SEGUNDA PROVA - TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E ANÁLISE DE FOURIER - MAP 5722

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/DISTRIBUICOES

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração. No entanto, a prova deve ser feita sem consulta.

Boa Prova!

Exercício 1

(1 ponto) a) Calcule a Transformada de Fourier das distribuições $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $H(x)e^{-\epsilon x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ para $\epsilon > 0$ e $H(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. ($H(x)$ é a função de Heaviside: $H(x) = 1$ para $x \geq 0$ e $H(x) = 0$ para $x < 0$).

(1 ponto) b) Mostre que a distribuição em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ dada pela função $H(x)H(y)$ é uma solução fundamental de $\frac{\partial}{\partial x \partial y}$. (Dica: Prove diretamente ou usando Transformada de Fourier.)

(0,5 ponto) c) O operador $\frac{\partial}{\partial x \partial y}$ é hipoelíptico? Justifique. (Dica: Qual é o suporte singular de $H(x)H(y)$?)

Exercício 2

(1,25 Ponto) a) Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ um polinômio, ou seja, $f(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$ com $a_j \in \mathbb{C}$, e $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Mostre que $u * f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é um polinômio.

(1,25 Ponto) b) Seja $1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ a distribuição temperada dada pela função 1. Calcule $\mathcal{F}(1)$ e $\mathcal{F}(x^j)$, para $j \geq 1$. A partir disto, responda: qual é o suporte de $\mathcal{F}(u * f)$?

Exercício 3

(1 ponto) a) Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de distribuições constantes, ou seja, para as quais existe uma sequência $(c_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tal que

$$u_j(\phi) = c_j \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx,\ \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Mostre que se $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, então a sequência $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathbb{C}$. Seja $c := \lim_{j\to\infty} c_j$, mostre que u é a distribuição constante igual a c, ou seja, é dada por

$$u(\phi) = c \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx,\ \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

(1,5 ponto) b) Prove que se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\partial_{x_j} u = 0$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$u(\phi) = c \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx,\ \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

ou seja, u é igual a distribuição constante. (Dica: Sabemos que o resultado acima vale para $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Parta disto e use resultados de convolução de distribuições por funções)

Exercício 4

(1,25 Ponto) a) Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ uma solução da equação

$$u + \Delta u = 0,$$

em que $\Delta := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. Calcule a Transformada de Fourier da equação acima e mostre que o suporte de $\mathcal{F}(u)$ está contido no conjunto $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| = 1\}$.

(1,25 Ponto) b) Mostre que, se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é uma solução de $u + \Delta u = 0$, então u é uma função que admite uma extensão holomorfa em $\mathbb{C}^n$ e para a qual existem constantes $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}_0$ tais que

$$|u(z)| \leq C(1 + \|z\|)^N e^{\|\mathrm{Im}(z)\|},\ \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Formulário.

Definição 1. Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (ou $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$) e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$). Definimos $u * \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ por

$$u * \phi(x) := u(y \mapsto \phi(x-y)).$$

Teorema 1. *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (ou $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$) e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$). Logo*

1) $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3) $\partial_x^\alpha (u * \phi)(x) = (\partial_x^\alpha u) * \phi(x) = u * (\partial_x^\alpha \phi)(x)$.

3) Para toda função $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,dx = 1$, temos $\lim_{\epsilon \to 0^+} u * \phi_\epsilon = u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, em que $\phi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$.

Definição 2. Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Definimos $u * v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ como sendo a única distribuição tal que

$$(u * v) * \phi = u * (v * \phi), \ \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Neste caso, usando a função $S : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (ou $S : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$) definida como $(Su)(\phi(x)) = u(\phi(-x))$, para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$), temos

$$(u * v)(\phi) = u((Sv) * \phi) = u(x \mapsto (v(y \mapsto \phi(x+y)))).$$

Definição 3. Seja $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ um operador linear com coeficientes constantes. Dizemos que $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é uma solução fundamental de $P(D)$ se $P(D)E = \delta_0$.

Definição 4. Seja $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ um operador linear com coeficientes constantes. Dizemos $P(D)$ é um operador hipoelíptico se para todo aberto Ω de $\mathbb{R}^n$, temos

$$\text{sing supp}(P(D)u) = \text{sing supp}(u), \ \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Proposição 1. *Um operador linear com coeficientes constantes $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ é hipoelíptico se, e somente se, toda solução fundamental E é tal que sing supp$(E) = \{0\}$.*

Definição 5. Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de u é a função $\mathcal{F}(u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definida como

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x)\,dx,$$

em que $x\xi := x_1\xi_1 + ... + x_n\xi_n$.

Definição 6. (Espaço de Schwartz) O conjunto $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ consiste nas funções $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que as funções $x \mapsto x^\alpha \partial_x^\beta u(x)$ são limitadas para todos α, β em $\mathbb{N}_0^n$. Dizemos que uma sequência $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções de Schwartz converge a $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\lim_{n \to \infty} \phi_n = \phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se para todos α, $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, temos

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x^\alpha \partial_x^\beta \phi_n - x^\alpha \partial_x^\beta \phi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Teorema. *A Transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma bijeção contínua. Sua inversa é dada por*

$$\mathcal{F}^{-1}(\phi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} \phi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} S \circ \mathcal{F}(\phi)(\xi),$$

em que $(S\phi)(x) = \phi(-x)$. Como $S : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ são funções lineares contínuas, então $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ também é uma função linear contínua.

Definição 7. Uma função $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ é chamada de distribuição temperada se:

1) u é linear: $u(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha u(\phi) + \beta u(\psi)$, para todo α e $\beta \in \mathbb{C}$, ϕ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2) u contínua: para toda sequência $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{n \to \infty} \phi_n = \phi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que $\lim_{n \to \infty} u(\phi_n) = u(\phi)$.

O conjunto de todas as distribuições temperadas é denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Toda distribuição temperada $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ define uma distribuição. Basta restringi-la ao conjunto $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. O conjunto $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é um subconjunto denso de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2. *Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Logo o produto de convolução $u * v$ pertence a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Definição 8. Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Definimos a Transformada de Fourier de u, denotada por $\mathcal{F}(u) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, como a distribuição temperada definida como

$$\mathcal{F}(u)(\phi) := u(\mathcal{F}(\phi)), \ \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Proposição 3. *A transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tem as seguintes propriedades:*

1) $\mathcal{F}$ é contínua e linear.

2) $\mathcal{F}$ é bijetora e $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é definida como $\left(\mathcal{F}^{-1}(u)\right)(\phi) := u\left(\mathcal{F}^{-1}(\phi)\right)$, para todo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo $\mathcal{F}^{-1}(u) = \frac{1}{(2\pi)^n} S \circ \mathcal{F}(u)$.

3) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Neste caso, $\mathcal{F}(T_f) = T_{\mathcal{F}(f)}$, ou seja, as definições de $\mathcal{F}$ em L^1 e em $\mathcal{S}'$ equivalem.

4) Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Logo $\mathcal{F}(D^\alpha u) = \xi^\alpha \mathcal{F}(u)$ e $\mathcal{F}(x^\alpha u) = (-D)^\alpha \mathcal{F}(u)$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. A derivada $D^\alpha : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e a multiplicação $x^\alpha : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ são contínuas.

5) Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Logo $\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v)$.

Teorema 2. *Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Logo $\mathcal{F}(u)$ é uma função C^∞ que admite uma extensão holomorfa dada por $f(z) = u\left(e^{-ixz}\right)$ com a seguinte propriedade: seja $R > 0$ tal que supp$(u) \subset B_R(0)$ e $N \in \mathbb{N}_0$ a ordem de u. Logo existe $C > 0$ tal que*

$$|f(z)| \leq C(1 + \|z\|)^N e^{R\|Im(z)\|}, \ \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Por outro lado, seja $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa para a qual existem constantes $C > 0$, $R > 0$ e $N \in \mathbb{N}_0$ tal que uma desigualdade como a mostrada acima seja válida. Logo existe uma distribuição $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ com suporte em $B_R(0)$ tal que $f(\xi) = \mathcal{F}u(\xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.