TERCEIRA PROVA - CÁLCULO V - MAP0217 / MAT0311

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

Denotaremos por $M_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais $n \times n$.

(0,5 ponto) a) Seja $f : M_n(\mathbb{R}) \times ... \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ a função dada por

$$f(A_1, ..., A_k) = A_1 A_2 ... A_k.$$

Calcule $df(A_1, ..., A_k)(H_1, ..., H_k)$, em que $H_j \in M_n(\mathbb{R})$, $j = 1, ..., k$. (Dica: Observe que f é multilinear).

(1,0 ponto) b) Seja $g : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ a função dada por $g(X) = X^k$. Calcule $dg(X)(H)$, para $H \in M_n(\mathbb{R})$, e mostre que $dg(I) : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ é um isomorfismo, em que I é a matriz identidade.

(1,0 ponto) c) Mostre que existem abertos $\Omega, \tilde{\Omega} \subset M_n(\mathbb{R})$ que contêm a identidade I e uma aplicação diferenciável $h : \Omega \to \tilde{\Omega}$ tal que $h(A)$ é a única matriz em $\tilde{\Omega}$ tal que $h(A)^k = A$.

Exercício 2

Denotaremos por $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ o conjunto das transformações lineares de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$.

(1 Ponto) a) Sejam $A : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funções diferenciáveis. Definamos $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $F(x, y, z) = \langle A(x)(f(y)), g(z)\rangle$.[1] Seja $(u, v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Calcule

$$dF(x, y, z)(u, v, w).$$

(1 Ponto) b) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \|f(x)\|^2$. Calcule $dF(x)(h)$, em que $h \in \mathbb{R}^m$. Mostre que se $dF(x) = 0$ e $f(x) \neq 0$, então $df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ não é sobrejetora.

(0,5 Ponto) c) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \|f(x)\|^2$. Mostre que se $c \in \mathbb{R}^n$ é um valor regular de f, $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ e $\|c\|^2$ é o menor valor que F assume, então $c = 0$.

Exercício 3

Sejam $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 definida num aberto Ω de $\mathbb{R}^m$ e $M > 0$ uma constante.

(1,5 Ponto) a) Mostre que se Ω é um convexo, então $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$, para todo $x, y \in \Omega$, se, e somente se, $\|df(x)\| \leq M$, para todo $x \in \Omega$.

(1 Ponto) b) Mostre que se $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|^2$, para todo $x, y \in \Omega$, então f é uma constante.

Exercício 4

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ um função de classe C^1 definida num aberto Ω de $\mathbb{R}^m$.

(1 Ponto) a) Mostre que se f é uma imersão, então para todo $x \in \Omega$, existe um aberto $U \subset \Omega$ tal que $f|_U : U \to \mathbb{R}^n$ é injetora. (Dica: Use um dos resultados do formulário)

(1,5 Ponto) b) Mostre que $graf(f) := \{(x, f(x));\ x \in \Omega\}$ é igual a imagem de uma parametrização, ou seja, de uma imersão $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ é um homeomorfismo. (Dica: Para mostrar que é um homeomorfismo, ache φ^{-1}).

[1] Observe que F é composta das funções $(x, y, z) \overset{S}{\mapsto} (A(x), f(y), g(z)) \overset{T}{\mapsto} \langle A(x)(f(y)), g(z)\rangle$, em que $S = A \times f \times g$ e T é uma função trilinear. Use a regra da cadeia.

Formulário.

Usaremos sempre o produto interno e a norma Euclidiana. A norma de transformações lineares $T:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é dada por $\|T\| := sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

Definição 1. Seja $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ uma função definida num aberto Ω. Dizemos que f é diferenciável em $x_0\in\Omega$ se existe uma transformação linear $df(x_0):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ tal que

$$r_{x_0}(h) := f(x_0+h) - f(x_0) - df(x_0)(h)$$

satisfaz $\lim_{h\to 0}\frac{r_{x_0}(h)}{\|h\|}=0$. Dizemos que f é diferenciável, se for diferenciável em todo $x\in\Omega$. A matriz que representa $df(x_0)$ na base canônica é a matriz jacobiana. Ela é dada por $Jf(x_0)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{i=1,\dots n\, j=1,\dots,m}\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$.

Proposição 2. *Sejam $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ uma função diferenciável em $x_0\in\Omega$ e $g:\tilde{\Omega}\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ uma função diferenciável em $f(x_0)$ tal que $f(\Omega)\subset\tilde{\Omega}$. Logo $g\circ f:\Omega\to\mathbb{R}^p$ é diferenciável em x_0 e*

$$d\left(g\circ f\right)\left(x_0\right)\left(h\right) = dg\left(f\left(x_0\right)\right)df\left(x_0\right)\left(h\right).$$

Definição 3. Seja $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ uma função definida num aberto Ω. Dizemos que f é uma função de classe C^1 se f é diferenciável e $df:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to L\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n\right)$ é contínua (isto equivale a existência e continuidade de todas as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}:\Omega\to\mathbb{R}$). Para $k\geq 1$, dizemos que f é de classe C^k se df for de classe C^{k-1}, em que C^0 corresponde a uma função contínua.

Definição 4. Seja $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Dizemos que f é:

1) Uma submersão, se $df(x):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ é sobrejetora para todo $x\in\Omega$. Em particular, temos $m\geq n$.
2) Uma imersão, se $df(x):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ é injetora para todo $x\in\Omega$. Em particular, temos $m\leq n$.
3) Uma parametrização, se f é uma imersão e $f:\Omega\to f(\Omega)$ é um homeomorfismo, em que $f(\Omega)$ é um espaço métrico com a métrica induzida de $\mathbb{R}^n$.

Definição 5. Seja $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Dizemos que um ponto $c\in\mathbb{R}^n$ é um valor regular de f se para todo $x\in f^{-1}(c)$, a aplicação $df(x):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ é sobrejetora.

Teorema 6. *(Desigualdade do Valor Médio) Seja $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ uma função diferenciável definida no aberto Ω. Sejam a e $v\in\mathbb{R}^n$ tais que $[a,a+v]:=\{a+tv,\, t\in[0,1]\}\subset\Omega$. Se existe $M>0$ tal que $\|df(a+tv)\|\leq M$, para todo $t\in[0,1]$, então $\|f(a+v)-f(a)\|\leq M\|v\|$.*

Teorema 7. *(Teorema da Aplicação Inversa) Seja $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ de classe C^k, $k\geq 1$, definida no aberto Ω. Se $x_0\in\Omega$ é tal que $df(x_0):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, então existe uma bola aberta $B_r(x_0)\subset\Omega$, $r>0$, tal que*

1) $f\left(B_r\left(x_0\right)\right)$ é um conjunto aberto.
2) $f|_{B_r(x_0)}:B_r\left(x_0\right)\to f\left(B_r\left(x_0\right)\right)$ é um difeomorfismo.

Teorema 8. *Seja $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{m+n}$ uma função de classe C^k, $k\geq 1$, definida num aberto Ω. Se $x_0\in\Omega$ é tal que $df(x_0):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{m+n}$ é injetora, então existe um difeomorfismo $h:Z\to V\times W$ de classe C^k de um aberto $f(x_0)\in Z\subset\mathbb{R}^{m+n}$ sobre um aberto $(x_0,0)\in V\times W\subset\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ tal que*

$$h\circ f(x)=(x,0),\ \forall x\in V.$$