Exercício 10 (ELJ 58)

Resolução: Pelo Teorema Fundamental do Cálculo $\int_0^1 \frac{d}{dt}(f(tx))\,dt = f(tx)\Big|_0^1 = f(x) - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(0)}} = f(x)$.

Logo $f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(tx))\,dt = \int_0^1 df(tx)(x)\,dt = \sum_{j=1}^{n} x_j \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\,dt$

Basta definir $g_j(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\,dt$ e obtemos $f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j g_j(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 11 (ELJ 62)

Resolução: Sabemos que $f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left(2f\left(\frac{\frac{x}{2}}{2}\right)\right) = 4f\left(\frac{x}{4}\right) = 4\left(2f\left(\frac{\frac{x}{4}}{2}\right)\right) = 8f\left(\frac{x}{8}\right) = \dots$

$= 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Como f é diferenciável em 0, concluímos que f é contínua em 0. Mas $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Logo

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} f(1) = 0. \Rightarrow f(0) = 0.$$

$\downarrow$ usamos $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2^{-n} f(x)$

Além disso, $f(x) = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0)}} + df(0)(x) + r(x)$, $\lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{\|x\|} = 0$.

Logo, $f(x) = df(0)(x) + r(x) \Rightarrow f\left(\frac{x}{2^n}\right) = df(0)\left(\frac{x}{2^n}\right) + r\left(\frac{x}{2^n}\right)$

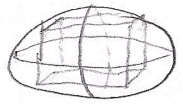
$\Rightarrow f(x) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2^n df(0)\left(\frac{x}{2^n}\right) + 2^n r\left(\frac{x}{2^n}\right) = df(0)(x) + \|x\| \frac{r\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{\|x\|}{2^n}}$

Concluímos que $f(x) = df(0)(x) + \|x\| \frac{r\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{\|x\|}{2^n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tomando o limite $n \to \infty$, concluímos que $\lim_{n\to\infty} \frac{r\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{\|x\|}{2^n}} = 0$. Logo $\boxed{f(x) = df(0)(x)}$.

$\Rightarrow f$ é linear

Exercício 18 (ELJ 97)



Resolução: O volume será $(2x)(2y)(2z)$

Temos $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z) = 8xyz$

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$.

Vamos achar os pontos críticos:

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z) = 1 \\ \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla \varphi(x,y,z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ 8yz = \lambda 2x \\ 8xz = \lambda \frac{y}{2} \\ 8xy = \lambda \frac{2}{9} z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1 \\ 4yz = \lambda x \\ 4xz = \lambda \frac{y}{4} \\ 4xy = \lambda \frac{z}{9} \end{cases}$$

Assim $4xyz + 4xyz + 4xyz = \lambda\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}\right) = \lambda \Rightarrow \lambda = 12xyz$.

$$\left.\begin{aligned} 4yz &= 12x^2yz \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 4xz &= 12\frac{xy^2z}{4} \Rightarrow 3y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 4xy &= \frac{12xyz^2}{9} \Rightarrow \frac{4}{3}z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm\sqrt{3} \end{aligned}\right\}$$

O paralelepípedo é

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \times \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right] \times \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$$

O volume é $= \frac{16}{\sqrt{3}}$ $\left(= 8 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3}\right)$

Exercício 21 (ELJ 99)

Resolução: Seja $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dado por $\varphi(x) = \|x\|^2$ e $M_\varepsilon = \varphi^{-1}(\varepsilon^2)$.

Como M_ε é compacto, $\exists$ ao menos dois pontos críticos de $f|_{M_\varepsilon}$ (correspondente ao máximo e mínimo de f sobre M_ε). Logo, neste pontos críticos temos

$$\begin{cases} \varphi(x) = \varepsilon^2 \\ \nabla f(x) = \lambda \nabla \varphi(x) \end{cases} \Rightarrow$$

Se p é ponto crítico, então $\|p\| = \varepsilon$ e

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla \varphi(p) = 2\lambda p \Rightarrow \nabla f(p) \,/\!/\, p.$$

Assim sempre existe p tal que $\|p\| = \varepsilon$ e $\nabla f(p) \,/\!/\, p$. Basta pegar um ponto crítico de $f|_{M_\varepsilon}$.

Exercício 4 (ELJ 37)

Resolução: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2 0}{t^2+0^2}-0}{t} = 0.$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0^2 t}{0^2+t^2}-0}{t} = 0.$

$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\frac{1}{\sqrt{2}}, t\frac{1}{\sqrt{2}})-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\frac{t^2}{2}+\frac{t^2}{2}}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{2\sqrt{2}}}{t^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$

Logo $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\frac{1}{\sqrt{2}} = \langle \underset{0}{\underset{\parallel}{\nabla f(0,0)}}, (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\rangle = 0.$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) \neq \langle \nabla f(0,0), u\rangle$. Isto ocorre, pois f não é diferenciável em $(0,0)$.

Exercício 3 (ELJ 36)

Resolução:

a) Observamos que

$\frac{\partial f}{\partial (tv)}(p) = \lim_{s\to 0} \frac{f(p+stv)-f(p)}{s} = \lim_{s\to 0} \left(\frac{f(p+stv)-f(p)}{st}\right) t \underset{\tilde{s}=st}{\overset{\downarrow}{=}} t \lim_{\tilde{s}\to 0} \frac{f(p+\tilde{s}v)-f(p)}{\tilde{s}} = t\frac{\partial f}{\partial v}(p)$

Logo $\exists \frac{\partial f}{\partial (tv)}(p) \Leftrightarrow \exists\, t\frac{\partial f}{\partial v}(p).$

b) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ $\quad e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$.

Logo $\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial e_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial e_2}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial (e_1+e_2)}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\left(\frac{t^3}{2t^2}\right)}{t} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \frac{\partial f}{\partial (e_1+e_2)}(0,0) \neq \frac{\partial f}{\partial e_1}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial e_2}(0,0).$

Exercício 16 (ELJ 92)

Resolução: Seja $\varphi: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dado por $\varphi(x, a_0, \dots, a_{n-1}) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Logo $M = \varphi^{-1}(0)$. Basta mostrar que 0 é valor regular. Como $\frac{\partial \varphi}{\partial a_0} = 1$ sempre,

então $\nabla \varphi(x, a_0, \dots, a_{n-1}) \neq 0$ sempre $\Rightarrow$ 0 é valor regular $\Rightarrow M$ é hiperfície. $\boxtimes$

Exercício 12 (ELJ 82)

Resolução: $f(x,y) = x^3 + xy^2 + y^3$

Logo $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y^2$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 3$. Logo apenas $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \neq 0$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + 3y^2$ $\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$

Pelo Teorema da Função Implícita, localmente temos $x = x(y)$. (E não $y = y(x)$).

O vetor normal em $(1,0)$ é dado por $\nabla f(1,0) = (3,0)$.

Logo $T_{(1,0)}M = \{(0,t);\ t \in \mathbb{R}\}$, em que $M = f^{-1}(1)$.

A reta tangente é $\boxed{(1,0) + t(0,1) = (1,t);\ t \in \mathbb{R}}$

Exercício 13 (ELJ 83)

Resolução: $f(x,y,z) = xye^{xz} - z\ln(y)$

Logo $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xz} + xyze^{xz}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xz} - \frac{z}{y}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2ye^{xz} - \ln(y)$.

$\Rightarrow$ No ponto $(0,1,0)$, temos:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,0) = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1,0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,0) = 0$

Pelo Teorema da Função Implícita, localmente, ao redor de $(0,1,0)$, temos $x = x(y,z)$ $\left(\begin{array}{l}\text{Mas não} \\ y = y(x,z), \\ z = z(x,y)\end{array}\right)$.

O vetor normal é $(1,0,0)$. Logo, em $M = f^{-1}(0)$, obtemos

$$T_{(1,0,0)}M = \{(0,y,z);\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}$$

O plano tangente é $\boxed{(0,1,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1),\ y,z \in \mathbb{R}.}$ //

Exercício 14 (ELJ 85)

Resolução: $\nabla f(x,y) = (6x^2 - 6x,\ 6y^2 + 6y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x(x-1) = 0 \\ y(y+1) = 0 \end{array}$

$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}(0,0)\\(1,0)\\(0,-1)\\(1,-1)\end{array}}$. Como $f(0,0) = 0$ $\quad f(0,-1) = 1$ $\quad f(1,0) = -1$ $\quad f(1,-1) = 0$ $\Rightarrow$

No ponto $(0,0)$ e $(1,-1)$ $f(x,y) = 0$ não pode ser resolvido, usando o T.F.I, nem como $x = x(y)$, nem como $y = y(x)$.

Exercício 15 (ELJ 87)

Resolução: $f(z) = ze^{xy} + z^3(x^2+y^2) - 1$.

a) $\frac{df}{dz}(z) = \underbrace{e^{xy}}_{>0} + \underbrace{2z^2(x^2+y^2)}_{\geq 0} > 0$. Logo f é crescente.

Como $f(0) = -1$ e $\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}(z\underbrace{e^{xy}}_{>0} + z^3(x^2+y^2) - 1) = \infty$, concluímos, pelo teorema do valor intermediário, que $\exists!\, z$ tq. $f(z) = 0$. Este z depende de x e y: $z = z(x,y)$

b) Para ver que z em função de x e y é C^∞, vamos considerar $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por

$$\phi(x,y,z) = ze^{xy} + z^3(x^2+y^2) - 1.$$

Logo $\frac{\partial\phi}{\partial z}(x,y,z) = e^{xy} + 2z^2(x^2+y^2) > 0$

Pelo Teorema da Função Implícita, localmente $\exists\, z = z(x,y)$ tal que $\phi(x,y,z(x,y)) = 0$ de classe C^∞

Como z é único, pelo item a), concluímos que a função do item a) é C^∞.

Exercício 20 (ELJ 103)

Resolução: Se $f(x,y,z) = (x^2+y^2-4)^2 + z^2 - 1$, então

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2(x^2+y^2-4)2x = 4x(x^2+y^2-4) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y(x^2+y^2-4) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2z \end{aligned}\right\} \quad \nabla f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} z=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}}_{f(0,0,0)=15} \text{ ou } \underbrace{\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}}_{f(x,y,z)=-1}$$

Logo -1 e 15 não são regulares.

A imagem de f é igual a $[-1,\infty[$.

Logo $f^{-1}(c)$ é uma hiperfície de $\mathbb{R}^3$ se $\boxed{c \in\,]-1,\infty[\setminus \{15\}}$

Exercício 19 (ELJ 100)

Resolução:

a) Os pontos extremos são pontos críticos. Logo satisfazem

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 \\ \nabla f(x) = \lambda \nabla \varphi(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|x\| = 1 \\ 2\sum_{k=1}^{n} A_{jk} x_k = 2\lambda x_j \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|x\| = 1 \\ A(x) = \lambda x . \end{cases}$$

Logo x é auto-vetor de A.

$\varphi(x) = \|x\|^2$

$f(x) = \langle Ax, x\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{jk} x_j x_k$ ($A_{jk} = A_{kj}$, pois A é auto-adjunta)

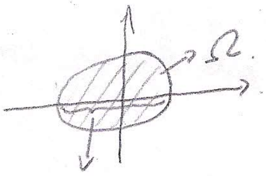
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 2\sum_{k=1}^{n} A_{jk} x_k \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = 2x_j$$

b) Se $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, então

$$f(x,y) = \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \langle A(x,y),(x,y)\rangle$$, em que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Pelos resultados do item a), os valores extremos devem ser os autovalores de A.

Exercício 8 (ELJ 56)



a) Seja $\Omega_x := \{x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}$ tal que $(x,y) \in \Omega\}$

Definamos $g: \Omega_x \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x,y)$, em que

$y \in \mathbb{R}$ e $(x,y) \in \Omega$.

g está bem definida.

Se y e $\tilde{y} \in \mathbb{R}$ e (x,y) e $(x,\tilde{y}) \in \Omega$, então $(x, y + \theta(\tilde{y} - y)) \in \Omega$, $\forall \theta \in [0,1]$. (pois Ω é convexo)

Assim, $f(x,y) - f(x,\tilde{y}) = df(x, \tilde{y} + \theta(y-\tilde{y}))(0, y-\tilde{y}) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{y} + \theta(y - \tilde{y}))(y - \tilde{y}) = 0$.

Logo $f(x,y) = f(x,\tilde{y})$.

Concluímos que $f(x,y) = g(x)$.

b) Basta observar que

$$f(x,y) = f(0,0) + df(\theta x, \theta y)(x,y) = f(0,0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\theta x)}_{0} x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(\theta y)}_{0} y = f(0,0).$$

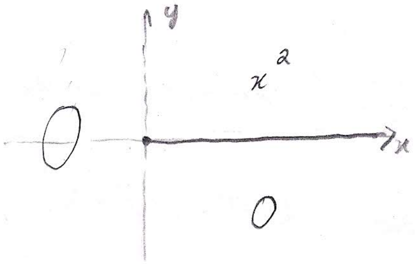
Logo f é constante

<u>Exercício 9 (ELJ 57)</u>

<u>Resolução:</u>

a) Como f é diferenciável, Ω é convexo e $df = 0$, então f é constante (ver demonstração deste fato nas notas de aula ou no Elon).

b) Seja $f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & x \geq 0 \text{ e } y > 0 \\ 0, & x \geq 0 \text{ e } y < 0 \end{cases}$



Logo $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x, & x \geq 0 \text{ e } y > 0 \\ 0, & x \geq 0 \text{ e } y < 0 \end{cases}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

Como $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas $\Rightarrow$ f é diferenciável.

Mas $f(1,1) = 1 \neq 0 = f(1,-1)$. Logo f depende de y.

<u>Exercício 17 (ELJ 93)</u>

<u>Resolução:</u> Seja $F: [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y) = \int_x^y f(t)\,dt$

<u>F é diferenciável</u>

$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -f(x)$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f(y)$

são contínuas $\Rightarrow$ F diferenciável e <u>de classe C^1</u>

<u>Dado $x \in [0,1]$, $\exists!\, y \in [0,2]$ tal que $\int_x^y f(t)\,dt = 1$</u>

Basta ver que se $h(s) = \int_x^s f(t)\,dt$, então h é contínua, crescente $(h'(s) = f(s) > 0)$ e $h(x) = 0$ e $h(2) \geq \int_1^2 f(t)\,dt = 1$.

Logo, pelo teorema do valor médio, $\exists!\, y = g(x)$ t.q. $h(y) = 1$, ou seja, $\int_x^{g(x)} f(t)\,dt = 1$.

<u>$g:]0,1[\to \mathbb{R}$ é C^1</u>

Basta ver que $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$. Logo 1 é valor regular de F e $\exists\, y = y(x)$ t.q. $F(x,y(x)) = 1$ (localmente) de classe C^1 (pois F é de classe C^1). Por unicidade esta função $y = y(x)$ é a mesma função g achada anteriormente. Logo g é de classe C^1.

Exercício 1 (ELJ 32)

Resolução:

a) i) Seja $u=(u_1,u_2)\neq(0,0)$

$$\frac{f(tu)-f(0)}{t}=\frac{\left(\frac{u_1u_2}{u_1^2+u_2^2}\right)}{t}$$

Logo $\exists \lim_{t\to 0}\frac{f(tu)-f(0)}{t} \iff u_1=0$ ou $u_2=0$.

Logo u deve pertencer a $\boxed{\mathbb{R}\times\{0\}\cup\{0\}\times\mathbb{R}}$

ii) Sim, pois

$$\frac{f(te_j)-f(0)}{t}=0,\ \forall t,\ j=1,2. \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$ em $(0,0)$.

iii) Não, se fosse existiria $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\forall u\in\mathbb{R}^2$.

iv) Não, pois

$$\lim_{t\to 0} f(t,t)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0=f(0,0)$$

b) i) Seja $u=(u_1,u_2)\neq(0,0)$

$$\frac{f(tu)-f(0)}{t}=\frac{1}{t}\cdot\frac{u_1^2u_2^2}{u_1^2u_2^2+(u_1-u_2)^2}$$

Logo $\exists \lim_{t\to 0}\frac{f(tu)-f(0)}{t} \iff u_1=0$ ou $u_2=0$

Logo u deve pertencer a $\boxed{\mathbb{R}\times\{0\}\cup\{0\}\times\mathbb{R}}$

ii) Sim, pois se $j=1,2$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(te_j)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0$$

iii) Não, se fosse existiria $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\forall u\in\mathbb{R}^2$.

iv) Não, pois

$$\lim_{t\to 0} f(t,t)=\lim_{t\to 0} 1=1\neq 0=f(0,0)$$

Exercício 2 (ELJ 34)

Resolução:

Basta mostrar que $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ são contínuas. Faremos para $\frac{\partial F}{\partial x}$ (para $\frac{\partial F}{\partial y}$ a prova é igual)

Se $x\neq y$, $$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\frac{-f'(x)}{y-x}+\frac{f(y)-f(x)}{(y-x)^2}=\frac{f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)}{(y-x)^2}.$$

Se $x=x$, $$\frac{\partial F}{\partial x}(x,x)=\lim_{t\to 0}\frac{F(x+t,x)-F(x,x)}{t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{f(x+t)-f(x)}{t}-f'(x)}{t}\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{f(x)+tf'(x)+\frac{t^2}{2}f''(x+\theta t)-f(x)}{t}-f'(x)}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}f''(x+\theta t)=\frac{1}{2}f''(x).$$

Se $x\neq y$, então $\frac{\partial F}{\partial x}$ é contínua. Assim, basta mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2}f''(x_0).$$

$$\frac{f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)}{(y-x)^2} = \frac{\frac{1}{2} f''(x+\theta(y-x))(y-x)^2}{(y-x)^2} = \frac{1}{2} f''(x+\theta(y-x))$$

Logo $\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \left(\frac{f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)}{(y-x)^2} \right) = \lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \frac{1}{2} f''(x+\theta(y-x)) = \frac{1}{2} f''(x_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,x_0)$.

(se $(x,y)=(x,x)$, então $\lim_{(x,x)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,x)\to(x_0,y_0)} \frac{1}{2} f''(x) = \frac{1}{2} f''(x_0)$).

Exercício 7 (ELJ 47)

Resolução:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial(e_1+e_2)}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{2t^2}}{t} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \neq 1 + 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial(e_1+e_2)}(0,0) \neq \frac{\partial f}{\partial e_1}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial e_2}(0,0)$$

Logo f não é diferenciável.

Seja $\gamma :]-\delta,\delta[\to \mathbb{R}^2$, $\gamma(0)=0$, derivável em $t=0$. $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$

Logo $\gamma(t) = \gamma(0) + t\gamma'(0) + t\pi(t)$, $\lim_{t\to 0} \pi(t) = 0$.

Assim
$$\frac{f(\gamma(t))-f(\gamma(0))}{t} = \frac{\left(\frac{(t\gamma_1'(0)+t\pi_1(t))^3}{(t\gamma_1'(0)+t\pi_2(t))^2 + (t\gamma_2'(0)+t\pi_2(t))^2} \right)}{t} = \frac{(\gamma_1'(0)+\pi_1(t))^3}{(\gamma_1'(0)+\pi_2(t))^2 + (\gamma_2'(0)+\pi_2(t))^2}$$

Logo
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\gamma(t))-f(\gamma(0))}{t} = \frac{\gamma_1'(0)^3}{\gamma_1'(0)^2+\gamma_2'(0)^2} \Rightarrow \exists \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f\circ\gamma)$$

Exercício 22 (ELJ 108)

Resolução: Vemos que $f(\gamma(0)) = f(a) = 0$

$$\left.\frac{d}{dt}(f(\gamma(t)))\right|_{t=0} = df(a)(\gamma'(0)) = \langle \nabla f(a), \gamma'(0) \rangle \neq 0, \text{ pois } \gamma'(0) \notin T_a M$$

$\nabla f(a) \perp T_a M$

$M = f^{-1}(0)$.

Logo $f(\gamma(t)) > 0$ (<0) se $t>0$ e $f(\gamma(t)) < 0$ (>0) se $t<0$.