SUB DA PRIMEIRA PROVA - TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E ANÁLISE DE FOURIER - MAP 5722

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1. Neste exercício propomos duas questões sobre funções dadas da forma $\frac{1}{\epsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$.

(1,25 ponto) a) Dada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)\,dx = 1$, defina $\phi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Mostre que se $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, ou seja, se ψ é uma função contínua com suporte compacto, então existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que o suporte de $\psi * \phi_\epsilon$ está sempre contido em K, para todo $0 < \epsilon \leq 1$. Mostre, por fim, que $\psi * \phi_\epsilon$ converge a ψ uniformemente, quando $\epsilon \to 0^+$.

(1,25 ponto) b) Seja $\chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a função característica do intervalo $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, ou seja, $\chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(x) = 1$ para $x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ e $\chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(x) = 0$ para $x \notin \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Definamos $\chi_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por $\chi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon}\chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \frac{1}{\epsilon}\chi_{\left[-\frac{\epsilon}{2},\frac{\epsilon}{2}\right]}(x)$, em que $\chi_{\left[-\frac{\epsilon}{2},\frac{\epsilon}{2}\right]}$ é a função característica do intervalo $\left[-\frac{\epsilon}{2},\frac{\epsilon}{2}\right]$. O limite $\lim_{\epsilon\to 0^+}\chi_\epsilon$ existe em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e é igual a uma distribuição bem conhecida. Qual é esta distribuição? Justifique.

Exercício 2. Mostre que as seguintes igualdades são válidas:

(1,25 ponto) a) $\frac{d}{dx}\left(e^{ax}H(x)\right) - ae^{ax}H(x) = \delta_0$.

(1,25 ponto) b) $\frac{d^2}{dx^2}\left(\cos(x)H(x)\right) + \cos(x)H(x) = \frac{d}{dx}\delta_0$.

Acima denotamos por H a função de Heaviside. Ela é igual a 1 para $x \geq 0$ e igual a 0 para $x < 0$.

Exercício 3. Neste exercício estudamos a convergência de funções em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e em $\mathcal{E}'(\Omega)$.

(1,25 ponto) a) Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ uma sequência convergente e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ o limite desta sequência, ou seja, $u = \lim_{j\to\infty}u_j$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Seja $K \subset \Omega$ um conjunto compacto tal que $\operatorname{supp}(u_j) \subset K$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Mostre que $\operatorname{supp}(u) \subset K$.

(1,25 ponto) b) Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a sequência dada por $u_j = \delta_j$, em que $\delta_j(\phi) := \phi(j)$. Mostre que existe o limite $\lim_{j\to\infty}u_j$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e determine este limite. Por fim responda: Esta sequência converge em $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$?

Exercício 4. Neste exercício, faremos algumas questões a respeito da distribuição $PV\left(\frac{1}{x}\right)$:

(1,25 ponto) a) Prove que a distribuição $PV\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ satisfaz $xPV\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. A partir disso, determine todas as soluções $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ da equação $xv = 1$.

(1,25 ponto) b) Determine o suporte e o suporte singular de $PV\left(\frac{1}{x}\right)$.

Lembremos que $PV\left(\frac{1}{x}\right)(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx$.