E20. Vamos supor (M, d) compacto. (O exercício não supõe isto...)

Como $K \subset U$, isto implica que $K \cap U^c = \phi \Rightarrow \left(\bigcap_{\lambda \in L} K_\lambda\right) \cap U^c = \phi \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in L} (K_\lambda \cap U^c) = \phi$.

Logo $M = \phi^c = \bigcup_{\lambda \in L} (K_\lambda^c \cup U)$. Como M é compacto, $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in L$ tal que

$M = (K_{\lambda_1}^c \cup U) \cup \dots \cup (K_{\lambda_n}^c \cup U)$. Logo $(K_{\lambda_1} \cap U^c) \cap \dots \cap (K_{\lambda_n} \cap U^c) = \phi \Rightarrow$

$(K_{\lambda_1} \cap \dots \cap K_{\lambda_n}) \cap U^c = \phi \Rightarrow K_{\lambda_1} \cap \dots \cap K_{\lambda_n} \subset U$.

O restante do exercício segue desta primeira afirmação.

Se (M, d) não é compacto ainda não consegui provar ou dar um contra-exemplo.

Resolução da Lista de exercícios 1

E1 Basta provar que $d(x,y)=d(y,x)$ e $d(x,y)>0$ se $x\neq y$.

Usando b) temos que $d(x,z)\leq d(x,y)+d(z,y)$.

Se $y=x$, obtemos $d(x,z)\leq d(x,x)+d(z,x)=d(z,x)$. Logo $d(x,z)\leq d(z,x)$, $\forall x,z\in M$

Trocando $x\leftrightarrow z$, obtemos $d(z,x)\leq d(x,z)$, $\forall x,z\in M$. Logo $d(x,z)=d(z,x)$, $\forall x,z\in M$.

Se $x\neq y$, então $d(x,y)>0$. Se fosse igual a zero, então por a) teríamos $x=y$ Absurdo.

E2 Basta observar que

$$d(0,1)=1>\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=d(0,\tfrac{1}{2})+d(\tfrac{1}{2},1)$$

Assim não vale $d(x,y)\leq d(x,w)+d(w,y)$

E4
$$\boxed{d(x,y)=\|x-y\| \iff \begin{array}{l} 1)\ d(x+a,y+a)=d(x,y),\ \forall a,x,y\in E \\ 2)\ d(\lambda x,\lambda y)=|\lambda|\,d(x,y),\ \forall x,y\in E,\ \lambda\in\mathbb{R}\end{array}}$$

$(\Rightarrow)$ $d(x+a,y+a)=\|x+a-(y+a)\|=\|x-y\|=d(x,y)$

$d(\lambda x,\lambda y)=\|\lambda x-\lambda y\|=|\lambda|\,\|x-y\|=|\lambda|\,d(x,y)$

$(\Leftarrow)$ Definimos $\|x\|:=d(x,0)$

Logo $\|x-y\|=d(x-y,0)=d(x-y+y,0+y)=d(x,y)$.

Basta provar que $\|.\|:E\to[0,\infty[$ é uma norma. De fato, se $x\neq 0$, $\|x\|=d(x,0)>0$ e, se $x=0$,

$\|x\|=d(x,0)=d(0,0)=0$.

Além disso, $\|\lambda x\|=d(\lambda x,0)=d(\lambda x,\lambda 0)=|\lambda|\,d(x,0)=|\lambda|\,\|x\|$

$$\|x+y\|=d(x+y,0)=d(x+y-y,0-y)=d(x,-y)\leq d(x,0)+d(0,-y)=$$
$$=d(x,0)+d(0+y,-y+y)=d(x,0)+d(y,0)=\|x\|+\|y\| \quad \blacksquare$$

E7 Se $d(y,F)=0$, então dado $\varepsilon>0$, $\exists\, z\in F$ tal que $d(y,z)<\varepsilon$. Logo

$$d(z,x)\leq d(z,y)+d(y,x)\Rightarrow d(y,x)\geq d(z,x)-d(y,z)>r-\varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, concluímos que $d(y,x)\geq r\Rightarrow y\in F$

E8 1) Seja $A\subset M$. Logo $y\in int(\partial A)\Leftrightarrow\exists\,\varepsilon>0$ tal que $B_\varepsilon(y)\subset\partial A$

Se A é aberto e $y\in\partial A$, então $\forall\,\varepsilon>0$ $B_\varepsilon(y)\cap A\neq\emptyset$. Seja $z\in B_\varepsilon(y)\cap A$. Como A é aberto, então

$z\in A=int(A)$, ou seja, $z\notin\partial A$. Logo $B_\varepsilon(y)\not\subset\partial A\Rightarrow y\notin int(\partial A)$.

Assim $\partial A \subset \text{int}(\partial A)^c \Rightarrow \text{int}(\partial A) \subset (\partial A)^c$. Como $\text{int}(\partial A) \subset \partial A$, então

$\text{int}(\partial A) \subset \partial A \cap (\partial A)^c = \emptyset$.

2) Seja X um fechado com interior vazio. Sabemos que $X = \overline{X} = \text{int}(X) \cup \partial X \underset{\substack{\downarrow \\ \text{int}(X) = \emptyset}}{=} \partial X$

Porém, sabemos que $\partial X = \partial(X^c)$. Assim $X = \partial(X^c)$. Como X é fechado, então X^c é aberto

Assim X é a fronteira de um conjunto aberto

E9: Se $X \subset E$ é convexo $\Rightarrow \text{int}(X)$ é convexo

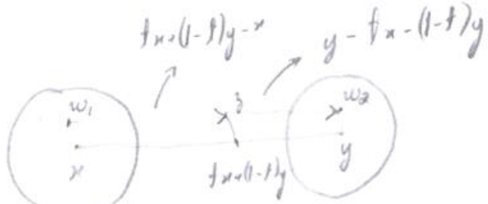
Seja $x, y \in \text{int}(X)$ e $t \in [0,1]$. Queremos mostrar que $tx + (1-t)y \in \text{int}(X)$

Sabemos que $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset X$ e $B_\varepsilon(y) \subset X$. Vamos mostrar que $B_\varepsilon(tx + (1-t)y) \subset$

Isto implicará que $tx + (1-t)y \in \text{int}(X)$. Logo tudo que devemos mostrar é que

$\| z - (tx + (1-t)y) \| < \varepsilon \Rightarrow z \in X$.

Usaremos a figura



Seja $w_1 := z - (tx + (1-t)y - x) = z + (1-t)(x-y)$

$w_2 := z + (y - tx - (1-t)y) = z + t(y-x)$.

Logo $w_1 \in B_\varepsilon(x) \subset X$, pois $\|w_1 - x\| = \|z + (1-t)(x-y) - x\| = \|z - tx - (1-t)y\| < \varepsilon$

$w_2 \in B_\varepsilon(y) \subset X$, pois $\|w_2 - y\| = \|z + t(y-x) - y\| = \|z - tx - (1-t)y\| < \varepsilon$

Assim $tw_1 + (1-t)w_2 \in X$, pois X é convexo. Mas $tw_1 + (1-t)w_2 = tz + t(1-t)(x-y) + (1-t)z + (1-t)t(y-x)$

$= z$

Logo $z \in X$

Problema 2

i) X localmente fechado $\Leftrightarrow$ X é um subconjunto fechado de algum aberto

$(\Rightarrow)$ Dado $x \in X$, $\exists\ U_x \overset{ab}{\subset} M$ tal que $U_x \cap X$ é fechado em U_x.

Seja $U := \bigcup_{x\in X} U_x$. Logo $U \setminus X = U \cap X^c = \bigcup_{x\in X} (U_x \cap X^c) = \bigcup_{x\in X} (U_x \setminus X)$. e $X \subset U$.

Como $U_x \cap X$ é fechado em U_x, então $U_x \setminus X$ é aberto em U_x. Como U_x é aberto, então $U_x \setminus X$ é aberto em M. Logo $\bigcup_{x\in X} (U_x \setminus X)$ é aberto em $M \Rightarrow U\setminus X$ é aberto em U, pois

$U \setminus X = \underbrace{(U\setminus X)}_{\text{aberto em } M} \cap U$. Logo $U \setminus (U \setminus X) = X$ é fechado em U.

$(\Leftarrow)$ Seja $U \subset M$ um aberto tal que X é fechado em U. Logo basta escolher $U_x = U$, $\forall x \in X$, pois $U \cap X = X$ é fechado em U.

ii) $\mathbb{Q}$ não é localmente fechado em $\mathbb{R}$.

Dado $x \in \mathbb{Q}$ e um aberto U_x que contém x, então $\mathbb{Q} \cap U_x$ não é fechado em U_x, pois como U_x é aberto, $\exists\ \varepsilon > 0$ t.q. $x \in B_\varepsilon(x) \subset U_x$. Seja $y \in B_\varepsilon(x) \setminus \mathbb{Q}$. Logo $y \in U_x$ é ponto de aderência de $\mathbb{Q} \cap B_\varepsilon(x)$, mas não pertence a $\mathbb{Q} \cap B_\varepsilon(x)$. Logo $\mathbb{Q} \cap U_x$ não é fechado em U_x.

iii) Todo aberto é localmente fechado em M.

Seja $U \subset M$ um aberto. Dado $x \in U$, escolho $U_x := U$. Logo $U_x \cap U = U$ é fechado em $U_x = U$.

iv) $S \subset T \subset M$, e S loc. fechado em T e T loc. fechado em $M \Rightarrow$ S loc. fechado em M.

Dado $x \in S$, $\exists\ V_x \overset{ab}{\subset} T$ tq. $V_x \cap S$ é fechado em V_x

$\exists\ U_x \overset{ab}{\subset} M$ tq $U_x \cap T$ é fechado em U_x

Sabemos que $V_x = W_x \cap T$, para algum $W_x \subset M$ aberto.

Seja $W_x \cap U_x$. Logo $(W_x \cap U_x) \cap S$ é fechado em $W_x \cap U_x$

De fato, seja $(x_n)_n$ uma sequência em $(W_x \cap U_x) \cap S$. tal que $x_n \to x \in W_x \cap U_x$

Como $x_n \in U_x \cap W_x \cap S \subset U_x \cap S \subset U_x \cap T$, e $U_x \cap T$ é fechado em U_x, concluímos que $x \in U_x \cap T$

Como $x_n \in U_x \cap W_x \cap S \subset W_x \cap S \overset{S \subset T}{\subset} V_x \cap S$, e $x \in (W_x \cap U_x) \cap (U_x \cap T) = V_x \cap$ concluímos que $x \in V_x \cap S$, pois $V_x \cap S$ é fechado em V_x

$\boxed{2}$

Logo $x \in V_x \cap S \cap U_x \cap T \subset W_x \cap U_x \cap S$