao longo da deformação. Resumindo, sob a hipótese  $\det(\Psi - I) \neq 0$ , temos uma soma direta por fatores simpléticos,  $\Psi$ -invariantes e mutuamente simplecticamente ortogonais

$$\mathbb{R}^{2n} = \left( \bigoplus_{[\lambda], \lambda \notin \mathbb{R}^+} E_\lambda \right) \oplus \left( \bigoplus_{[\lambda], \lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} E_\lambda \right) = V_0 \oplus V_1$$

tal que  $\Psi|_{V_0}$  se deforma, por transformações simpléticas de  $V_0$ , a  $-I|_{V_0}$ , e  $\Psi|_{V_1}$  se deforma, novamente por transformações simpléticas de  $V_0$ , a uma transformação linear simplética de  $V_1$  diagonalizável com auto-valores  $\{1/2, 2\}$ . Estas deformações em cada  $V_0, V_1$  induzem uma deformação  $t \in [0, 1] \mapsto \Psi_t \in Sp(2n)$ , de  $\Psi = \Psi_0$  em  $Sp(2n)$ . O ponto crucial é que  $\det(\Psi_t - I)$  nunca se anula. Sendo  $k$  a multiplicidade do auto-valor 2 da matriz  $\Psi_1$ , fica provado que existe  $A \in Sp(2n)$  tal que

$$\Psi_1 = A \begin{pmatrix} I_{2n-2k} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_k & 0 \\ 0 & 2I_k \end{pmatrix} \end{pmatrix} A^{-1}.$$

Aqui  $I_j$  denota a matriz identidade  $j \times j$ . Usamos agora a conexidade de  $Sp(2n)$  para deformar  $A$  a  $I$ , e concluir que podemos deformar  $\Psi$  à matriz diagonal  $M_k = A^{-1}\Psi_1 A$ . O último passo é encontrar

deformação contínua explícita de  $M_k$  até as matrizes

$$\begin{cases} -I_{2n} & \text{se } k \text{ é par} \\ \begin{pmatrix} -I_{2n-2} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

por matrizes em  $Sp(2n) \setminus \Lambda(2n)$ . Este último passo não é difícil. Isto prova que os abertos descritos no enunciado do lema são conexos.

Para verificar que curvas fechadas em  $Sp^*(2n)$  são contráteis em  $Sp(2n)$  apelamos para o fato de que o índice de Maslov pode ser visto como uma espécie de número de interseção de um *loop* fechado com  $\Lambda(2n)$ . Em particular, o índice de Maslov se anula para um *loop* fechado em  $Sp^*(2n)$ , o que garante que tal *loop* é contrátil em  $Sp(2n)$  em vista do Teorema 4.1.18.  $\square$

### Órbitas periódicas

Vamos aplicar estas idéias para estudar a dinâmica linearizada de uma órbita periódica. Consideremos o caso de contato, o caso simplético geral é análogo.

Se  $\lambda$  é forma de contato em uma  $(2n + 1)$ -variedade  $M$  então, como estudado no capítulo 4, temos um campo de Reeb  $X_\lambda$  associado, implicitamente determinado por (4.30). Denotemos por  $\phi_t$  o fluxo de  $X_\lambda$  e por  $\xi = \ker \lambda$  a estrutura de contato. O fluxo de Reeb preserva  $\lambda$ , de fato,

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* \lambda = \phi_t^* \mathcal{L}_{X_\lambda} \lambda = \phi_t^* (di_{X_\lambda} \lambda + i_{X_\lambda} d\lambda) = 0.$$

Logo também preserva  $d\lambda$  e fluxo linearizado  $d\phi_t$  define uma transformação  $d\lambda$ -simplética linear nas fibras de  $\xi$  que cobre  $\phi_t$ .

Seja  $x : \mathbb{R} \rightarrow M$  uma trajetória fechada de  $X_\lambda$  e seja  $T > 0$  um período:  $x(t) = \phi_t(x(0))$ ,  $x(t + T) = x(t)$ .

**Definição 5.1.8.** *Uma órbita periódica de  $X_\lambda$ , ou de  $\phi_t$ , ou de  $\lambda$ , é um par  $(x, T)$  como acima. A órbita  $(x, T)$  é dita não-degenerada se  $d\phi_T : \xi|_p \rightarrow \xi|_p$  não tem auto-valor 1, onde  $p = x(0) = x(T)$ .*

O mapa  $x$  induz um mapa  $x_T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$  dado por  $x_T(t) = x(Tt)$  e temos um fibrado simplético  $((x_T)^*\xi, d\lambda)$  sobre  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Seja

$$\tau : (x_T)^*\xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{2n}$$

uma trivialização simplética, que induz, para cada  $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , um symplectomorfismo linear

$$\tau_t : (\xi|_{x(Tt)}, d\lambda|_{x(Tt)}) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0).$$

Considere  $\Psi : [0, 1] \rightarrow Sp(2n)$  definida por

$$\Psi(t) = \tau_t \circ d\phi_t \circ (\tau_0)^{-1}.$$

É claro que  $\Psi(0) = I$  e que  $(x, T)$  é não-degenerada se, e somente se,  $\Psi \in \Sigma^*(2n)$ .

**Definição 5.1.9.** *Se  $P = (x, T)$  é não-degenerada então definimos o índice de Conley-Zehnder do par  $(P, \tau)$  como*

$$\mu_{CZ}(P, \tau) = \mu_{CZ}(\Psi).$$

**Lema 5.1.10.** *Seja  $P = (x, T)$  órbita periódica de  $X_\lambda$  e considere duas trivializações simpléticas  $\tau, \tau' : (x_T)^*\xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{2n}$ . Considere o loop em  $Sp(2n)$  dado por  $\Phi : t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto \tau'_t \circ (\tau_t)^{-1} \in Sp(2n)$ . Vale que*

$$\mu_{CZ}(P, \tau') = \mu_{CZ}(P, \tau) + 2\mu^n(\Phi)$$

onde  $\mu^n$  denota o índice de Maslov.

*Demonstração.* Consequência direta do axioma **Maslov** descrito no Teorema 5.1.3.  $\square$

Observe que no caso  $n = 1$  temos uma receita para definir o índice de Conley-Zehnder  $\mu_{CZ}(P, \tau)$  mesmo se  $P$  for degenerada. De fato, como discutido na seção anterior, o índice de Conley-Zehnder pode ser definido pela fórmula (5.5) para qualquer caminho  $\Psi : [0, 1] \rightarrow Sp(2)$ . Trivializando o fluxo linearizado como acima, estendemos o índice para pares  $(P, \tau)$  quaisquer no caso  $\dim M = 3$ .

**Observação 5.1.11.** *No caso geral  $n \geq 1$  sempre existem extensões do índice para órbitas possivelmente degeneradas, veja [16], mas tais extensões não são únicas. Nossa extensão no caso  $n = 1$  goza da propriedade de semi-continuidade inferior no seguinte sentido: quando sujeito a uma perturbação pequena, o índice do fluxo linearizado perturbado só pode aumentar.*

## 5.2 Convexidade dinâmica

A noção de convexidade dinâmica foi introduzida por Hofer, Wysocki e Zehnder em [17] e traduz a possibilidade de obter informação global da dinâmica a partir de informação da dinâmica linearizada das órbitas periódicas de um fluxo de Reeb em dimensão 3.

Uma maneira pela qual este procedimento pode ser implementado é obtendo seções globais. Portanto, começamos revisando a noção clássica de seção global para um fluxo.

**Definição 5.2.1.** *Seja  $M$  uma 3-variedade com um campo de vetores  $X$ . Uma seção global para o fluxo  $\{\phi_t\}$  de  $X$  é uma superfície compacta mergulhada  $S \subset M$  tal que*

- $\partial S$  consiste de órbitas periódicas,
- $X$  é transversal a  $S \setminus \partial S$  e
- $\forall p \in M \setminus \partial S, \exists t_n^\pm \rightarrow \pm\infty$  tais que  $\phi_{t_n^\pm}(p) \in S \setminus \partial S$ .

Quando  $S$  for um disco diremos que  $S$  é uma seção global tipo-disco.

Se  $M$  é 3-variedade,  $X$  é campo em  $M$  com fluxo  $\{\phi_t\}$  e  $S$  é seção global então podemos reduzir a dinâmica em  $M$  à dinâmica da aplicação de primeiro retorno

$$\psi : S \setminus \partial S \rightarrow S \setminus \partial S \quad \psi(p) = \phi_{\tau(p)}(p) \quad (5.6)$$

onde a função é o chamado tempo de primeiro retorno

$$\tau(p) = \inf\{t > 0 \mid \phi_t(p) \in S \setminus \partial S\}.$$

**Exercício 5.2.2.** *Mostre que  $\tau(p)$  e  $\psi(p)$  dependem diferenciavelmente do ponto  $p \in S \setminus \partial S$ . Dica: use o teorema da função implícita em conjunto com a transversalidade de  $X$  a  $S \setminus \partial S$ .*

A possibilidade de redução da dinâmica do fluxo de  $X$  à dinâmica do mapa de primeiro retorno  $\psi$  é de grande valor pois dinâmica em dimensão 2 é território bastante mais explorado do que a dinâmica de fluxos em dimensão 3. Por este motivo, teoremas de existência de seções globais são fortíssimos.

### 5.2.1 Níveis convexos

O primeiro exemplo de resultado de existência de seções globais é o notável enunciado abaixo.

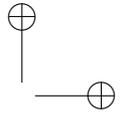
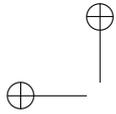
**Teorema 5.2.3.** *[16, Hofer, Wysocki e Zehnder] Seja  $E \subset \mathbb{R}^4$  um domínio compacto, suave e estritamente convexo. Então existe uma seção global tipo disco para fluxo Hamiltoniano em  $\partial E$ , e este fluxo possui duas ou infinitas órbitas periódicas.*

O teorema acima requer alguns esclarecimentos. U domínio compacto, suave e estritamente convexo é um subconjunto  $E \subset \mathbb{R}^4$  que pode ser descrito como  $E = h^{-1}(1)$  para uma função suave  $h : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow (0, +\infty)$  que é convexa, positivamente homogênea de grau 2 e  $D^2h(z) > 0$  para todo  $z \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ . Por dinâmica Hamiltoniana em  $\partial E$  entendemos a dinâmica do campo Hamiltoniano  $X_H|_{\partial E}$  associado a qualquer função real suave  $H$  definida perto de  $\partial E$  que realiza  $\partial E$  como nível regular. Aqui  $\mathbb{R}^4$  é dotado de sua forma simplética canônica  $\omega_0$  (4.1). De acordo com o Lema 4.2.10, a escolha de outra função com as mesmas propriedades de  $H$  não altera as trajetórias da dinâmica Hamiltoniana em  $\partial E$ .

A prova de que há duas ou infinitas órbitas periódicas uma vez que existe a seção global tipo-disco é consequência direta do seguinte importante resultado devido a John Franks.

**Teorema 5.2.4.** *[8, Franks] Um difeomorfismo de  $(0, 1) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  que preserva uma forma de área com área total finita, e que tem um ponto periódico necessariamente possui infinitos pontos periódicos.*

Seja  $D \subset \partial E$  a seção global tipo-disco, de forma que  $P = \partial D$  é órbita periódica. O fluxo do campo Hamiltoniano  $X_H$  preserva  $\omega_0$  pois  $\mathcal{L}_{X_H}\omega_0 = di_{X_H}\omega_0 = d(-dH) = 0$ . Denotando por  $\psi : D \setminus P \rightarrow D \setminus P$  e  $\tau : D \setminus P \rightarrow \mathbb{R}$  o mapa e o tempo de primeiro retorno, e por



$\phi_t$  o fluxo de  $X_H$  temos

$$d\psi|_p \cdot u = d\phi_{\tau(p)}|_p \cdot u + (d\tau|_p \cdot u)X_H|_p \quad \forall p \in D \setminus P, u \in T_p D$$

de onde se conclui que  $\psi$  preserva  $\omega_0|_{T(D \setminus P)}$ . Aqui foi usado que  $i_{X_H}\omega_0 = -dH$  se anula em  $T\partial E$ . Pelo mesmo motivo,  $\omega_0$  é forma de área em  $D \setminus P$  com área total finita

$$\int_{D \setminus P} \omega_0 = \int_P \lambda$$

onde  $\lambda$  é qualquer primitiva de  $\omega_0$ . Segue do teorema da translação de Brouwer que  $\psi$  possui um ponto fixo  $p'$ , que corresponde a uma órbita periódica  $P'$  de  $X_H$  distinta de  $P$ . O anel  $A = D \setminus (P \cup \{p'\})$  é invariante por  $\psi$ , e o mapa  $\psi|_A$  se encaixa nas hipóteses do Teorema 5.2.4. Note que existe correspondência biunívoca entre pontos periódicos de  $\psi|_A$  e órbitas periódicas de  $X_H$  em  $\partial E$ , de onde segue a alternativa “duas ou infinitas”.

### 5.2.2 A definição de convexidade dinâmica

Discutiremos o caso geral mais a frente, primeiramente consideramos situações particulares.

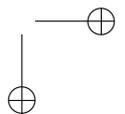
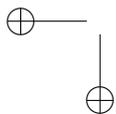
#### Estruturas de contato triviais

Seja  $\lambda$  uma forma de contato em uma 3-variedade  $M$ . A forma bilinear  $d\lambda$  torna  $\xi$  um fibrado simplético sobre  $M$ , por definição de forma de contato, veja a seção 4.4.3. Vamos assumir por enquanto, por simplicidade, que existe uma trivialização simplética global

$$\tau : \xi \rightarrow M \times \mathbb{R}^2$$

isto é,  $\tau$  é um difeomorfismo satisfazendo  $\tau(\xi_p) = \{p\} \times \mathbb{R}^2, \forall p \in M$ , que induz uma transformação linear simplética entre os espaços vetoriais simpléticos

$$\tau_p := \tau|_{\xi_p} : (\xi_p, d\lambda|_p) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0) \quad \forall p \in M.$$



Aqui identificamos  $\{p\} \times \mathbb{R}^2$  com  $\mathbb{R}^2$ . Dada uma órbita periódica  $P = (x, T)$  de  $X_\lambda$  a restrição de  $\tau$  sobre os pontos de  $x(\mathbb{R})$  induz uma trivilização simplética

$$\tau^P : (x_T)^*\xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$$

dada por  $\tau_t^P = \tau_{x(Tt)} : \xi_{x(Tt)} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . O índice de Conley-Zehnder  $\mu_{CZ}(P, \tau^P)$  será denotado  $\mu_{CZ}(P)$ , por simplicidade. A órbita  $P = (x, T)$  é dita contrátil se o loop  $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto x_T(t) = x(Tt)$  for contrátil em  $M$ . Com estes acordos podemos introduzir a seguinte definição devido a Hofer, Wysocki e Zehnder.

**Definição 5.2.5.** *Uma forma de contato satisfazendo as hipóteses acima é dinamicamente convexa se  $\mu_{CZ}(P) \geq 3$  para toda órbita periódica contrátil de  $X_\lambda$ .*

**Quatérnions e a estrutura de contato *standard* em  $S^3$**

O exemplo mais simples de estrutura de contato trivial é  $(S^3, \xi_0)$ , onde  $\xi_0 = \ker \lambda_0$  e  $\lambda_0$  é a forma de Liouville (4.27). Chamaremos  $\xi_0$  de estrutura de contato *standard* em  $S^3$ . Para esta discussão é conveniente enxergar  $S^3$  como o grupo dos quatérnions unitários.

Façamos uma rápida revisão. Para nós um quatérnion é uma matriz complexa  $2 \times 2$  da forma

$$Q = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ -\bar{z}_1 & \bar{z}_0 \end{pmatrix}.$$

Como espaço vetorial complexo podemos identificar o conjunto  $\mathbb{H}$  dos quatérnions com  $\mathbb{C}^2$  via  $Q \simeq (z_0, z_1)$ . Além da soma e da multiplicação por um escalar complexo, os quatérnions também têm uma multiplicação que toma valores em  $\mathbb{H}$  dada pela multiplicação matricial. Denotando por  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{H}$  as matrizes

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

se pode calcular as relações familiares

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}.$$

Deste modo identificando

$$S^3 \simeq \left\{ \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ -\bar{z}_1 & \bar{z}_0 \end{pmatrix} \text{ tal que } |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1 \right\} \quad (5.8)$$

vemos  $S^3 \subset \mathbb{H}$ . O produto Hermitiano se escreve como

$$(Q, R) = \frac{1}{2} \text{tr } QR^*$$

e o produto interno Euclidiano é  $\Re(Q, R)$ . A norma é  $|Q| = \sqrt{\Re(Q, Q)}$  e facilmente se verifica que  $|QR| = |Q||R|$ , de onde se conclui que  $S^3$  é subgrupo (=  $SU(2)$ ). A forma de Liouville  $\lambda_0$  se escreve

$$\lambda_0|_Q \cdot X = \frac{1}{4} \Re \text{tr } \mathbf{i}QX^* = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{i}Q, X)$$

e a forma simplética canônica  $\omega_0 = d\lambda_0$  como

$$\omega_0(X_1, X_2) = \frac{1}{4} \Re (\text{tr } \mathbf{i}X_1X_2^* - \text{tr } \mathbf{i}X_2X_1^*).$$

Dado  $Q \in S^3$  o espaço tangente de  $S^3$  em  $Q$  é

$$T_Q S^3 = \{X \in \mathbb{H} \mid (Q, X) \in i\mathbb{R}\}$$

e  $TS^3$  pode ser globalmente trivializado pelo referencial global

$$Q \mapsto \{\mathbf{i}Q, \mathbf{j}Q, \mathbf{k}Q\}.$$

De fato das relações  $\mathbf{i}^* = -\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}^* = -\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}^* = -\mathbf{k}$  encontramos

$$\begin{aligned} (Q, \mathbf{i}Q) &= \frac{1}{2} \text{tr } Q(\mathbf{i}Q)^* = \frac{1}{2} \text{tr } QQ^*\mathbf{i}^* \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{i}QQ^* = -(\mathbf{i}Q, Q) = -\overline{(Q, \mathbf{i}Q)} \end{aligned}$$

daonde segue que  $\Re(Q, \mathbf{i}Q) = 0$ . Analogamente se pode calcular  $\Re(Q, \mathbf{j}Q) = \Re(Q, \mathbf{k}Q) = 0$ . Da fórmula para  $\omega_0$  calculamos

$$\begin{aligned} \omega_0(\mathbf{i}Q, \mathbf{j}Q) &= \frac{1}{4} \Re (\text{tr } \mathbf{i}\mathbf{i}Q(\mathbf{j}Q)^* - \text{tr } \mathbf{i}\mathbf{j}Q(\mathbf{i}Q)^*) \\ &= \frac{1}{4} \Re (\text{tr } QQ^*\mathbf{j} + \text{tr } \mathbf{i}\mathbf{j}QQ^*\mathbf{i}) \\ &= \frac{1}{4} \Re (\text{tr } QQ^*\mathbf{j} - \text{tr } \mathbf{j}QQ^*) = 0 \end{aligned}$$

e analogamente

$$\omega_0(\mathbf{i}Q, \mathbf{k}Q) = 0.$$

Estas duas identidades nos mostram que o campo de Reeb é  $Q \mapsto 2\mathbf{i}Q$ . Afirmamos que  $\xi_0 = \text{span}\{\mathbf{j}Q, \mathbf{k}Q\}$ . De fato,

$$\begin{aligned} \lambda_0|_Q \cdot \mathbf{j}Q &= \frac{1}{4} \Re \text{tr } \mathbf{i}Q(\mathbf{j}Q)^* = -\frac{1}{4} \Re \text{tr } \mathbf{i}QQ^*\mathbf{j} \\ &= -\frac{1}{4} \Re \text{tr } QQ^*\mathbf{j}\mathbf{i} = \frac{1}{4} \Re \text{tr } QQ^*\mathbf{k} \\ &= -\frac{1}{4} \Re \text{tr } Q(\mathbf{k}Q)^* = -\frac{1}{4} \Re (Q, \mathbf{k}Q) = 0. \end{aligned}$$

Para obter  $\mathbf{k}Q \in \ker \lambda_0$  as contas são análogas. Para finalmente concluir que  $\{\mathbf{j}Q, \mathbf{k}Q\}$  é referencial  $\omega_0$ -simplético calculamos

$$\begin{aligned} \omega_0(\mathbf{j}Q, \mathbf{k}Q) &= \frac{1}{4} \Re (\text{tr } \mathbf{i}\mathbf{j}Q(\mathbf{k}Q)^* - \text{tr } \mathbf{i}\mathbf{k}Q(\mathbf{j}Q)^*) \\ &= \frac{1}{2} (|\mathbf{k}Q|^2 + |\mathbf{j}Q|^2) = 1. \end{aligned}$$

O fluxo de Reeb é obviamente dado por

$$\phi_t : \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ -\bar{z}_1 & \bar{z}_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i2t} z_0 & e^{i2t} z_1 \\ -e^{-i2t} \bar{z}_1 & e^{-i2t} \bar{z}_0 \end{pmatrix}$$

em vista de  $X_{\lambda_0}|_Q = 2\mathbf{i}Q$ . Todas as órbitas são periódicas com período  $\pi$ , e são conhecidas como fibras de Hopf.

A título de exemplo, calculemos o número de auto-enlaçamento (veja Definição 4.4.24) de uma fibra de Hopf. É claro que todas elas têm o mesmo número de auto-enlaçamento. Consideremos a fibra

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{i2t} & 0 \\ 0 & e^{-i2t} \end{pmatrix}.$$

O campo  $\frac{1}{2}\mathbf{j}\dot{\gamma}$  ao longo de  $\gamma$  se escreve como

$$\frac{1}{2}\mathbf{j}\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i2t} \\ -e^{i2t} & 0 \end{pmatrix} = \partial_\epsilon \Gamma(0, t)$$

onde

$$\Gamma(\epsilon, t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\epsilon^2} e^{i2t} & \epsilon e^{-i2t} \\ -\epsilon e^{i2t} & \sqrt{1-\epsilon^2} e^{-i2t} \end{pmatrix}.$$

Para  $\epsilon > 0$  pequeno é fácil calcular o número de enlaçamento de  $\Gamma(\epsilon, t)$  com  $\gamma(t)$  (veja [30] para a definição): este número vale  $-1$  pois coincide com a variação angular total de  $\epsilon e^{-i2t}$ ,  $t \in [0, \pi]$ . Resumindo

**Lema 5.2.6.** *Uma fibra de Hopf em  $(S^3, \xi_0)$  tem número de auto-enlaçamento igual a  $-1$ .*

**Observação 5.2.7.** *É um resultado clássico de topologia que a classe de isotopia transversal das fibras de Hopf são caracterizadas pelo seu número de auto-enlaçamento.*

### Seções globais para fluxos de Reeb em $(S^3, \xi_0)$

No parágrafo anterior usamos a linguagem dos quatérnions para mostrar que a estrutura de contato *standard*  $\xi_0$  em  $S^3$  admite trivialização simplética global. Qualquer forma de contato  $\lambda$  em  $S^3$  induzindo  $\xi_0$  se escreve como  $\lambda = f\lambda_0|_{TS^3}$ , onde  $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  é suave. A menos de uma reflexão podemos supor, sem perda de generalidade, que  $f > 0$ .

**Teorema 5.2.8.** *[16, Hofer, Wysocki e Zehnder] A dinâmica de Reeb associada a uma forma de contato  $f\lambda_0|_{TS^3}$  dinamicamente convexa possui uma seção global tipo-disco  $D$ . A órbita  $\partial D$  tem índice de Conley-Zehnder igual a 3.*

**Observação 5.2.9.** *Segue do Teorema 5.2.4 que, nas condições do enunciado acima, o fluxo de Reeb tem ou duas ou infinitas órbitas periódicas.*

Como visto na seção 4.4.2, existe uma bijeção entre funções suaves  $f : S^3 \rightarrow (0, +\infty)$  e hipersuperfícies  $S \subset \mathbb{R}^4$  estreladas em relação à origem, e dada uma tal  $f$  existe um difeomorfismo  $S^3 \rightarrow S$  tal que o *pull-back* de  $\lambda_0|_{TS}$  é  $f\lambda_0|_{TS^3}$ . Denotaremos  $S$  por  $S_f$  e o chamaremos de o nível estrelado associado a  $f$ . Logo, as dinâmicas Hamiltonianas nas hipersuperfícies em  $\mathbb{R}^4$  estreladas em relação à origem são exatamente as dinâmicas dos fluxos de Reeb de formas de contato em  $S^3$  induzindo sua estrutura de contato *standard*. O Teorema 5.2.3 é consequência do próximo enunciado.

**Teorema 5.2.10.** *[16, Hofer, Wysocki e Zehnder] Se  $S_f$  é estritamente convexa, isto é  $S_f$  é bordo de um conjunto estritamente convexo (veja seção 5.2.1), então  $f\lambda_0|_{TS^3}$  é dinamicamente convexa.*

**Definição de convexidade dinâmica no caso geral**

Seja  $\lambda$  uma forma de contato em uma variedade  $M$  e seja  $P = (x, T)$  órbita periódica contrátil do campo de Reeb  $X_\lambda$ . Neste caso existe aplicação

$$u : \mathbb{D} \rightarrow M \text{ satisfazendo } u(e^{i2\pi t}) = x_T(t)$$

onde  $x_T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$  é definida por  $x_T(t) = x(Tt)$ . O mapa  $u$  será chamado de um *capping disk* para  $P$ . Denotando por  $\xi = \ker \lambda$  a estrutura de contato, o fibrado simplético  $u^*\xi \rightarrow \mathbb{D}$  é trivial já que sua base é contrátil, e  $u^*\xi|_{\partial\mathbb{D}}$  se identifica com  $(x_T)^*\xi$  naturalmente.

Uma trivialização simplética  $\sigma$  de  $u^*\xi$  induz naturalmente uma trivialização simplética  $\tau_\sigma$  de  $(x_T)^*\xi$ . Não é difícil provar, usando as propriedades mais básicas do grau topológico, que se  $\bar{\sigma}$  for outra trivialização simplética de  $u^*\xi$  então  $\tau_{\bar{\sigma}}$  e  $\tau_\sigma$  são homotópicas. Mais precisamente, seja  $p_1 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  a projeção na primeira coordenada. Então existe trivialização simplética

$$\hat{\tau} : p_1^*(x_T)^*\xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n}$$

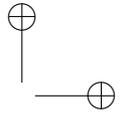
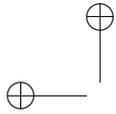
satisfazendo  $\hat{\tau}|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}} \equiv \tau_\sigma$  e  $\hat{\tau}|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{1\}} \equiv \tau_{\bar{\sigma}}$ . Do axioma **Homotópico** do Teorema 5.1.3 segue que  $\mu_{CZ}(P, \tau_\sigma) = \mu_{CZ}(P, \tau_{\bar{\sigma}})$ , e denotaremos este inteiro por  $\mu_{CZ}(P, u)$ .

Considere uma outra aplicação  $u' : \mathbb{D} \rightarrow M$  tal que  $u'(e^{i2\pi t}) = x_T(t)$ , e seja  $\sigma'$  uma trivialização de  $(u')^*\xi$ . Enxergando  $S^2 = \mathbb{D} \# \mathbb{D}$ , isto é  $S^2 = \mathbb{D} \sqcup \mathbb{D} / \sim$  onde um ponto  $z$  no bordo de um disco é identificado com  $\bar{z}$  no bordo do outro, podemos considerar a aplicação  $u' \# \bar{u}$  definida como  $z \mapsto u'(z)$  no primeiro disco e  $z \mapsto u(\bar{z})$  no segundo. Considere o *loop*  $\Phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow Sp(2n)$ ,  $\Phi(t) = (\tau_{\sigma'})_t \circ (\tau_\sigma)_t^{-1}$ . O índice de Maslov de  $\Phi$  coincide com a primeira classe de Chern do fibrado simplético  $(\xi, d\lambda) \rightarrow M$  calculada em  $[u' \# \bar{u}]$ . Logo, se  $c_1(\xi)$  se anula em  $[u' \# \bar{u}]$ , que sempre será o caso se  $u$  e  $u'$  forem homotópicos módulo  $\partial\mathbb{D}$ , concluiremos  $\mu_{CZ}(P, u) = \mu_{CZ}(P, u')$ . Resumindo

$$c_1(\xi) \cdot [u' \# \bar{u}] = \mu^n(\Phi) = 0 \Rightarrow \mu_{CZ}(P, u) = \mu_{CZ}(P, u'). \quad (5.9)$$

Fica provado o seguinte lema.

**Lema 5.2.11.** *Se  $c_1(\xi)$  se anula em  $\pi_2(M)$  então temos bem definido um índice de Conley-Zehnder para órbitas periódicas contráteis  $P$  de*



$X_\lambda$  calculado com respeito a uma trivialização de  $(x_T)^*\xi$  induzida por um capping disk de  $P$ . Este índice será denotado por

$$\mu_{CZ}(P, \text{disco}).$$

**Definição 5.2.12.** [17, Hofer, Wysocki e Zehnder] *Seja  $\lambda$  forma de contato na 3-variedade  $M$ , e seja  $\xi = \ker \lambda$  a estrutura de contato. Diremos que  $\lambda$  é dinamicamente convexa se  $c_1(\xi)$  se anula em  $\pi_2(M)$  e  $\mu_{CZ}(P, \text{disco}) \geq 3$  para toda órbita periódica contrátil  $P$  do fluxo de Reeb.*

### 5.2.3 Topologia e convexidade dinâmica

Para buscar relações entre topologia e dinâmica podemos nos perguntar até que ponto as propriedades de um fluxo em uma 3-variedade a caracterizam, a menos de um difeomorfismo. Por exemplo, no caso bidimensional, a contagem (algébrica) de zeros de campos de vetores satisfazendo a propriedade de que todos os zeros são isolados caracterizam as superfícies, isto é, superfícies compactas, conexas e sem bordo são determinadas pela sua característica de Euler. Em dimensão 3 este procedimento não leva a nada pois a característica de Euler se anula, de fato, toda 3-variedade compacta, conexa, sem bordo e orientável admite um campo de vetores sem zeros. Veremos como a convexidade dinâmica pode ser usada para caracterizar uma classe especial de 3-variedades: os espaços lente<sup>1</sup>.

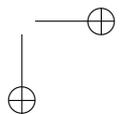
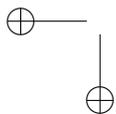
Na verdade a primeira obstrução topológica obtida da convexidade dinâmica foi o seguinte teorema.

**Teorema 5.2.13** (Hofer, Wysocki, Zehnder). *Seja  $\lambda$  uma forma de contato em uma 3-variedade compacta e sem bordo  $M$ . Então  $\pi_2(M)$  é trivial e  $\xi = \ker \lambda$  é tight<sup>2</sup>.*

Começemos com um exemplo particular de teorema de caracterização.

<sup>1</sup>Do inglês *lens spaces*.

<sup>2</sup>Em dimensão 3 estruturas de contato são *tight* ou *overtwisted*. Esta classificação foi introduzida por Eliashberg e joga um papel importantíssimo em topologia de contato. Um disco *overtwisted* em  $(M, \xi)$  é um disco mergulhado  $D \subset M$  tal que  $T\partial D \subset \xi$  e  $T_p D \neq \xi_p, \forall p \in \partial D$ . Dizemos que  $\xi$  é *overtwisted* se admite um disco *overtwisted*. Se tal objeto não existir dizemos que  $\xi$  é *tight*.



**Teorema 5.2.14.** [18, 19, Hryniewicz] *Uma 3-variedade de contato  $(M, \xi)$  compacta, conexa e sem bordo é contactomorfa a  $(S^3, \xi_0)$  se, e somente se,  $\xi = \ker \lambda$  para uma forma de contato  $\lambda$  dinamicamente convexa cujo fluxo de Reeb admite uma órbita periódica  $P$  que é nó trivial e satisfaz  $\text{sl}(P) = -1$ .*

O enunciado acima é uma caracterização dinâmica de  $(S^3, \xi_0)$ . Sua generalização para espaços lente requer uma definição. Aqui  $\text{sl}(P)$  é calculado usando um *capping disk*. Note que  $\text{sl}(P)$  não depende da escolha do *capping disk* pois o Teorema 5.2.13 diz que  $\pi_2(M)$  é trivial, veja o Lema 5.2.11.

**Definição 5.2.15.** [15, Hofer, Wysocki e Zehnder] *Seja  $M$  uma 3-variedade e  $K \subset M$  um nó. Dado um inteiro  $p \geq 1$ , dizemos que  $K$  é  $p$ -trivial se existir uma imersão suave  $u : \mathbb{D} \rightarrow M$  satisfazendo*

- $u|_{\mathbb{D} \setminus \partial \mathbb{D}} : \mathbb{D} \setminus \partial \mathbb{D} \rightarrow M \setminus K$  é mergulho próprio,
- $u|_{\partial \mathbb{D}} : \partial \mathbb{D} \rightarrow K$  é um  $p$ -recobrimento.

A aplicação  $u$  com estas propriedades é dita um  $p$ -disco para  $K$ .

Um nó 1-trivial é apenas um nó-trivial no sentido usual. Por exemplo, uma fibra de Hopf é 1-trivial, e o vetor velocidade de um grande círculo de  $S^2$  é nó 2-trivial em  $T^1 S^2$ .

**Exercício 5.2.16.** *Prove que os vetores velocidade de um grande círculo de  $S^2$  percorrido uma vez formam um nó 2-trivial em  $T^1 S^2$ . Dica: utilize o recobrimento duplo (5.18) e o fato de que fibras de Hopf em  $S^3$  são nós triviais.*

**Definição 5.2.17.** *Sejam  $p \geq q \geq 1$  inteiros relativamente primos. Em  $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$  podemos definir uma ação livre de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  em  $S^3$  gerada pelo difeomorfismo*

$$(z, w) \mapsto (e^{i2\pi/p} z, e^{i2\pi q/p} w). \tag{5.10}$$

O espaço de órbitas desta ação é o espaço lente<sup>3</sup>  $L(p, q)$ .

<sup>3</sup>Existem muitas outras maneiras de definir  $L(p, q)$ .

A forma  $\lambda_0$  (4.27) é invariante pela ação do mapa (5.10) e, portanto, desce a uma 1-forma de contato em  $L(p, q)$  denotada por  $\tilde{\lambda}_0$ . Denotaremos por  $\xi_{\text{std}} = \ker \tilde{\lambda}_0$  a estrutura de contato associada, chamada de *standard*.

**Exercício 5.2.18.** *Prove que  $(L(2, 1), \xi_{\text{std}})$  é contactomorfo ao fibrado unitário  $(F^{-1}, \xi_F)$  de qualquer métrica Finsler  $F$  em  $S^2$ .*

**Teorema 5.2.19.** [20, Hryniewicz, Licata, Salomão] *Seja  $(M, \xi)$  uma 3-variedade de contato compacta, sem bordo e conexa. São equivalentes:*

- $(M, \xi)$  é contactomorfa e  $(L(p, q), \xi_{\text{std}})$ .
- $\xi = \ker \lambda$  para alguma forma de contato  $\lambda$  dinamicamente convexa cujo fluxo de Reeb admite uma órbita periódica  $P$  que é um nó  $p$ -trivial, tem número de auto-enlaçamento  $-p$  e monodromia  $-q$ .

A monodromia é um invariante de nós  $p$ -triviais, veja mais detalhes em [20].

### 5.2.4 Convexidade dinâmica e fluxos geodésicos em $S^2$

Seja  $M$  uma  $n$ -variedade e

$$F : TM \rightarrow [0, +\infty)$$

uma métrica Finsler. Já foi estudado no capítulo 4, veja o Teorema 4.4.10, que a transformada de Legendre  $T_L : TM \rightarrow T^*M$  associada à Lagrangiana  $L = \frac{1}{2}F^2$  pode ser usada para puxar a 1-forma tautológica  $\alpha_{\text{taut}} \in \Omega^1(T^*M)$  para o fibrado tangente, e o resultado é a forma de Hilbert (3.2):  $(T_L)^*\alpha_{\text{taut}} = \lambda_H$ . A projeção no ponto base será denotada por  $\pi : TM \rightarrow M$ . Dado  $v \in TM_0$  temos uma decomposição  $T_v TM = \mathcal{V}_v \oplus \mathcal{H}_v$  onde  $\mathcal{V}_v = \ker d\pi|_v$  e  $\mathcal{H}_v$  é a fibra do fibrado horizontal. O campo radial  $C$  em  $\mathcal{V}_v$  é de Liouville e  $\lambda_H = i_C d\lambda_H$ , conforme estudado nos capítulos anteriores. A consequência é que o fibrado unitário  $T^1M = F^{-1}(1)$  admite a forma de contato  $\lambda_H$  cujo

campo de Reeb coincide com o *spray* geodésico  $S$ . A estrutura de contato associada a  $\lambda_H$  em  $T^1M$  será denotada por

$$\xi_F = \ker \lambda_H.$$

Também diremos que  $\xi_F$  é a estrutura de contato associada a  $F$ . O fluxo de  $S$  será denotado por  $\varphi_t^S$ .

Dado  $v \in T^1M$  considere

$$\langle v \rangle^\perp = \{w \in T_{\pi(v)}M \mid g_v(v, w) = 0\}.$$

Usando os isomorfismos lineares

$$i_{\mathcal{V}}^v : T_{\pi(v)}M \rightarrow \mathcal{V}_v \quad \text{e} \quad (d\pi|_{\mathcal{H}_v})^{-1} : T_{\pi(v)}M \rightarrow \mathcal{H}_v$$

podemos definir

$$\langle v \rangle_{\mathcal{V}}^\perp = i_{\mathcal{V}}^v(\langle v \rangle^\perp) \quad \langle v \rangle_{\mathcal{H}}^\perp = (d\pi|_{\mathcal{H}_v})^{-1}(\langle v \rangle^\perp).$$

**Lema 5.2.20.** *Temos decomposições*

$$TT^1M = \mathbb{R}S \oplus \xi_F, \quad \xi_F|_v = \langle v \rangle_{\mathcal{V}}^\perp \oplus \langle v \rangle_{\mathcal{H}}^\perp. \quad (5.11)$$

*Ainda mais,  $\langle v \rangle_{\mathcal{V}}^\perp$  e  $\langle v \rangle_{\mathcal{H}}^\perp$  são distribuições Lagrangianas em  $\xi_F$ .*

*Demonstração.* A decomposição  $TT^1M = \mathbb{R}S \oplus \xi_F$  vem simplesmente do fato de que  $\lambda_H$  define forma de contato no fibrado unitário, com campo de Reeb  $S$  e estrutura de contato  $\xi_F$ . De  $\lambda_H|_v \cdot \zeta = g_v(v, d\pi \cdot \zeta)$  segue que  $\lambda_H$  se anula em  $\mathcal{V}$  e, em particular, também em  $\langle v \rangle_{\mathcal{V}}^\perp$ . Tome  $\zeta \in \langle v \rangle_{\mathcal{H}}^\perp$  arbitrário. Então, por definição, existe  $w \in \langle v \rangle^\perp$  tal que  $d\pi \cdot \zeta = w$ . Logo  $0 = g_v(v, w) = g_v(v, d\pi \cdot \zeta) = \lambda_H \cdot \zeta$ . Uma contagem de dimensões conclui a prova de  $\xi_F|_v = \langle v \rangle_{\mathcal{V}}^\perp \oplus \langle v \rangle_{\mathcal{H}}^\perp$ . As distribuições  $\langle v \rangle_{\mathcal{V}}^\perp$  e  $\langle v \rangle_{\mathcal{H}}^\perp$  são Lagrangianas (em  $\xi_F$ ) porque  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{H}$  são Lagrangianas.  $\square$

**Observação 5.2.21.** *A fórmula (5.11) para  $\xi_F$ , a representação do fluxo linearizado  $d\varphi_t^S$  dada pelo Teorema 3.4.6 e o fato geral de que o fluxo de Reeb preserva a forma de contato recuperam, quando combinados, o fato bem conhecido de que campos de Jacobi ao longo de uma geodésica  $\gamma$  com condições iniciais  $g_\gamma$ -perpendiculares a  $\dot{\gamma}$  permanecem  $g_\gamma$ -perpendiculares a  $\dot{\gamma}$ .*

A partir de agora, a menos dito explicitamente o contrário,  $M$  será uma superfície orientada. Neste caso para todo  $v \in T^1M$  existe único vetor  $v^\perp \in \langle v \rangle^\perp$  tal que  $\{v, v^\perp\}$  é base  $g_v$ -ortonormal positiva de  $T_{\pi(v)}M$ . Podemos assim definir um referencial global  $v \mapsto \{v_{\mathcal{V}}^\perp, v_{\mathcal{H}}^\perp\}$  para  $\xi_F$  por

$$v_{\mathcal{V}}^\perp := i_{\mathcal{V}}^v(v^\perp), \quad v_{\mathcal{H}}^\perp := (d\pi|_{\mathcal{H}_v})^{-1}(v^\perp). \quad (5.12)$$

**Exercício 5.2.22.** *Verifique que  $\{v_{\mathcal{V}}^\perp, v_{\mathcal{H}}^\perp\} \in \xi_F|_v$  é base  $d\lambda_H$ -simplética.*

**Exercício 5.2.23.** *Seja  $\gamma(t)$  uma geodésica de  $(M, F)$ . Prove que  $\dot{\gamma}(t)^\perp$  é paralelo, isto é,  $\frac{D\dot{\gamma}^\perp}{dt} \equiv 0$ .*

De acordo com o Lema 5.2.20 para cada  $v \in T^1M$  e  $\zeta \in \xi_F|_v$  podemos encontrar  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $\zeta = av_{\mathcal{V}}^\perp + bv_{\mathcal{H}}^\perp$ . Neste caso, relembrando o isomorfismo  $\Theta_v : T_vTM \rightarrow T_{\pi(v)}M \times T_{\pi(v)}M$  (3.25), temos

$$\Theta_v \cdot \zeta = (av^\perp, bv^\perp). \quad (5.13)$$

Seja  $\gamma(t)$  uma geodésica de  $(M, F)$  parametrizada por comprimento de arco. Então  $t \mapsto \dot{\gamma}(t)$  é trajetória do fluxo de Reeb (geodésico) em  $T^1M$ ,  $\dot{\gamma}(t) = \varphi_t^S(\dot{\gamma}(0))$ . De acordo com o Teorema 3.4.6, dado  $\zeta \in \xi_F|_{\dot{\gamma}(0)}$  podemos escrever

$$d\varphi_t^S \cdot \zeta = \Theta_{\dot{\gamma}}^{-1} \cdot \left( \frac{D\dot{\gamma}J}{dt}, J \right)$$

onde  $J(t)$  é o único campo de Jacobi com condições iniciais  $\Theta_{\dot{\gamma}(0)} \cdot \zeta = (\frac{D\dot{\gamma}J}{dt}(0), J(0))$ . Como também sabemos que  $d\varphi_t^S$  preserva  $\xi_F$ , se pode concluir que  $J(t)$  é sempre  $g_{\dot{\gamma}}$ -ortogonal a  $\dot{\gamma}(t)$ , e encontramos função real  $f(t)$  tal que

$$J = f\dot{\gamma}^\perp \Rightarrow \frac{D\dot{\gamma}J}{dt} = \dot{f}\dot{\gamma}^\perp(t).$$

Aqui utilizamos o Exercício 5.2.23. Resumindo, concluímos que repetando o vetor  $d\varphi_t^S \cdot \zeta \in \xi_F|_{\dot{\gamma}}$  com respeito ao referencial global (5.12) obtemos uma curva em  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$  dada por

$$u(t) = (\dot{f}, f) \simeq \dot{f} + if. \quad (5.14)$$

A equação diferencial satisfeita por  $f$  é

$$\begin{aligned} 0 &= g_\gamma \left( \frac{D_\gamma^2 J}{dt^2} + R^\dot{\gamma}(J), \dot{\gamma}^\perp \right) \\ &= g_\gamma \left( \ddot{f} \dot{\gamma}^\perp, \dot{\gamma}^\perp \right) + g_\gamma \left( R^\dot{\gamma}(J), \dot{\gamma}^\perp \right) \\ &= \ddot{f} + K(T_\gamma M, \dot{\gamma})f. \end{aligned}$$

Equivalentemente,  $u(t)$  satisfaz

$$\dot{u}(t) = iS(t)u(t) \tag{5.15}$$

onde

$$S(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K(t) \end{pmatrix}, \quad K(t) = K(T_{\gamma(t)}M, \dot{\gamma}(t))$$

e  $i$  representa a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Escrevendo  $u = \rho e^{i\theta}$  calculamos

$$\dot{\theta} = \Re \frac{\dot{u}}{iu} = \Re \frac{-i\dot{u}\bar{u}}{|u|^2} = \Re \frac{(Su)\bar{u}}{|u|^2} = \frac{\langle Su, u \rangle}{|u|^2}$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno Euclidiano canônico de  $\mathbb{C}$ . Como  $S$  é diagonal estimamos

$$\dot{\theta}(t) \geq \min\{1, K(t)\}. \tag{5.16}$$

Usando o referencial global (5.12) podemos definir o índice de Conley-Zehnder para órbitas periódicas de  $\varphi_t^S$  em  $T^1M$ . Estas são precisamente curvas  $t \in \mathbb{R}/\ell\mathbb{Z} \mapsto \dot{\gamma}(t)$  onde  $\gamma(t)$  é geodésica parametrizada por comprimento de arco, com comprimento  $\ell$  e satisfazendo  $\dot{\gamma}(\ell) = \dot{\gamma}(0)$ . Tais geodésicas serão ditas fechadas. Note que  $\gamma(\ell) = \gamma(0)$  não é suficiente para  $\gamma$  ser fechada, as velocidades também precisam ser periódicas. Quando  $\gamma(\ell) = \gamma(0)$  mas possivelmente  $\dot{\gamma}(\ell) \neq \dot{\gamma}(0)$  diremos que  $\gamma$  é um *loop* geodésico fechado.

**Teorema 5.2.24.** [12, Harris, Paternain] *Seja  $F$  métrica Finsler em  $S^2$  com reversibilidade  $r \geq 1$ . Se todas as curvaturas bandeira  $K$  satisfazem*

$$\left(\frac{r}{r+1}\right)^2 < K \leq 1$$

então  $\lambda_H$  é dinamicamente convexa em  $T^1S^2$ .

*Demonstração.* Ao multiplicarmos uma métrica Finsler por uma constante  $c > 0$ , os comprimentos saem multiplicados por  $c$  e as curvaturas bandeira saem multiplicadas por  $c^{-2}$ . Sendo assim, nas hipóteses do teorema se multiplicarmos  $F$  por  $r(r+1)^{-1}$  obtemos uma nova métrica  $\tilde{F}$  satisfazendo que, pelo Lema 3.10.9, o comprimento de qualquer *loop* geodésico fechado é  $\geq \pi$ . Note que uma geodésica  $\tilde{\gamma}$  fechada e contrátil de  $\tilde{F}$  consiste de pelo menos dois *loops* fechados pois, caso contrário,  $\tilde{\gamma}$  seria curva simples em  $S^2$  e o vetor velocidade  $\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}$  descreveria o gerador de  $\pi_1(T^1S^2, \text{pt}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  e não seria contrátil. Sendo assim, tal  $\tilde{\gamma}$  tem comprimento  $\geq 2\pi$ . As curvaturas bandeira  $\tilde{K}$  de  $\tilde{F}$  satisfazem  $1 < \tilde{K} \leq ((r+1)/r)^2$  de onde concluímos, utilizando a estimativa (5.16), que o intervalo de rotação  $I$  (veja Definição 5.1.4) associado à parametrização da dinâmica linearizada da órbita periódica  $\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}$  com respeito ao referencial global (5.12) satisfaz  $I \subset (1, +\infty)$ , isto é, seu índice de Conley-Zehnder é  $\geq 3$ . No entanto, multiplicar por  $c$  define um difeomorfismo entre os fibrados unitários de  $F$  e de  $\tilde{F}$  que conjuga seus fluxos geodésicos a menos de uma reparametrização constante das órbitas. Logo as geodésicas fechadas e contráteis de  $F$  também são órbitas com índice de Conley-Zehnder  $\geq 3$ , como desejado.  $\square$

O elegante teorema acima em conjunto com o Teorema 5.2.8 traz consequências profundas para a dinâmica do fluxo geodésico. Estes desdobramentos vêm da relação entre fluxos geodésicos em  $S^2$  e fluxos de Reeb em  $(S^3, \xi_0)$  via um recobrimento duplo  $S^3 \rightarrow T^1S^2$  bem conhecido que descreveremos abaixo.

As coordenadas cartesianas em  $\mathbb{R}^3$  serão denotadas por  $(x_1, x_2, x_3)$  e denotaremos por  $g_0 = \sum_{i=1}^3 dx_i \otimes dx_i$  o produto interno euclidiano usual. Veremos  $S^3 \subset \mathbb{H}$  como o subgrupo dos quatérnions unitários (5.8). Enxergamos  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$  como quatérnions puramente

imaginários via a identificação

$$x = (x_1, x_2, x_3) \simeq \begin{pmatrix} ix_3 & x_1 + ix_2 \\ -x_1 + ix_2 & -ix_3 \end{pmatrix} = \mathbf{i}x_3 + \mathbf{j}x_1 + \mathbf{k}x_2. \quad (5.17)$$

Seguindo estes acordos,  $S^2$  é o subconjunto dos quatérnions unitários e puramente imaginários. O fibrado tangente  $T\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  será visto como um conjunto de pares  $(x, v)$  onde  $x$  é o ponto base, e

$$T^1S^2 = \{(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid g_0(x, x) = g_0(v, v) = 1, g_0(x, v) = 0\}$$

é o fibrado unitário associado à métrica  $g_0$ . Consideremos a aplicação

$$D : S^3 \rightarrow T^1S^2 \quad Q \mapsto (Q^*\mathbf{j}Q, -Q^*\mathbf{k}Q) \quad (5.18)$$

onde usamos a identificação (5.17).

**Exercício 5.2.25.** Verifique que  $D$  de fato toma valores em  $T^1S^2$ .

Em  $T^1S^2$  temos a 1-forma

$$\bar{\lambda}_0 = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 \quad (5.19)$$

e em  $S^3$  temos a forma de Liouville  $\lambda_0$  (4.27).

**Lema 5.2.26.** Vale a fórmula

$$D^*\bar{\lambda}_0 = 4\lambda_0. \quad (5.20)$$

*Demonstração.* Denotaremos  $X = x_1 + ix_2$  e  $V = v_1 + iv_2$ , e dotaremos  $\mathbb{C}^2$  de coordenadas  $(z, w)$ , de forma que a identificação  $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{H}$  seja dada por

$$(z, w) \simeq Q = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Calculando obtemos

$$Q^*\mathbf{j}Q = \begin{pmatrix} zw - \bar{z}\bar{w} & \bar{z}^2 + w^2 \\ -z^2 - \bar{w}^2 & -zw + \bar{z}\bar{w} \end{pmatrix}$$

e

$$-Q^*\mathbf{k}Q = \begin{pmatrix} izw + i\bar{z}\bar{w} & -i\bar{z}^2 + iw^2 \\ i\bar{w}^2 - iz^2 & -izw - i\bar{z}\bar{w} \end{pmatrix}$$

de onde se conclui que

$$\begin{aligned} D^*X &= \bar{z}^2 + w^2 \\ D^*x_3 &= i(\bar{z}\bar{w} - zw) \\ D^*V &= i(w^2 - \bar{z}^2) \\ D^*v_3 &= zw + \bar{z}\bar{w}. \end{aligned}$$

Consequentemente  $D^*dX = dD^*X = 2\bar{z}d\bar{z} + 2wdw$ ,

$$D^*(\bar{V}dX) = 2i(|z|^2z - \bar{w}^2\bar{z})d\bar{z} + 2i(z^2w - |w|^2\bar{w})dw$$

e conjugando temos

$$D^*(Vd\bar{X}) = 2i(w^2z - |z|^2\bar{z})dz + 2i(|w|^2w - \bar{z}^2\bar{w})d\bar{w}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} D^*(v_1dx_1 + v_2dx_2) &= \frac{1}{2}D^*(\bar{V}dX + Vd\bar{X}) \\ &= i(|z|^2z - \bar{w}^2\bar{z})d\bar{z} + i(w^2z - |z|^2\bar{z})dz \\ &\quad + i(|w|^2w - \bar{z}^2\bar{w})d\bar{w} + i(z^2w - |w|^2\bar{w})dw. \end{aligned}$$

Por outro lado de  $D^*dx_3 = dD^*x_3 = i(\bar{w}d\bar{z} + \bar{z}d\bar{w} - wdz - zdw)$  tiramos que

$$\begin{aligned} D^*(v_3dx_3) &= i(z|w|^2 + \bar{z}\bar{w}^2)d\bar{z} + i(-zw^2 - \bar{z}|w|^2)dz \\ &\quad + i(|z|^2w + \bar{z}^2\bar{w})d\bar{w} + i(-|z|^2\bar{w} - z^2w)dw. \end{aligned}$$

Somando estas duas últimas fórmulas obtemos

$$\begin{aligned} D^*\bar{\lambda}_0 &= D^*(v_1dx_1 + x_2dx_2 + v_3dx_3) \\ &= (iz(|z|^2 + |w|^2) + i\bar{z}\bar{w}^2 - i\bar{z}\bar{w}^2)d\bar{z} \\ &\quad + (-i\bar{z}(|z|^2 + |w|^2) + iw^2z - izw^2)dz \\ &\quad + (iw(|w|^2 + |z|^2) - i\bar{z}^2\bar{w} + i\bar{z}^2\bar{w})d\bar{w} \\ &\quad + (-i\bar{w}(|w|^2 + |z|^2) - iz^2w + iz^2w)dw \\ &= i(zd\bar{z} - \bar{z}dz + wd\bar{w} - \bar{w}dw) \\ &= 4\lambda_0. \end{aligned}$$

□

**Lema 5.2.27.** *Sejam  $F_1, F_2$  duas métricas Finsler em uma variedade  $M$  qualquer. Então existe um contactomorfismo*

$$\phi : (F_1^{-1}(1), \xi_{F_1}) \rightarrow (F_2^{-1}(1), \xi_{F_2}). \quad (5.21)$$

*Demonstração.* Denotemos as transformadas de Legendre associadas a  $F_1, F_2$  por  $T_1, T_2$ , respectivamente, de forma que as co-métricas duais são dadas por  $F_i^* \circ T_i = F_i$ . Defina um difeomorfismo entre co-fibrados unitários  $\psi : (F_1^*)^{-1}(1) \rightarrow (F_2^*)^{-1}(1)$  por

$$\psi(\varphi) = \frac{\varphi}{F_2^*(\varphi)}. \quad (5.22)$$

Então é óbvio que  $\tilde{\pi} \circ \psi = \tilde{\pi}$ , onde  $\tilde{\pi} : T^*M \rightarrow M$  é a projecção no ponto base. Logo, dados  $\varphi \in (F_1^*)^{-1}(1)$  e  $\zeta \in T_\varphi(F_1^*)^{-1}(1)$  temos

$$\begin{aligned} \psi^* \alpha_{\text{taut}}|_\varphi \cdot \zeta &= \alpha_{\text{taut}}|_{\varphi/F_2^*(\varphi)} \cdot d\psi \cdot \zeta \\ &= \frac{1}{F_2^*(\varphi)} \varphi \cdot d\tilde{\pi} \cdot d\psi \cdot \zeta \\ &= \frac{1}{F_2^*(\varphi)} \varphi \cdot d\tilde{\pi} \cdot \zeta \\ &= \frac{1}{F_2^*(\varphi)} \alpha_{\text{taut}}|_\varphi \cdot \zeta \end{aligned}$$

ou seja,  $\psi^* \alpha_{\text{taut}} = \alpha_{\text{taut}}/F_2^*$  e  $\psi$  é um contactomorfismo. Sabemos do Teorema 4.4.10 que as transformadas de Legendre são contactomorfismos entre fibrados e co-fibrados unitários. Definindo

$$\phi = T_2^{-1} \circ \psi \circ T_1$$

obtemos a conclusão desejada.  $\square$

**Lema 5.2.28.** *Seja  $F$  qualquer métrica Finsler em  $S^2$ . Então existe um recobrimento duplo*

$$D_F : S^3 \rightarrow F^{-1}(1)$$

e uma função  $f : S^3 \rightarrow (0, +\infty)$  suave satisfazendo

$$D_F^* \lambda_H = f \lambda_0$$

onde  $\lambda_H$  é a forma de Hilbert associada a  $F$  e  $\lambda_0$  é a forma de Liouville (4.27). Ainda mais,  $f$  satisfaz  $f(-x) = f(x) \forall x \in S^3$ .

*Demonstração.* Seja  $F_0$  a métrica Finsler “redonda” de  $S^2$ , isto é,  $F_0 = \sqrt{g_0(\cdot, \cdot)}$  onde  $g_0$  é o produto interno euclidiano de  $\mathbb{R}^3$  (aqui entendemos  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  da maneira usual). A forma de Hilbert associada a  $F_0$  é a forma  $\bar{\lambda}_0$  dada em (5.19). Pelo lema anterior encontramos contactomorfismo  $\phi : F_0^{-1}(1) \rightarrow F^{-1}(1)$  satisfazendo  $\phi^* \lambda_H = h \bar{\lambda}_0$ , para alguma  $h : F_0^{-1}(1) \rightarrow (0, +\infty)$ . Aplicando o Lema 5.2.26 concluímos que  $(\phi \circ D)^* \lambda_H = D^* \phi^* \lambda_H = 4(h \circ D) \lambda_0$ . É óbvio que  $f = 4(h \circ D)$  é invariante pela aplicação antípoda pois  $D(-x) = D(x)$ . Tomando  $D_F = \phi \circ D$  a prova termina.  $\square$

**Teorema 5.2.29.** [12, Harris, Paternain] *Se as curvaturas bandeira  $K$  de uma métrica Finsler  $F$  em  $S^2$  satisfazem*

$$\left( \frac{r}{r+1} \right)^2 < K \leq 1$$

onde  $r \geq 1$  é a reversibilidade de  $F$ , então existem ou duas ou infinitas geodésicas fechadas.

*Demonstração.* Consequência direta<sup>4</sup> do Teorema 5.2.24, em conjunto com o Lema 5.2.28 e com o fortíssimo Teorema 5.2.8.  $\square$

Vale observar que no teorema acima geodésicas geometricamente iguais mas percorridas no sentido reverso devem ser contadas como distintas em vista da possível falta de reversibilidade. É claro que não contamos como diferentes geodésicas que são iteradas (positivas) de uma mesma geodésica em comum.

Em dinâmica simplética são muito comuns os resultados de existência de órbitas periódicas, mas são poucos os resultados que trazem informação sobre o tipo das geodésicas encontradas<sup>5</sup>. Veremos agora um exemplo de como a convexidade dinâmica pode ser usada para

<sup>4</sup>A menos de um pequeno detalhe que não foi mencionado em [12]: a princípio apenas encontramos duas ou infinitas órbitas periódicas do fluxo geodésico levantado para  $S^3$ . No caso de haver duas órbitas e elas serem simétricas pela aplicação antípoda, então seriam iguais suas projeções em  $F^{-1}(1)$  e encontraríamos apenas uma geodésica fechada. No entanto, um resultado de Rademacher [34] impede que isto ocorra.

<sup>5</sup>Esta é uma das vantagens dos teoremas 5.2.3 e 5.2.8 sobre outros teoremas de existência da área: os bordos das seções globais encontradas são órbitas nós triviais e têm número de auto-enlaçamento  $-1$ .

estudar qualitativamente as geodésicas fechadas de métricas Finsler em  $S^2$  com condições de pinçamento na curvatura.

Considere o espaço  $\mathcal{B}$  das imersões  $S^1 \rightarrow S^2$  sem tangências positivas. Mais precisamente, se  $\gamma \in \mathcal{B}$  e  $t_0, t_1 \in S^1$  então

$$t_0 \neq t_1 \text{ e } \gamma(t_0) = \gamma(t_1) \Rightarrow \dot{\gamma}(t_1) \notin \mathbb{R}^+ \dot{\gamma}(t_0).$$

**Definição 5.2.30.** *Diremos que duas curvas em  $\mathcal{B}$  são equivalentes se podem ser deformadas uma na outra por curvas em  $\mathcal{B}$ . Um tipo de nó fraco em  $S^2$  é uma classe de equivalência de curvas em  $\mathcal{B}$ .*

Esta definição é inspirada na discussão de [3, capítulo 1] feita para curvas no plano. Os tipos de nó fraco em  $S^2$  identificam as componentes conexas do complementar da chamada *discriminant hypersurface* para uma teoria  $J^+$  de curvas na 2-esfera. Segundo Arnold, veja [3], o problema de classificação de tipos de nós fraco é aparentemente tão complicado quanto o problema de classificar nós em  $\mathbb{R}^3$ .

Seja  $F$  uma métrica Finsler em  $S^2$ , de modo que  $(F^{-1}(1), \xi_F)$  é variedade contato, onde  $\xi_F$  é o núcleo da forma de Hilbert (3.2) associada. Toda imersão  $\gamma : S^1 \rightarrow S^2$  induz uma curva em  $F^{-1}(1)$  dada por

$$\Gamma_\gamma : t \in S^1 \mapsto \frac{\dot{\gamma}(t)}{F(\dot{\gamma}(t))} \in F^{-1}(1)$$

que é transversal a  $\xi_F$

$$\lambda_H \cdot \dot{\Gamma}_\gamma = g_{\Gamma_\gamma}(\Gamma_\gamma, \dot{\gamma}) > 0.$$

Aqui  $g_v$  é o produto interno em  $T_{\pi(v)}S^2$  associado a  $F$  por (3.1). Note que  $\gamma \in \mathcal{B}$  se, e somente se,  $\Gamma_\gamma$  é mergulho, e se  $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{B}$  determinam o mesmo tipo de nó fraco então  $\Gamma_{\gamma_0}$  e  $\Gamma_{\gamma_1}$  são transversalmente isotópicas. Logo invariantes do nó transversal  $\Gamma_\gamma$  determinam invariantes do tipo de nó fraco de  $\gamma \in \mathcal{B}$ .

Para um dar um exemplo concreto, considere o tipo de nó fraco  $k_8$  dado pela classe de uma curva em  $S^2$  que possui apenas um ponto de auto-interseção, e esta auto-interseção é transversal. O leitor deve perder a ilusão de que curvas que representam  $k_8$  são assim simples: através da criação de tangências negativas é possível obter curvas com tipo  $k_8$  com um número arbitrariamente alto de auto-interseções. Usando topologia de contato podemos encontrar invariantes de  $k_8$ , como explicado no enunciado abaixo.

**Lema 5.2.31.** *Seja  $\gamma$  uma curva que representa  $k_8$ . Então  $\dot{\gamma}/F(\dot{\gamma})$  é nó trivial com número de auto-enlaçamento igual a  $-1$ .*

Incluimos a demonstração pois a achamos bastante didática.

*Demonstração.* Seja  $g_0$  a métrica redonda em  $S^2$  induzindo a métrica Finsler  $F_0 = \sqrt{g_0(\cdot, \cdot)}$ . Vemos  $S^3 \subset \mathbb{H}$  como o grupo dos quatérnions unitários munido da forma de Liouville (4.27). O fibrado unitário  $F_0^{-1}(1)$  será denotado por  $T^1S^2$ .

Considere aplicação

$$u : \mathbb{D} \rightarrow S^3 \quad u(Re^{i\theta}) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} \begin{pmatrix} 1 & \rho e^{i\theta} \\ -\rho e^{-i\theta} & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho = \frac{R}{\sqrt{1-R^2}}.$$

Vale que  $u$  é mergulho suave, de forma que  $u(\partial\mathbb{D})$  é nó-trivial. Além disso,  $u(\partial\mathbb{D})$  tem número de auto-enlaçamento  $-1$  pois fazendo  $\rho \rightarrow +\infty$  na fórmula acima o nó correspondente converge para uma fibra de Hopf, e já sabemos, em vista do Lema 5.2.6, que as fibras de Hopf têm número de auto-enlaçamento  $-1$ . O recobrimento duplo  $D$  (5.18)

$$D : \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in S^3 \mapsto ((x_1, x_2, x_3), (v_1, v_2, v_3)) \in T^1S^2$$

é dado pelas fórmulas

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 &= \bar{z}^2 + w^2, & x_3 &= i(\bar{z}w - zw) \\ v_1 + iv_2 &= i(w^2 - \bar{z}^2), & v_3 &= zw + \bar{z}\bar{w}. \end{aligned}$$

Estas fórmulas foram calculadas na demonstração do Lema 5.2.26. Como a imagem de  $u$  não contém pontos antípodas, a aplicação  $v = D \circ u$  é mergulho  $\mathbb{D} \hookrightarrow T^1S^2$ . Denotando por  $\pi : TS^2 \rightarrow S^2$  a projeção no ponto base, a curva  $c(\theta) = \pi \circ v(e^{i\theta}/\sqrt{2})$  representa  $k_8$  em vista da fórmula

$$c(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta, \sin 2\theta, 2 \sin \theta).$$

Como cada  $\theta \mapsto u(Re^{i\theta})$  é transversal a  $\xi_0 = \ker \lambda_0$ , vale que  $J(\theta) = v(e^{i\theta})$  é transversal a  $\xi_{F_0}$ ; isto decorre do Lema 5.2.26. Considere a homotopia

$$h_s(\theta) = \frac{(1-s)\frac{\dot{c}}{F_0(\dot{c})} + sJ(\theta)}{F_0\left(\left((1-s)\frac{\dot{c}}{F_0(\dot{c})} + sJ(\theta)\right)\right)}$$

entre  $\dot{c}/F_0(\dot{c})$  e  $J$ . Esta homotopia está bem definida pois a condição de  $J$  ser transversal é  $g_0(\dot{c}, J) > 0$  e, portanto, implica que o ângulo entre  $\dot{c}$  e  $J$  está em  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Logo a combinação convexa na definição de  $h_s(\theta)$  nunca se anula. Queremos mostrar que  $h_s$  é uma isotopia de nós em  $T^1S^2$ , que só pode deixar de ser verdade se alguma curva  $h_s$  tiver auto-interseções. Mas todo  $h_s$  se projeta sobre a mesma curva  $c$ , que só tem uma auto-interseção exatamente quando  $\theta \in \{0, \pi\}$  no ponto  $(1, 0, 0)$ . Logo auto-interseções de  $h_s$  só ocorrem em  $\theta \in \{0, \pi\}$ . Mas  $\dot{c}(0)$  e  $J(0)$  apontam para o hemisfério norte enquanto que  $\dot{c}(\pi)$  e  $J(\pi)$  apontam para o hemisfério sul. Fica provado que  $h_s$  é isotopia, e que  $\dot{c}/F_0(\dot{c})$  é nó-trivial com número de auto-enlaçamento  $-1$ . Isto prova o lema para a métrica  $F_0$ .

Consideremos  $F$  qualquer. O Lema 5.2.27 nos dá um contactomorfismo  $\phi$  (5.21) que é definido por  $\phi = T_0^{-1} \circ \psi \circ T$ , onde  $\psi$  é o contactomorfismo (5.22) e  $T_0, T$  são as transformadas de Legendre de  $F_0, F$  respectivamente. Note que  $\phi, \psi$  preservam ponto base. Para cada imersão  $\gamma : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow S^2$  definimos  $V_\gamma, W_\gamma : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow F_0^{-1}(1)$  por

$$V_\gamma = \frac{\dot{\gamma}}{F_0(\dot{\gamma})} \quad W_\gamma = \phi \left( \frac{\dot{\gamma}}{F(\dot{\gamma})} \right).$$

Como  $\dot{\gamma}/F(\dot{\gamma})$  é curva positivamente transversal em  $F^{-1}(1)$  e  $\phi$  preserva co-orientações, a curva  $W_\gamma$  é positivamente transversal em  $T^1S^2$ , isto é

$$g_0(\dot{\gamma}, W_\gamma) > 0 \Rightarrow g_0(V_\gamma, W_\gamma) > 0. \quad (5.23)$$

Considere agora  $c_0 : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow S^2$  curva em  $\mathcal{B}$  com único ponto de auto-interseção, o qual ocorre em  $\theta \in \{0, \pi\}$ . Existe homotopia  $c_s$  entre  $c_0$  e uma certa curva  $c_1 \in \mathcal{B}$  através de curvas em  $\mathcal{B}$ , tal que cada  $c_s$  tem único ponto de auto-interseção (em  $\theta \in \{0, \pi\}$ ), onde  $c_1$  satisfaz  $\dot{c}_1(0) = -\dot{c}_1(\pi)$ . A desigualdade (5.23) nos permite definir

$$H_\tau(\theta) = \frac{(1-\tau)V_{c_1}(\theta) + \tau W_{c_1}(\theta)}{F_0((1-\tau)V_{c_1}(\theta) + \tau W_{c_1}(\theta))}$$

pois ela implica que denominador na definição de  $H_\tau$  nunca se anula. Como  $H_\tau(\theta) \in T_{c_1(\theta)}S^2$ ,  $\theta \mapsto H_\tau(\theta)$  só poderia desenvolver auto-interseções para  $\theta \in \{0, \pi\}$ . Mas isto é impossível pois  $V_{c_1}(0) = -V_{c_1}(\pi)$ . Aqui usamos também a desigualdade (5.23). Logo  $H_\tau$  é

isotopia transversal entre  $V_{c_1}$  e  $W_{c_1}$ . Mas  $V_{c_1}$  é obviamente transversalmente isotópica a  $V_{c_0}$  e esta última é nó trivial com número de auto-enlaçamento  $-1$ , como provado na primeira parte da demonstração. Logo o mesmo vale para  $W_{c_1}$ . Como  $\phi$  é contactomorfismo,  $\dot{c}_1/F(\dot{c}_1)$  também é nó trivial com número de auto-enlaçamento  $-1$  em  $(F^{-1}(1), \xi_F)$ . Logo  $\dot{c}_0/F(\dot{c}_0)$  tem as mesmas propriedades.  $\square$

**Teorema 5.2.32.** [22, Hryniewicz, Salomão]  
São verdadeiras as afirmações.

- Seja  $F$  uma métrica Finsler em  $S^2$  com reversibilidade  $r$ . Se as curvaturas bandeira  $K$  satisfazem

$$\left(\frac{r}{r+1}\right)^2 < K \leq 1$$

então nenhuma geodésica de  $F$  tem tipo  $k_8$ .

- Para todo  $r \geq 1$  e todo  $\delta < (r/(r+1))^2$  existe métrica Finsler  $F_{\delta,r}$  em  $S^2$  com reversibilidade  $r$  cujas curvaturas bandeira  $K$  satisfazem  $\delta \leq K \leq 1$ , admitindo geodésica fechada com uma única auto-interseção, que é transversal.

A primeira afirmação do teorema acima diz que um pinçamento apropriado das curvaturas bandeira exclui geodésicas com tipo  $k_8$ , e a segunda afirmação diz que a primeira afirmação não pode ser melhorada.

*Demonstração da primeira afirmação.* Pelo Teorema 5.2.24 a condição de pinçamento das curvaturas acima nos diz que o fluxo de Reeb em  $F^{-1}(1)$  associado à forma de Hilbert, que coincide com o fluxo geodésico de  $F$ , é dinamicamente convexo. Se existisse geodésica fechada  $\gamma$  representando  $k_8$  então o Lema 5.2.31 implicaria que  $\dot{\gamma}/F(\dot{\gamma})$  é órbita de Reeb periódica que é nó-trivial e tem número de auto-enlaçamento  $-1$ . No entanto, o Teorema 5.2.14 nos diria que  $F^{-1}(1)$  e  $S^3$  são difeomorfos, um absurdo.  $\square$

A segunda afirmação é demonstrada modificando a métrica de Katok descrita no capítulo 1. Para mais detalhes veja [22].

### 5.2.5 Seções globais para formas não-dinamicamente convexas

É interessante perguntar se é possível encontrar seções globais tipo-disco para o fluxo de Reeb associado a uma forma de contato  $f\lambda_0$  em  $S^3$ , onde  $f : S^3 \rightarrow (0, +\infty)$  é função suave, sem a hipótese de convexidade dinâmica. Em outras palavras, a hipersuperfície  $S_f$  associada a  $f$  é bordo de um domínio estrelado qualquer. A resposta é dada pelo enunciado abaixo, fazendo uma hipótese de genericidade razoável.

**Teorema 5.2.33.** *[23, Hryniewicz, Salomão] Suponha que  $f\lambda_0|_{TS^3}$  é não-degenerada. Então uma órbita periódica  $P \subset S^3$  é bordo de uma seção global tipo-disco se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

- $P$  é nó-trivial e satisfaz  $sl(P) = -1$ ,
- $\mu_{CZ}(P) \geq 3$ ,
- $P$  está enlaçada não-trivialmente com todas as órbitas periódicas  $P'$  satisfazendo  $\mu_{CZ}(P') = 2$ .

No enunciado acima dizemos que  $\lambda$  é não-degenerada se todas as órbitas periódicas do fluxo de Reeb são não-degeneradas no sentido da Definição 5.1.8. Esta condição é  $C^\infty$ -genérica para  $\lambda$ . O inteiro  $sl(P)$  é o número de auto-enlaçamento definido na seção 4.4.3.

## 5.3 O Teorema de Poincaré-Birkhoff para fluxos de Reeb

O teorema de Poincaré-Birkhoff tem suas origens nos trabalhos de Poincaré sobre o problema dos 3 corpos (restrito e planar), e de Birkhoff no estudo de fluxos geodésicos na esfera  $S^2$  munida de uma métrica Riemanniana com curvatura positiva. Em certos níveis de energia, tais sistemas Hamiltonianos admitem seções globais do tipo anel e a dinâmica pode ser reduzida a um difeomorfismo de  $S^1 \times [0, 1]$ , que preserva área e é homotópico à identidade. Uma condição de *twist*

desse difeomorfismo nas componentes de bordo  $S^1 \times \{0\}$  e  $S^1 \times \{1\}$  implica a existência de infinitas órbitas periódicas.

Nesta seção apresentamos uma versão do teorema de Poincaré-Birkhoff para fluxos de Reeb em  $S^3$  e  $T^1S^2$ , munidos de uma forma de contato *tight*. Um par de órbitas periódicas formando um *link* de Hopf e satisfazendo uma condição de não-ressonância, análoga à condição de *twist*, implica a existência de infinitas órbitas periódicas cujos enlaçamentos com o *link* de Hopf estão bem determinados. Esse resultado se aplica mesmo quando a dinâmica de Reeb não admite seções globais do tipo anel. Em particular, mostramos uma aplicação deste teorema para fluxos geodésicos de métricas Finsler em  $S^2$ .

Para fixarmos notação e para a facilidade do leitor, recapitulamos algumas definições de invariantes topológicos e dinâmicos vistos nos capítulos anteriores, que serão necessários para esta seção. Da mesma forma, relembremos algumas propriedades básicas de formas de contato *standard* em  $S^3$  e  $T^1S^2$ .

### 5.3.1 A versão clássica

Seja  $f : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times [0, 1]$  um difeomorfismo com as seguintes propriedades:

- (i)  $f$  é homotópico à identidade.
- (ii)  $f$  preserva a forma de área  $dx \wedge dy$ , onde  $(x, y)$  são coordenadas em  $S^1 \times [0, 1]$ .

Seja  $F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$  um levantamento de  $f$ , via o recobrimento  $\pi : (x, y) \mapsto (x \bmod 1, y)$ , ou seja  $f \circ \pi = \pi \circ F$ . Denote por  $\pi_1$  a projeção  $(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, 1] \mapsto x \in \mathbb{R}$ . Os seguintes limites

$$\rho_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi_1 \circ F^n(x, 0)}{n} \quad \text{e} \quad \rho_1 := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi_1 \circ F^n(x, 1)}{n}, \quad (5.24)$$

existem e não dependem da escolha de  $x$ . Denote por  $I$  o intervalo aberto cujos extremos são  $\rho_0$  e  $\rho_1$ . No caso em que  $\rho_0 = \rho_1$  então  $I = \emptyset$ . Denote por  $\text{Fix}(f)$  o conjunto dos pontos fixos de  $f$ .

**Teorema 5.3.1** (Poincaré-Birkhoff). *Nas condições acima vale que*

$$\#\text{Fix}(f) \geq 2\#(I \cap \mathbb{Z}).$$

No caso em que  $I \neq \emptyset$ , podemos obter infinitas órbitas periódicas de  $f$ , bastando “iterar” o teorema acima da seguinte forma: dados  $q \in \mathbb{N}^*$  e  $p \in \mathbb{Z}^*$  relativamente primos, considere a aplicação

$$(x, y) \mapsto F_{p,q}(x, y) := F^q(x, y) - (p, 0).$$

Aqui denotamos por  $F^q$  a  $q$ -ésima iterada de  $F$ . Note que  $F_{p,q}$  é um levantamento de  $f^q$ . Seja  $I_{p,q}$  o intervalo aberto limitado por  $\rho_{p,q,0}$  e  $\rho_{p,q,1}$ , definidos como em (5.24), substituindo-se  $F$  por  $F_{p,q}$ . Como  $F_{p,q}^n(x, y) = F^{nq}(x, y) - (np, 0)$ , obtemos  $\rho_{p,q,0} = q\rho_0 - p$  e  $\rho_{p,q,1} = q\rho_1 - p$ . Concluimos que  $I_{p,q} = qI - p$  e, portanto, se  $\frac{p}{q} \in I$ , devemos ter  $0 \in I_{p,q}$ , o que implica  $I_{p,q} \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ . Pelo Teorema de Poincaré-Birkhoff,  $f^q$  tem pelo menos dois pontos fixos, que também correspondem a dois pontos fixos de  $F_{p,q}$ . Um ponto fixo  $(x^*, y^*)$  de  $F_{p,q}$  se move horizontalmente por  $F$  com velocidade  $\frac{p}{q}$ , isto é,  $F^q(x^*, y^*) = (x^*, y^*) + (p, 0)$ . Concluimos que para cada  $\frac{p}{q} \in I$  como acima, os pontos  $q$ -periódicos de  $f$  obtidos são distintos.

**Teorema 5.3.2.** *Para todo  $q \in \mathbb{N}^*$ , o número de órbitas periódicas de  $f$  com período (primo) igual a  $q$  é maior ou igual a*

$$2\#\{p \in \mathbb{Z}^* : p/q \in I \text{ e } \text{mdc}(p, q) = 1\}.$$

### 5.3.2 Fluxos de Reeb e o link de Hopf

Inicialmente consideramos em  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$  a forma de contato

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 q_i dp_i - p_i dq_i|_{S^3},$$

onde  $(q_0, p_0, q_1, p_1)$  são coordenadas em  $\mathbb{R}^4$ . Identificamos  $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$  via  $(q_0, p_0, q_1, p_1) \simeq (q_0 + ip_0, q_1 + ip_1)$  e consideramos também coordenadas polares  $\rho_j e^{i\varphi_j} = q_j + ip_j$ ,  $j = 0, 1$ . Sejam  $\xi_0 = \ker \lambda_0$  a estrutura de contato e  $X_{\lambda_0}$  o campo de Reeb associado a  $\lambda_0$  dado por

$$X_{\lambda_0} = 2 \sum_{i=0}^1 (-p_i \partial_{q_i} + q_i \partial_{p_i}) = 2\partial_{\varphi_0} + 2\partial_{\varphi_1}.$$

Suas órbitas tem período  $\pi$  e se projetam em

$$L_r := \{\rho_0 = r, \rho_1 = \sqrt{1 - r^2}\} \subset S^3, \forall r \in [0, 1],$$

todas orientados por  $X_{\lambda_0}$ , em particular, transversais a  $\xi_0$ . Note que para  $r \neq 0, 1$  cada  $L_r$  é um toro, enquanto que para  $L_0$  e  $L_1$  são fibras de Hopf. Observe que as aplicações  $u_0, u_1 : \mathbb{D} \rightarrow S^3$  dadas em coordenadas polares  $Re^{i\theta} \in \mathbb{D}$  por

$$u_0(R, \theta) = (\sqrt{1 - R^2}, Re^{i\theta}) \text{ e } u_1(R, \theta) = (Re^{i\theta}, \sqrt{1 - R^2}),$$

são mergulhos tais que  $u_i(\partial\mathbb{D}) = L_i$ , para  $i = 0, 1$ . Segue que  $L_0$  e  $L_1$  são nós triviais. Para calcularmos os números de auto-enlaçamento  $sl(L_0)$  e  $sl(L_1)$ , consideramos a seção  $Z_1$  de  $\xi_0$ , que nunca se anula, dada por

$$Z_1 = q_1 \partial_{q_0} - p_1 \partial_{p_0} - q_0 \partial_{q_1} + p_0 \partial_{p_1}. \quad (5.25)$$

Note que

$$N_0 = (-1, 0) = \lim_{R \rightarrow 1} \frac{\partial_R u_0}{|\partial_R u_0|}$$

é um campo em  $\xi_0|_{L_0}$  na direção da normal externa a  $u_0(\mathbb{D})$ . Parametrizando  $L_0$  por  $t \mapsto (0, \cos t + i \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , e usando que  $Z_1|_{L_0} = p_1 \partial_{q_0} + q_1 \partial_{p_0}$ , chegamos a

$$\begin{aligned} sl(L_0) &= \text{wind}(Z_1|_{L_0}, N_0) \\ &= \text{wind}(t \mapsto \sin t + i \cos t, t \in [0, 2\pi]) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Uma construção similar mostra que  $sl(L_1) = -1$ . Essa propriedade foi demonstrada no Lema 5.2.6.

**Definição 5.3.3.** Chamamos um link  $L' = L'_0 \sqcup L'_1 \subset S^3$  de link de Hopf se  $L'$  é transversalmente isotópico a  $L := L_0 \sqcup L_1$ , ou seja, existe uma isotopia  $\psi_t : S^1 \sqcup S^1 \rightarrow S^3$ ,  $t \in [0, 1]$ , satisfazendo

- $\psi_t$  é mergulho transversal a  $\xi_0$  para todo  $t \in [0, 1]$ .
- $\psi_0(S^1 \sqcup S^1) = L$  e  $\psi_1(S^1 \sqcup S^1) = L'$ .

Observamos que a isotopia  $\psi_t$  pode se estendida a uma isotopia  $\Psi_t : S^3 \rightarrow S^3$  tal que  $\Psi_{t*}\xi_0 = \xi_0$  para todo  $t \in [0, 1]$ , veja [9]. Portanto, vamos sempre assumir que o link de Hopf  $L'$  coincide com  $L$  e, nesse caso, dizemos que o link de Hopf está em posição normal.

A seção  $Z_2$  de  $\xi_0$ , dada por

$$Z_2 = p_1 \partial_{q_0} + q_1 \partial_{p_0} - p_0 \partial_{q_1} - q_0 \partial_{p_1}, \quad (5.26)$$

define, juntamente com  $Z_1$ , uma trivialização simplética de  $\xi_0$ ,

$$\Phi : \xi_0 \rightarrow S^3 \times \mathbb{R}^2, \quad (z, aZ_1 + bZ_2) \mapsto (z, (a, b)). \quad (5.27)$$

Se  $\gamma : S^1 \rightarrow S^3 \setminus L$  é fechada e contínua, então sua projeção em cada um dos planos  $(q_0, p_0)$  e  $(q_1, p_1)$  não se anula e, portanto, determina *winding numbers*  $\text{wind}_0(\gamma)$  e  $\text{wind}_1(\gamma)$ . Segue que aplicação

$$i : \pi_1(S^3 \setminus L) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : [\gamma] \mapsto (\text{wind}_0(\gamma), \text{wind}_1(\gamma)),$$

é um isomorfismo. Aqui escrevemos  $\pi_1(S^3 \setminus L)$  sem fazer referência a um ponto base. Os inteiros  $\text{wind}_0(\gamma)$  e  $\text{wind}_1(\gamma)$  podem ser vistos como o número de enlaçamento de  $\gamma$  com  $L_0$  e  $L_1$ , ou ainda como o número de intersecção algébrico de  $\gamma$  com  $u_0$  e  $u_1$ , respectivamente. Para isso, devemos considerar a orientação de  $S^3$  induzida por  $\lambda_0 \wedge d\lambda_0$  e a orientação em  $u_0$  induzida pelo bordo  $L_0$ , que é orientado por  $X_{\lambda_0}$ . O mesmo vale para  $u_1$ .

Seja  $A : S^3 \rightarrow S^3$ ,  $z \mapsto -z$ , a aplicação antípoda, e considere a variedade  $\tilde{S} := S^3 / \sim$ , onde  $z \sim A(z)$ ,  $\forall z \in S^3$ . Denotamos por

$$D : S^3 \rightarrow \tilde{S}$$

o recobrimento duplo dado pela projeção  $z \mapsto [z] \simeq \{z, -z\}$ . Mostraremos mais adiante que  $\tilde{S}$  é difeomorfo a  $T^1S^2$ , onde  $T^1S^2$  denota o fibrado unitário de  $S^2$  com respeito à métrica Euclidiana de  $\mathbb{R}^3$  restrita a  $S^2$ .

Note que  $A^*\lambda_0 = \lambda_0$  e, portanto,  $\lambda_0$  desce para uma forma de contato em  $\tilde{S}$ , também denotada por  $\lambda_0$ . A estrutura de contato e o campo de Reeb associados a  $\lambda_0$  em  $\tilde{S}$  também são denotados por  $\xi_0$  e  $X_{\lambda_0}$ , respectivamente. Os nós  $L_0$  e  $L_1$  recobrem duplamente os nós simples não-contráteis  $l_0, l_1 \subset \tilde{S}$  através da projeção  $D$ , respectivamente.

**Definição 5.3.4.** *Um link  $l' = l'_0 \sqcup l'_1 \subset \tilde{S}$  é chamado de link de Hopf se  $l'$  é transversalmente isotópico a  $l = l_0 \sqcup l_1$  em  $(\tilde{S}, \xi_0)$ .*

Como antes, podemos sempre supor que  $l' = l$  e, nesse caso, dizemos que o *link* de Hopf está em posição normal. Uma curva contínua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \tilde{S} \setminus l$  levantada para  $S^3 \setminus L$  não se anula quando projetada em cada um dos planos  $(q_0, p_0)$  e  $(q_1, p_1)$ . Se  $\gamma$  é fechada, então seu levantamento  $\tilde{\gamma}$  satisfaz  $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(0)$  ou  $\tilde{\gamma}(1) = A(\tilde{\gamma}(0)) = -\tilde{\gamma}(0)$ . Desta forma, uma curva fechada  $\gamma : S^1 \rightarrow \tilde{S} \setminus l$  determina ‘meio-inteiros’  $\text{wind}_0(\gamma), \text{wind}_1(\gamma) \in \mathbb{Z}/2$ . Estes números satisfazem  $\text{wind}_0(\gamma) + \text{wind}_1(\gamma) \in \mathbb{Z}$ .

### 5.3.3 O Número de rotação

Considere agora uma forma de contato *tight* em  $S^3$ , dada por  $\lambda = f\lambda_0$ , onde  $f \in C^\infty(S^3, (0, \infty))$ . Observe que  $\ker \lambda = \ker \lambda_0 = \xi_0$ . Denote por  $X_\lambda$  seu campo de Reeb, determinado por  $i_{X_\lambda}d\lambda = 0$  e  $i_{X_\lambda}\lambda = 1$ . Denote por  $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  o fluxo associado a  $X_\lambda$  em  $S^3$ . Como  $\mathcal{L}_{X_\lambda}\lambda = i_{X_\lambda}d\lambda + di_{X_\lambda}\lambda = 0$ , temos que  $d\varphi_t(\xi_0) = \xi_0, \forall t$ .

Seja  $P = (x, T)$  uma órbita periódica do fluxo de Reeb de  $\lambda$ , ou seja,  $x : \mathbb{R} \rightarrow S^3$  é  $T$ -periódica e  $x(t) = \varphi_t(x(0)), \forall t$ . Denote por  $w_1(t) + iw_2(t) = \Phi(d\varphi_t|_{x(0)} \cdot w), 0 \neq w \in \xi_0|_{x(0)}$ , uma solução do fluxo linearizado ao longo de  $P$  com respeito à trivialização  $\Phi$  definida em (5.27). Seja  $\theta(t)$  um argumento contínuo de  $w_1(t) + iw_2(t)$ . Definimos o número de rotação transversal de  $P$  por

$$\rho(P) = T \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta(t)}{2\pi t}. \tag{5.28}$$

É possível mostrar que  $\rho(P)$  não depende de  $w$ . Ainda mais, se  $x_c(t) := x(t + c), c \in \mathbb{R}$ , é uma reparametrização de  $P$  por uma translação no domínio, então  $\rho(P)$  também não depende de  $c$ . Vale ainda

$$\rho(P) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_{CZ}(P^k)}{2k},$$

onde  $\mu_{CZ}(P^k)$  é o índice de Conley-Zehnder da  $k$ -ésima iterada de  $P$ , com relação à trivialização global  $\Phi$ . A fórmula acima pode ser demonstrada usando-se a definição do índice de Conley-Zehnder para caminhos de matrizes em  $Sp(2)$  discutida na seção 5.1.

### 5.3.4 A versão para fluxos de Reeb

A versão do teorema de Poincaré-Birkhoff para fluxos de Reeb em  $S^3$  *tight* tem como hipótese a existência de um par de órbitas periódicas formando um *link* de Hopf  $L = L_0 \sqcup L_1$ , de modo que se os números de rotação de  $L_0$  e  $L_1$  satisfizerem uma certa condição de não-ressonância, então temos a existência de infinitas outras órbitas periódicas, caracterizadas por suas classes de homotopia em  $S^3 \setminus L$ . Uma versão similar vale para o fibrado unitário  $T^1S^2$ .

Seja  $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : x \geq 0 \text{ ou } y \geq 0\}$ . Considere em  $V$  uma ordem definida da seguinte forma: dados  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$ , dizemos que  $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$  se e somente se  $\theta_1 < \theta_2$  onde  $e^{i\theta_j} = x_j + iy_j$ ,  $\theta_j \in [-\frac{3\pi}{2}, \pi]$ ,  $j = 1, 2$ .

Dizemos que um par de inteiros  $(p, q)$  é primo se  $(p, q) \neq (0, 0)$  e não existe inteiro  $k > 0$  tal que  $(p/k, q/k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

**Teorema 5.3.5** (Hryniewicz, Momin e Salomão [21]). *Assuma que a forma de contato  $\lambda = f\lambda_0$ ,  $f > 0$ , em  $S^3$  admite um par de órbitas periódicas  $L_0, L_1$  que são componentes de um link de Hopf, em posição normal sem perda de generalidade. Defina os números reais  $\eta_0, \eta_1$  por*

$$\eta_i = \rho(L_i) - 1, \quad i = 0, 1, \quad (5.29)$$

onde  $\rho(L_i)$  é o número de rotação transversal de  $L_i$ ,  $i = 0, 1$ . Suponha que o par de inteiros  $(p, q) \in V$  seja primo. Se

$$(\theta_0, 1) < (p, q) < (1, \theta_1) \quad \text{ou} \quad (1, \theta_1) < (p, q) < (\theta_0, 1), \quad (5.30)$$

então existe uma órbita periódica simples  $\gamma_{p,q} \subset S^3 \setminus (L_0 \cup L_1)$  tal que

$$\text{wind}_0(\gamma_{p,q}) = p \text{ e } \text{wind}_1(\gamma_{p,q}) = q.$$

O resultado para fluxos de Reeb em  $\tilde{S}$  é similar

**Teorema 5.3.6.** [21, Hryniewicz, Momin e Salomão] *Assuma que a forma de contato  $\lambda = f\lambda_0$ ,  $f > 0$ , em  $\tilde{S}$  admite um par de órbitas periódicas  $l_i$ ,  $i = 1, 2$ , que são componentes de um link de Hopf, em posição normal sem perda de generalidade. Defina os números reais  $\eta_0, \eta_1$  por*

$$\eta_i = 2\rho(l_i) - 1, \quad i = 0, 1, \quad (5.31)$$

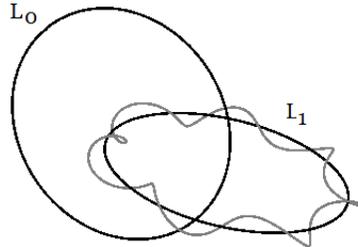


Figura 5.1: Uma órbita enlaçada 1 vez com  $L_0$  e 7 vezes com  $L_1$ .

onde  $\rho(l_i)$  é o número de rotação transversal de  $l_i$ ,  $i = 0, 1$ . Suponha que o par de inteiros  $(p, q) \in V$  seja primo. Se

$$(1, \eta_1) < (p, q) < (\eta_0, 1) \quad \text{ou} \quad (\eta_0, 1) < (p, q) < (1, \eta_1), \quad (5.32)$$

então vale uma das alternativas:

(i) Se  $p + q$  é par, então  $\lambda$  admite uma órbita periódica simples  $\gamma_{p,q} \subset \tilde{S} \setminus l$ , não-contrátil em  $\tilde{S}$ , satisfazendo

$$\text{wind}_0(\gamma_{p,q}) = p/2, \quad \text{wind}_1(\gamma_{p,q}) = q/2. \quad (5.33)$$

(ii) Se  $p + q$  é ímpar, então  $\lambda$  admite uma órbita periódica simples  $\gamma_{p,q} \subset \tilde{S} \setminus l$ , contrátil em  $\tilde{S}$ , satisfazendo

$$\text{wind}_0(\gamma_{p,q}) = p, \quad \text{wind}_1(\gamma_{p,q}) = q. \quad (5.34)$$

### 5.3.5 O fibrado unitário de $S^2$

Seja  $g_0$  a métrica Euclideana em  $\mathbb{R}^3$  e seja

$$T^1 S^2 := \{(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid g_0(x, x) = g_0(v, v) = 1, g_0(x, v) = 0\},$$

o fibrado untário de  $S^2$  com respeito a  $g_0$  e com projeção no ponto base  $\pi : T^1 S^2 \rightarrow S^2$ ,  $\pi(x, v) = x$ . A aplicação

$$D_1 : S^3 \xrightarrow{2:1} T^1 S^2,$$

definida por

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \Re(z_0^2 + z_1^2) & \Im(z_0^2 - z_1^2) \\ \Im(z_0^2 + z_1^2) & -\Re(z_0^2 - z_1^2) \\ \Im(2z_0z_1) & \Re(2z_0z_1) \end{bmatrix} = [x \ v], \quad (5.35)$$

é um recobrimento duplo tal que  $D_1 \circ A = D_1$ , onde  $A$  é a aplicação antípoda. Estamos usando coordenadas complexas  $z = (z_0, z_1) = (q_0 + ip_0, q_1 + ip_1) \in \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ , com  $|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1$ ,  $x \in S^2$  e  $v \in T_x S^2$ . Fica então estabelecido um difeomorfismo  $\psi_0 : \tilde{S} \rightarrow T^1 S^2$  induzido pelo diagrama

$$\begin{array}{ccc} & S^3 & \\ D \swarrow & & \searrow D_1 \\ \tilde{S} & \xrightarrow{\psi_0 = D_1 \circ D^{-1}} & T^1 S^2 \end{array} \quad (5.36)$$

**Exercício 5.3.7.** *Mostre que  $D_1 : S^3 \rightarrow T^1 S^2$  é de fato um recobrimento duplo.*

Lembre que  $T^1 S^2$  admite uma forma de contato  $\bar{\lambda}_0$  dada por  $\bar{\lambda}_0|_v \cdot \zeta = g_0(v, d\pi \cdot \zeta)$ ,  $\forall \zeta \in T_v T^1 S^2$ . Denote por  $\bar{\xi}_0 = \ker \bar{\lambda}_0$  e  $X_{\bar{\lambda}_0}$  a estrutura de contato e o campo de Reeb associados a  $\bar{\lambda}_0$ , respectivamente. O fluxo de  $\dot{x} = X_{\bar{\lambda}_0} \circ x$  é o fluxo geodésico de  $g_0$ . Todas as órbitas são fechadas e se projetam em círculos máximos de  $S^2$ . É possível verificar que  $\psi_0^* \bar{\lambda}_0 = 4\lambda_0$  (veja o Lema 5.2.26), e portanto  $\psi_0$  mapeia órbitas de  $\lambda_0$  em órbitas de  $\bar{\lambda}_0$ , após reparametrizá-las com fator  $1/4$  no tempo.

Seja  $l = l_0 \sqcup l_1$  o *link* de Hopf em  $\tilde{S}$  definido como na Seção 5.3.2. É imediato verificar usando (5.35) que  $\psi_0(l_0)$  é uma geodésica fechada que percorre o círculo máximo

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$$

no sentido anti-horário no plano  $(x_1, x_2)$ . Da mesma forma,  $\psi_0(l_1)$  é o mesmo círculo máximo, porém percorrido no sentido horário. Denotamos essas duas geodésicas fechadas por  $\bar{l}_0$  e  $\bar{l}_1$  e chamamos o par  $\bar{l} = \bar{l}_0 \sqcup \bar{l}_1$  de *link* de Hopf em  $T^1 S^2$ .

Seja  $F : TS^2 \rightarrow [0, \infty)$  uma métrica Finsler qualquer e considere  $F^{-1}(1) \subset TS^2$  o fibrado unitário de  $F$ . Sabemos que o fluxo geodésico

restrito a  $F^{-1}(1)$  coincide com o fluxo de Reeb associado à forma de Hilbert  $\lambda_H^F$  restrita a  $F^{-1}(1)$ . Além disso,  $\lambda_H^F = L_F^* \lambda_{\text{taut}}$ , onde denotamos por  $L_F : TS^2 \setminus 0 \rightarrow T^*S^2 \setminus 0$  a transformada de Legendre associada a  $F$ . Aqui denotamos por  $TS^2 \setminus 0$  e  $T^*S^2 \setminus 0$  os fibrados tangente e cotangente de  $S^2$  com a seção nula removida, respectivamente. Denote por  $L_{F_0}$  a transformada de Legendre associada à métrica Finsler  $F_0 = \sqrt{g_0(\cdot, \cdot)}$ . Denote por  $F^* = F \circ L_F^{-1}$  e  $F_0^* = F_0 \circ L_{F_0}^{-1}$  as co-métricas associadas e seja  $R_F : (F_0^*)^{-1}(1) \rightarrow (F^*)^{-1}(1)$  o difeomorfismo dado por  $v \mapsto v/F^*(v)$ . O exercício abaixo está resolvido na demonstração do Lema 5.2.27.

**Exercício 5.3.8.** *Mostre que  $R_F$  é um contactomorfismo, ou seja,*

$$(R_F)_* (\ker \lambda_{\text{taut}}|_{(F_0^*)^{-1}(1)}) = \ker \lambda_{\text{taut}}|_{(F^*)^{-1}(1)}.$$

Concluimos que as aplicações

$$F_0^{-1}(1) \xrightarrow{L_{F_0}} (F_0^*)^{-1}(1) \xrightarrow{R_F} (F^*)^{-1}(1) \xrightarrow{L_F^{-1}} F^{-1}(1)$$

são contactomorfismos e, portanto, encontramos  $\bar{f} : F_0^{-1}(1) \rightarrow (0, \infty)$  suave tal que  $\Psi^* \lambda_H^F = \bar{f} \lambda_0$ , onde

$$\Psi := L_F^{-1} \circ R_F \circ L_{F_0}. \tag{5.37}$$

Definindo-se  $f = \psi_0^* \bar{f}$ , temos que o fluxo geodésico de  $F$  em  $F^{-1}(1)$  corresponde ao fluxo de Reeb da forma de contato  $f \lambda_0$  em  $\tilde{S}$ . Temos então a seguinte proposição.

**Proposição 5.3.9.** *O fluxo geodésico de uma métrica Finsler em  $S^2$  é conjugado ao fluxo de Reeb de uma forma de contato  $\lambda = f \lambda_0$  em  $\tilde{S}$ .*

Observe que a conjugação mencionada no enunciado acima é dada por um contactomorfismo mapeando  $l$  em  $\bar{l}$ .

### 5.3.6 $(p, q)$ -satélites

Sejam  $g$  uma métrica Riemanniana em  $S^2$ ,  $T > 0$  e  $\gamma : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow S^2$  um mergulho com  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$ . Seja  $n : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow T^1S^2$  um campo de vetores contínuo e não-nulo ao longo de  $\gamma$  e normal a  $\dot{\gamma}$ . Dados

inteiros  $p, q$ , relativamente primos, definimos a curva  $\alpha : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow S^2$  por

$$\alpha_\epsilon(t) = \exp_{\gamma(qt)}(\epsilon \sin(2\pi pt/T)n(qt)),$$

onde  $\epsilon > 0$  é pequeno e  $\exp$  denota a aplicação exponencial associada a  $g$ .

**Definição 5.3.10.** Dizemos que uma imersão  $\bar{\gamma} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^2$  é um  $(p, q)$ -satélite de  $\gamma$  se  $\bar{\gamma}$  é homotopicamente equivalente a  $\alpha_\epsilon$  por curvas imersas tais que durante a homotopia as curvas não admitem auto-tangências e nem tangências com  $\gamma$ .

**Observação 5.3.11.** Note que a definição de um  $(p, q)$ -satélite de  $\gamma$  não depende de  $g$ .

Seja  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S^2$  uma geodésica fechada com período mínimo  $T > 0$ . Seja  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução não-trivial de

$$\ddot{y}(t) = -K(\gamma(t))y(t),$$

onde  $K$  é a curvatura Gaussiana de  $g$ . Seja  $\theta(t)$  um argumento contínuo de  $\dot{y}(t) + iy(t)$ . O número de rotação inverso de  $\gamma$  é definido por

$$\rho(\gamma) = T \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta(t)}{2\pi t}. \quad (5.38)$$

Este número não depende de  $y$  e  $\theta$ . Lembramos que o fluxo geodésico linearizado ao longo de  $\gamma$  num referencial apropriado é regido pela equação

$$\begin{pmatrix} \dot{\zeta}_1(t) \\ \dot{\zeta}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -K(\gamma(t)) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \end{pmatrix},$$

e, portanto,  $\ddot{\zeta}_2(t) = -K(\gamma(t))\zeta_2(t)$ . Isso implica que, neste caso, o número de rotação inverso coincide com o número de rotação transversal, definido anteriormente para fluxos de Reeb em geral.

**Teorema 5.3.12** (Angenent). *Seja  $g$  uma métrica Riemanniana suave em  $S^2$  e  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S^2$  uma geodésica fechada simples com período mínimo  $T > 0$ . Sejam  $p, q$  inteiros relativamente primos e  $\rho(\gamma)$  o número de rotação inverso de  $\gamma$  definido como em (5.38). Suponha*

que  $p/q \in (\rho(\gamma), 1) \cup (1, \rho(\gamma))$ . Então  $g$  admite uma geodésica fechada  $\gamma_{p,q}$  que é um  $(p, q)$ -satélite de  $\gamma$ . A geodésica  $\gamma_{p,q}$  intersecta  $\gamma$  em  $2p$  pontos e se auto-intersecta em  $p(q - 1)$  pontos.

Considere agora uma métrica Finsler  $F$  em  $S^2$  e seja  $\gamma$  uma geodésica fechada e simples com período mínimo  $T > 0$ . Podemos definir o número de rotação inverso de  $\gamma$  analogamente ao caso Riemanniano substituindo-se a curvatura Gaussiana  $K(\gamma(t))$  pela curvatura bandeira  $K(T_{\gamma(t)}S^2, \dot{\gamma}(t)) =: K(\dot{\gamma}(t))$ , ou seja, consideramos um argumento contínuo  $\theta(t)$  de  $\dot{y}(t) + iy(t)$ , onde  $\ddot{y}(t) = -K(\dot{\gamma}(t))y(t)$  e definimos  $\rho(\gamma)$  usando o limite (5.38).

**Definição 5.3.13.** Dizemos que  $\gamma$  é uma geodésica fechada, simples e reversível se a curva fechada  $\gamma(-t)$ , que percorre  $\gamma(t)$  no sentido oposto, é uma reparametrização (positiva) de uma outra geodésica fechada e simples  $\gamma_r(t)$  e, além disso,  $\rho(\gamma_r) = \rho(\gamma)$ . Denotaremos por  $l_\gamma$  o link  $\dot{\gamma} \sqcup \dot{\gamma}_r \subset F^{-1}(1)$ , onde normalizamos as velocidades para ficarem unitárias.

O seguinte resultado é uma generalização do Teorema 5.3.12.

**Teorema 5.3.14** (Hryniewicz, Momin e Salomão [21]). *Seja  $F$  uma métrica Finsler em  $S^2$  que admite uma geodésica fechada, simples e reversível  $\gamma$  com  $F(\dot{\gamma}(t)) = 1, \forall t$ . Seja  $\rho \geq 0$  seu número de rotação inverso. Sejam  $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  inteiros relativamente primos. Se  $p/q \in (\rho, 1) \cup (1, \rho)$  então existe uma geodésica fechada  $\gamma_{p,q}$ , com  $F(\dot{\gamma}_{p,q}) = 1$ , tal que  $\dot{\gamma}_{p,q}$  é homotópica em  $F^{-1}(1) \setminus l_\gamma$  ao vetor velocidade normalizado de um  $(p, q)$ -satélite de  $\gamma$ .*

A demonstração do Teorema 5.3.14 segue do Teorema 5.3.6 e do seguinte lema topológico.

**Lema 5.3.15.** *Seja  $\gamma$  uma geodésica fechada simples de  $F$  em  $S^2$  de período mínimo  $T > 0$ . Sem perda de generalidade, assumimos que  $\gamma$  coincide com o equador  $\{x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$  percorrido no sentido anti-horário no plano  $(x_1, x_2)$ . Sejam  $p, q$  relativamente primos e  $\gamma_{p,q}$  um  $(p, q)$ -satélite de  $\gamma$  com  $F(\dot{\gamma}_{p,q}) = 1$ . Seja*

$$c_{p,q} := \psi_0^{-1} \circ \Psi^{-1}(\dot{\gamma}_{p,q}) \subset \tilde{S}$$

onde  $\psi_0 : \tilde{S} \rightarrow T^1S^2$  e  $\Psi : T^1S^2 \rightarrow F^{-1}(1)$  são definidas em (5.36) e (5.37), respectivamente.

- Se  $q > 0$  então

$$\text{wind}_0(c_{p,q}) = |p| - q/2,$$

$$\text{wind}_1(c_{p,q}) = q/2.$$

- Se  $q < 0$  então

$$\text{wind}_0(c_{p,q}) = q/2,$$

$$\text{wind}_1(c_{p,q}) = |p| - q/2.$$

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $F = \sqrt{g_0(\cdot, \cdot)}$  ( $\Psi = \text{Id}$ ),  $T = 2\pi$  e  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ . Seja  $n(t) = (0, 0, 1)$  o campo ao longo de  $\gamma$ , normal a  $\dot{\gamma}$ . Seja

$$s(\epsilon, t) = \alpha_\epsilon(t) = \exp_{\gamma(t)}(\epsilon \sin(tp/q)n(t)), \quad t \in [0, 2\pi q].$$

Podemos encontrar coordenadas  $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times (-a, a)$ ,  $a > 0$  pequeno, numa vizinhança de  $\gamma \subset S^2$ , tais que

$$s(\epsilon, t) = (w_1(\epsilon, t), w_2(\epsilon, t)) = (t, \epsilon \sin(pt/q)).$$

Logo

$$(\partial_t w_1(\epsilon, t), \partial_t w_2(\epsilon, t)) = (1, \epsilon p/q \cos(pt/q))$$

$$(\partial_{\epsilon t} w_1(\epsilon, t), \partial_{\epsilon t} w_2(\epsilon, t)) = (0, p/q \cos(pt/q)).$$

Considere coordenadas naturais  $(w_1, w_2, y_1, y_2)$  de  $TS^2$  associadas a  $(w_1, w_2)$ . Em  $\epsilon = 0$ , temos então

$$\begin{aligned} & (\partial_\epsilon s(0, t), \partial_{\epsilon t} s(0, t)) \\ &= (0, \sin(pt/q), 0, p/q \cos(pt/q)) \\ &= \sin(pt/q) \partial_{w_2} + p/q \cos(pt/q) \partial_{y_2}. \end{aligned}$$

Podemos assumir que as coordenadas  $(w_1, w_2)$  foram escolhidas de modo que

$$\mathcal{H}|_{(\gamma, \dot{\gamma})} = \text{span}\{\partial_{w^1}, \partial_{w^2}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}|_{(\gamma, \dot{\gamma})} = \text{span}\{\partial_{y^1}, \partial_{y^2}\}.$$

Então o vetor  $n$  normal a  $\dot{\gamma}$  corresponde a  $\partial_{w^2}$  e  $i_{\mathcal{V}}(\partial_{w^2}) = \partial_{y^2}$ . Portanto, a curva fechada

$$\left( s(\epsilon, \cdot), \frac{\partial_t s(\epsilon, \cdot)}{F(\partial_t s(\epsilon, \cdot))} \right) \subset F^{-1}(1)$$

é homotópica à curva

$$C(\epsilon, t) := \text{Exp}_{(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))} \epsilon S(t) \in F^{-1}(1), \quad (5.39)$$

onde

$$S(t) := \sin(pt/q)n_{\mathcal{H}}(t) + p/q \cos(pt/q)n_{\mathcal{V}}(t), \quad (5.40)$$

Exp é uma aplicação exponencial em  $F^{-1}(1)$ ,  $n_{\mathcal{H}} = i_{\mathcal{H}}(n) \in \mathcal{H}_{(\gamma, \dot{\gamma})}$  e  $n_{\mathcal{V}} = i_{\mathcal{V}}(n) \in \mathcal{V}_{(\gamma, \dot{\gamma})}$ . Usando o difeomorfismo  $\psi_0 : \tilde{S} \rightarrow F^{-1}(1)$ , temos  $\psi_0^{-1} \circ \gamma(t)$  se levanta para  $S^3$  na curva

$$\zeta(t) = (q_0(t), p_0(t), q_1(t), p_1(t)) = (0, 0, \cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2}),$$

e se  $q > 0$  então, para  $\epsilon > 0$  pequeno, a curva

$$\left( \alpha_\epsilon, \frac{\dot{\alpha}_\epsilon}{F(\dot{\alpha}_\epsilon)} \right)$$

se levanta a uma curva próxima a  $\zeta(t)$ ,  $t \in [0, 2\pi q]$ . Isso implica que  $\text{wind}_1(c_{p,q}) = q/2$ . As seções  $Z_1|_\zeta, Z_2|_\zeta$  definidas em (5.25) e (5.26), correspondem a  $i_{\mathcal{V}}(n), i_{\mathcal{H}}(n)$ , a menos de uma constante, e, portanto, usando (5.40), em relação à base  $\{Z_1, Z_2\}$  temos

$$\text{wind}((\psi_0^{-1})_* S(t), t \in [0, 2\pi q]) = |p|.$$

Agora observe que  $Z_1(\zeta(t)) = \cos \frac{t}{2} \partial_{q_0} - \sin \frac{t}{2} \partial_{p_0}$ . Portanto, em relação à base  $\{\partial_{q_0}, \partial_{p_0}\}$ , temos

$$\text{wind}((\psi_0^{-1})_* S(t), t \in [0, 2\pi q]) = |p| - q/2.$$

Isso implica que

$$\text{wind}_0(c_{p,q}) = |p| - q/2.$$

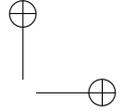
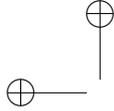
O caso  $q < 0$  é análogo e a curva

$$\left( \alpha_\epsilon, \frac{\dot{\alpha}_\epsilon}{F(\dot{\alpha}_\epsilon)} \right),$$

$\epsilon > 0$  pequeno, se levanta a uma curva próxima a

$$t \mapsto (\cos t/2, \sin t/2, 0, 0), \quad t \in [0, 2\pi q].$$

Nesse caso  $\text{wind}_0(c_{p,q}) = q/2$  e  $\text{wind}_1(c_{p,q}) = |p| - q/2$ .  $\square$



*Demonstração do Teorema 5.3.14.* Pela Proposição 5.3.9, podemos considerar o fluxo geodésico em  $F^{-1}(1)$  como o fluxo de Reeb de uma forma de contato  $\lambda = f\lambda_0$  em  $\tilde{S}$ . Mais ainda, podemos também assumir que  $l_\gamma = \gamma \sqcup \gamma_r$  coincide com o *link* de Hopf  $l = l_0 \sqcup l_1 \subset \tilde{S}$ , onde  $\gamma_r$  é a geodésica  $\gamma$  percorrida no sentido oposto.

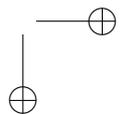
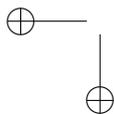
Pela reversibilidade da geodésica, podemos assumir que  $q > 0$ . Isso implica  $p > 0$ . Se  $q$  é ímpar, seja  $p' = 2p - q$  e  $q' = q$ . Se  $q$  é par seja  $p' = p - q/2$  e  $q' = q/2$ . Como  $p$  e  $q$  são relativamente primos, temos que  $p'$  e  $q'$  também o são. Se  $\rho > 1$ , então

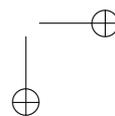
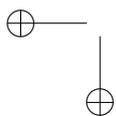
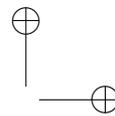
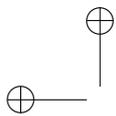
$$1 < \frac{p}{q} < \rho \Leftrightarrow \frac{2p - q}{q} = \frac{p'}{q'} < 2\rho - 1.$$

Logo  $(2\rho - 1, 1) < (p', q') < (1, 1) < (1, 2\rho - 1)$ . Aplicando o Teorema 5.3.6 para o par  $(p', q')$ , encontramos uma órbita periódica  $c_{p,q}$  tal que  $\text{wind}_0(c_{p,q}) = p - q/2$  e  $\text{wind}_1(c_{p,q}) = q/2$ . Sabemos que  $c_{p,q}$  corresponde a uma geodésica fechada que, pelo Lema 5.3.15, está na mesma classe de homotopia do vetor velocidade de um  $(p, q)$ -satélite de  $\gamma$ . Se  $0 \leq \rho < 1$ , então

$$\rho < \frac{p}{q} < 1 \Leftrightarrow 2\rho - 1 < \frac{2p - q}{q} = \frac{p'}{q'} < 1$$

o que implica que  $(1, 2\rho - 1) < (1, 1) < (p', q') < (2\rho - 1, 1)$ . Novamente, aplicando o Teorema 5.3.6 para o par  $(p', q')$ , encontramos a geodésica procurada  $\gamma_{p,q}$ .  $\square$





# Bibliografia

- [1] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Graduate Texts in Mathematics, **80**, Springer, 1989.
- [2] V. I. Arnold, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **250**, Springer, 1988.
- [3] V. I. Arnold, *Topological Invariants of Plane Curves and Caustics*, Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures presented at Rutgers University, New Brunswick, New Jersey. University Lecture Series, **5**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [4] L. Auslander, *On curvature in Finsler geometry*, Trans. Amer. Math. Soc. **79** (1955), 378–388.
- [5] B. Bramham, H. Hofer, *First steps towards a symplectic dynamics*, Surveys in Differential Geometry, Vol. 17 (2012), 127–178.
- [6] S.-S. Chern, ; Z. Shen, *Riemann-Finsler geometry*, Nankai Tracts in Mathematics, **6**, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2005, 192pp.
- [7] M. Crampin, *Connections of Berwald type*, Publ. Math. Debrecen **57** (2000), no. 3-4, 455-473.
- [8] J. Franks, *Geodesics on  $S^2$  and periodic points of annulus homeomorphisms*. Invent. Math. **108** (1992), 403-418.

- [9] H. Geiges, *An Introduction to Contact Topology*, Cambridge studies in advanced mathematics, 109, (2008).
- [10] J. Grifone, *Structure presque-tangente et connexions I*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **22** (1972), no. 1, 287-334.
- [11] J. Grifone, *Structure presque-tangente et connexions II*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **22** (1972), no. 3, 291-338.
- [12] A. Harris, G. Paternain, *Dynamically convex Finsler metrics and J-holomorphic embedding of asymptotic cylinders*, Ann. Global Anal. Geom. **34** (2008), no. 2, 115-134.
- [13] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. xii+544 pp.
- [14] H. Hofer, E. Zehnder, *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhäuser, Basel, 1994.
- [15] H. Hofer, K. Wysocki e E. Zehnder, *Properties of pseudoholomorphic curves in symplectisations II: embedding controls and algebraic invariants*, GAFA, **5**, (1995), 270-328.
- [16] H. Hofer, K. Wysocki e E. Zehnder, *The dynamics on a strictly convex energy surface in  $\mathbb{R}^4$* , Ann. of Math. (2) **148** (1), (1998), 197-289.
- [17] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder, *A characterization of the tight three sphere*. Duke Math. J. **81** (1995), no. 1, 159-226.
- [18] U. Hryniewicz, *Fast finite-energy planes in symplectizations and applications*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 364, p. 1859-1931, 2012.
- [19] U. Hryniewicz, *Systems of global surfaces of section on dynamically convex energy levels*, arXiv:1105.2077.
- [20] U. Hryniewicz, J. Licata e P. Salomão, *A dynamical characterization of universally tight lens spaces*, em preparação.
- [21] U. Hryniewicz, A. Momin e P. Salomão, *A Poincaré-Birkhoff theorem for tight Reeb flows on  $S^3$* , arXiv:1110.3782.

- [22] U. Hryniewicz e P. Salomão, *Global properties of tight Reeb flows with applications to Finsler geodesic flows on  $S^2$* , Math. Proc. Cam. Phil. Soc. **154** (2013), 1–27.
- [23] U. Hryniewicz e P. Salomão, *On the existence of disk-like global sections for Reeb flows on the tight 3-sphere*. Duke Math. J. **160**, 415–465, 2011.
- [24] U. Hryniewicz e P. Salomão, *Uma introdução à geometria de contato e aplicações à dinâmica hamiltoniana*. Publicações Matemáticas do IMPA. 27º Colóquio Brasileiro de Matemática. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2009. ii+207 pp.
- [25] G. J. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamics*, Berlin, 1864.
- [26] M. A. Javaloyes, *Chern connection of a quadratic Finsler metric as a family of affine connections*, arXiv:1303.6263v1.
- [27] V. V. Lychagin, *The local classification of first-order partial differential equations*, Uspekhi Mat. Nauk (Russian Math. Surveys) **30**,1 (1975), 101–171.
- [28] M. Matsumoto, *A slope of a mountain is a Finsler surface with respect to a time measure*, J. Math. Kyoto Univ. **29** (1989), no. 1, 17-25.
- [29] J. W. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematical Studies, **51**, Princeton University Press, NJ, 1963.
- [30] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*. Based on notes by David W. Weaver. Revised reprint of the 1965 original. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. xii+64 pp.
- [31] M. Morse, *The calculus of variations in the large*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 18 (1932).
- [32] H.-B. Rademacher, *Nonreversible Finsler metrics of positive flag curvature*, A sampler of Riemann-Finsler geometry, 261-302, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **50** , Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

- [33] H.-B. Rademacher, *A sphere theorem for non-reversible Finsler metrics*, Math. Ann. 328 (2004), 373–387.
- [34] H.-B. Rademacher, *Existence of closed geodesics on positively curved Finsler manifolds*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2007), 27, 957–969.
- [35] D. Salamon e E. Zehnder, *Morse theory for periodic solutions of Hamiltonian systems and the Maslov index*, Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992), no. 10, 1303–1360.
- [36] Z. Shen, *Lectures on Finsler geometry*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2001, 307 pp.
- [37] J. Szilasi, *Notable Finsler connections on a Finsler manifold*, Lect. Mat. **19** (1998), no. 1, 7-34.
- [38] H. Vitória, *A geometria de curvas fanning e de suas reduções simpléticas*, Ph.D. Thesis, Unicamp, 2010.