SUB DA PRIMEIRA PROVA - TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E ANÁLISE DE FOURIER - MAP 5722

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

(1,25 Ponto) a) Seja $\chi_{\mathbb{R}^2_+}$ a função característica do conjunto $\mathbb{R}^2_+$, ou seja,

$$\chi_{\mathbb{R}^2_+}(x,y) = \begin{cases} 1, \ x \in \mathbb{R}, \ y > 0 \\ 0, \ x \in \mathbb{R}, \ y \leq 0 \end{cases}.$$

Mostre que para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, temos

$$\Delta\left(\chi_{\mathbb{R}^2_+}\right)(\phi) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0)\, dx,$$

em que $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

(1,25 Ponto) b) Determine o suporte e o suporte singular das distibuições $\chi_{\mathbb{R}^2_+}$ e $\Delta\left(\chi_{\mathbb{R}^2_+}\right)$.

Exercício 2

(1,25 Ponto) a) Ache todas as distribuições $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ que resolvem a equação abaixo:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \delta_0,$$

em que $\delta_0(\phi) := \phi(0)$, para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

(1,25 Ponto) b) Mostre que:

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = PV\left(\frac{1}{x}\right),$$

em que $PV\left(\frac{1}{x}\right)(\phi) := \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx$, para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Exercício 3

(1,25 ponto) a) Sejam $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{N}_0$. Determine as constantes $c_{kj} \in \mathbb{C}$ para as quais a seguinte identidade é válida: $f \frac{d^k}{dx^k}\delta_0 = \sum_{j=0}^{k} c_{kj} \frac{d^j}{dx^j}\delta_0$. Use a fórmula obtida para escrever $x^m \frac{d^k}{dx^k}\delta_0$ como soma de derivadas de deltas de Dirac.

(1,25 ponto) b) Ache todas as soluções da equação $x^2 u = \delta_0$.

Exercício 4

Seja $(u_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{D}'(]0,2[)$ uma sequência de distribuições dadas por

$$u_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{d^j}{dx^j} \delta_{\frac{1}{j}},$$

em que $\delta_{\frac{1}{j}}(\phi) := \phi\left(\frac{1}{j}\right)$, para todo $\phi \in C_c^\infty(]0,2[)$.

(1,25 ponto) a) Mostre que existe $u \in \mathcal{D}'(]0,2[)$ tal que $u = \lim_{k \to \infty} u_k$ em $\mathcal{D}'(]0,2[)$. Determine a ordem de u.

(1,25 ponto) b) Existe uma distribuição $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que $v|_{]0,2[} = u$?

Formulário.

Definição 1. (Distribuições) Dizemos que um funcional linear $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é uma distribuição se qualquer uma das seguintes condições equivalentes é válida:

i) Para toda sequência $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ que converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$ (ou seja, existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $\mathrm{supp}(\phi_j) \subset K$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e as funções $\partial^\alpha \phi_j$ convergem uniformemente para zero, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$), temos que $\lim_{j\to\infty} u(\phi_j) = 0$.

ii) Para todo conjunto $K \subset \Omega$ compacto, existem constantes $C_K > 0$ e $m_K \in \mathbb{N}_0$, que dependem de K, tais que

$$|u(\phi)| \leq C_K \|\phi\|_{C^{m_K}(\Omega)}, \ \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \ \text{ tal que } \mathrm{supp}(\phi) \subset K.$$

Para cada compacto $K \subset \Omega$, dizemos que a **ordem de** u **em** K é o menor $m_K \in \mathbb{N}_0$ para o qual existe uma constante C_K que torna a desigualdade acima válida. A **ordem da distribuição** u é, por definição, o ínfimo dos números m_K tomados para todos os compactos $K \subset \Omega$. Note que a ordem de uma distribuição pode ser infinita.

Lembremos que $\|\phi\|_{C^m(\Omega)} := \max_{|\alpha|\leq m} (\sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha \phi(x)|)$.

Exemplo 2. Exemplos de distribuições em abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e em $\mathbb{R}$ são:

1) Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, então f define a distribuição $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dada por $T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx$, para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

2) Seja $a \in \Omega$. Logo podemos definir $\delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$ por $\delta_a(\phi) := \phi(a)$, para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. (Delta de Dirac centrado em a)

3 $PV\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ é definido como $PV\left(\frac{1}{x}\right)(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx$, para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Exemplo 3. Quanto à ordem das distribuições, podemos dar o seguinte exemplo: as distribuições $\frac{d^j}{dx^j}(\delta_a)$, para $a \in \mathbb{R}$, têm ordem j.

Definição 4. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $U \subset \Omega$ um aberto contido em Ω e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Definimos a distribuição $u|_U$ (também denotada em sala de aula por $\rho_{U\Omega}(u)$) como a restrição de u ao conjunto $C_c^\infty(U)$, ou seja, $u|_U := u|_{C_c^\infty(U)} : C_c^\infty(U) \to \mathbb{C}$. Neste caso $u|_U \in \mathcal{D}'(U)$.

Definição 5. (Suporte de Distribuições) Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $f \in C(\Omega)$. Definimos

i) O suporte de u, $\mathrm{supp}(u)$, é definido da seguinte forma: $x \in \mathrm{supp}(u)$ se não existe aberto $U \subset \Omega$ contendo x tal que $u|_U = 0$.

i) O suporte de f, $\mathrm{supp}(f)$, é definido da seguinte forma: $x \in \mathrm{supp}(f)$ se não existe aberto $U \subset \Omega$ contendo x tal que $f|_U = 0$.

ii) O suporte singular de u, $\mathrm{sing\,supp}(u)$, é definido da seguinte forma: $x \in \mathrm{sing\,supp}(u)$ se não existe aberto $U \subset \Omega$ contendo x tal que $u|_U$ é dado por uma função C^∞.

Proposição 1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $a \in \Omega$. Se $\mathrm{supp}(u) = \{a\}$, então existem constantes $c_\alpha \in \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{R}$ tais que*

$$u = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha D^\alpha \delta_a.$$

Definição 6. (Distribuições compactas) Denotamos por $\mathcal{E}'(\Omega)$ o conjunto de todas as distribuições com suporte compacto. Estas distribuições podem ser estendidas a um funcional linear $u : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ que satisfaz as seguintes condições equivalentes:

i) Para toda sequência $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)$ que converge a zero em $C^\infty(\Omega)$ (ou seja, para todo compacto $K \subset \Omega$ as funções $\partial^\alpha \phi_j$ convergem uniformemente para zero em K, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$), temos que $\lim_{j\to\infty} u(\phi_j) = 0$.

ii) Existem um compacto $K \subset \Omega$, uma constante $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}_0$ tais que

$$|u(\phi)| \leq C \|\phi\|_{m,K}, \ \forall \phi \in C^\infty(\Omega).$$

Lembremos que $\|\phi\|_{m,K} := \max_{|\alpha|\leq m} (\sup_{x\in K} |\partial^\alpha \phi(x)|)$.

Definição 7. (Operações com distribuições) Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e $\psi \in C^\infty(\Omega)$. Definimos:

a) $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é a distribuição definida como $\partial^\alpha u(\phi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \phi)$, para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

b) $\psi u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é a distribuição definida como $(\psi u)(\phi) = u(\psi\phi)$, para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Definição 8. (Limite de distribuições) Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ uma sequência de distribuições e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dizemos que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, se o seguinte limite é válido

$$\lim_{j\to\infty} u_j(\phi) = u(\phi), \ \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Proposição 2. *Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ uma sequência de distribuições. Se para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, existe o limite $\lim_{j\to\infty} u_j(\phi)$, então existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Neste caso, temos*

$$u(\phi) := \lim_{j\to\infty} u_j(\phi), \ \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Proposição 3. *Consideremos $P(x,D) = \sum_{j=0}^m a_j(x) D^j$ um operador diferencial linear sobre um intervalo aberto I de $\mathbb{R}$ tal que $a_j \in C^\infty(I)$, para todo j, $a_m(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Logo para toda $f \in \mathcal{D}'(I)$, existe $u \in \mathcal{D}'(I)$ tal que $P(x,D)u = f$. Se $\tilde{u} \in \mathcal{D}'(I)$ for outra solução desta equação, então $u - \tilde{u}$ é uma função $C^\infty(I)$ que satisfaz a equação $P(x,D)(u-\tilde{u}) = 0$.*