SUB DA SEGUNDA PROVA - TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E ANÁLISE DE FOURIER - MAP 5722

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1. Neste exercício, pede-se para calcular a transformada de Fourier de algumas funções e para provar uma identidade.

(1,25 ponto) a) Seja $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $\chi_{[-a,a]} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a função característica do conjunto $[-a,a]$, ou seja,

$$\chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1, \, x \in [-a,a] \\ 0, \, x \notin [-a,a] \end{cases}.$$

Calcule $\mathcal{F}(\delta_0)$, $\mathcal{F}\left(\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)^k \delta_0\right)$ e $\mathcal{F}\left(\chi_{[-a,a]}\right)$.

(1,25 ponto) b) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(at)\operatorname{sen}(bt)}{t^2} dt = \pi \min(a,b).$$

(Dica: Use a fórmula de Plancherel)

Exercício 2. Neste exercício, lidaremos com convolução de deltas de Dirac.

(1,25 ponto) a) Sejam a e b pertencentes a $\mathbb{R}$. Mostre que $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

(1,25 ponto) b) Sejam $u_1 = \delta_{\frac{1}{2}}$, $u_2 = \delta_{\frac{1}{2}} * \delta_{\frac{1}{4}}$, ..., $u_N = \delta_{\frac{1}{2}} * \delta_{\frac{1}{4}} * ... * \delta_{\frac{1}{2^N}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Calcule o limite $\lim_{N\to\infty} u_N$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exercício 3. Neste exercício, vamos mostrar que δ_0 pode ser escrito como limite de funções da forma $\delta_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(tx)}{\pi x}$.

(0,5 ponto) a) Prove que a distribuição temperada $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dada por $u(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{F}\phi(\xi)\, d\xi$, $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, é igual ao delta de Dirac, ou seja, $u = \delta_0$. (Dica: Pense na fórmula de $\mathcal{F}^{-1}$).

(1 ponto) b) Mostre que para todo $t > 0$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ temos

$$\int_{-t}^{t} \mathcal{F}\phi(\xi)\, d\xi = 2\int \phi(x) \frac{\operatorname{sen}(tx)}{x} dx.$$

(1 ponto) c) Conclua que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(tx)}{x} = \pi\delta_0.$$

Exercício 4. Neste exercício vamos ver duas situações em que necessariamente obtemos polinômios ao final.

(1,25 ponto) a) Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição temperada que satisfaz $\Delta u = 0$. Calcule a transformada de Fourier de Δu e determine $\operatorname{supp}(\mathcal{F}(u))$. Prove, então, que u é um polinômio.

(1,25 ponto) b) Seja $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa tal que para todo $\epsilon > 0$, existem $N(\epsilon) \in \mathbb{N}_0$ e $C(\epsilon) > 0$ tais que

$$|f(z)| \leq C(\epsilon)(1 + \|z\|)^{N(\epsilon)} e^{\epsilon\|\operatorname{Im}(z)\|}.$$

Mostre que f é um polinômio.

(Dica: Qual o suporte de $\mathcal{F}^{-1}(f)$?).